

MATEMATIKA V NARAVOSLOVJU
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

1. KOLOKVIJ

24. 11. 2023

(Čas pisanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne.)

1. Podan je sistem štirih enačb s štirimi neznankami.

$$x + y + 2z - 2w = -10$$

$$2x - y - 2w = -9$$

$$x + z - w = -6$$

$$-x + y - z = 4$$

- (a) Izračunajte determinanto matrice koeficientov sistema enačb in zapišite, kaj determinanta pove o rešljivosti sistema.
- (b) S pomočjo Gaussove eliminacije rešite sistem enačb.

2. Dani sta matrici $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Ali za dani matrici A in B velja enakost $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$? Če ne, potem poiščite primer dveh drugih matric, za kateri bo omenjena enakost veljala.
- (b) Izračunajte inverz A^{-1} matrice A in rešite matrično enačbo $2B + XA = B^T$.

3. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poiščite lastne vrednosti matrice A in vsaj za eno izmed lastnih vrednosti tudi pripadajoče lastne vektorje oziroma lastne podprostore.

(b) Ali je stolpec $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tudi lastni vektor dane matrice A ?

4. (a) Po definiciji (t.j. z limito) izračunajte odvod funkcije $f(x) = \sqrt{4x - 3}$.

- (b) Število 2023 zapišite kot vsoto dveh takih pozitivnih realnih števil, t.j. $a + b = 2023$, da bo njun produkt $P = a \cdot b$ največji. (Nasvet: P zapišite kot funkcijo ene spremenljivke, nato pa si pomagajte z odvodom.)

Vse odgovore natančno utemeljite.