

Verjetnost in statistika 2024/25

1. KOLOKVIJ, 5. DECEMBER 2024

*Pišite s kemičnim svinčnikom. Odgovori morajo biti primerno utemeljeni.
Za reševanje imate na voljo 90 minut. Veliko uspeha!*

PRIIMEK IN IME: Vp. številka:

- [5x2=10 točk] Zapišite iskano verjetnost z ulomkom ali na dve decimalni mesti natančno.
 - Vržemo dve pošteni kocki. Kakšna je verjetnost, da je vsota pik enaka 10?
 - Pošteno kocko mečemo do prve šestice. Kakšna je verjetnost, da mečemo natanko trikrat?
 - Pri nekem poskusu za neodvisna dogodka A in B velja $P(A) = 0.2$ in $P(B) = 0.5$. Kakšna je verjetnost, da se zgodi vsaj eden od njiju?
 - Okrogla tarča s polmerom 0.5 m ima v središču rdeč krog s polmerom 0.1 m. Kakšna je verjetnost, da zadanemo v rdeč krog, če vse točke tarče zadanemo z enako verjetnostjo?
 - Vržemo pošteno kocko in nato toliko kovancev, kot je padlo pik na kocki. Kakšna je verjetnost, da pade natanko 5 grbov? (Namig: kaj je popoln sistem dogodkov?)
- [10 točk] Imamo 5 igralnih kock, 3 poštene in 2 goljufigi, pri katerih pade šestica z verjetnostjo $3/4$.
 - Izberemo naključno kocko in jo vržemo dvakrat zapored. Obakrat pade šestica. Kakšna je verjetnost, da je izbrana kocka goljufiga?
 - Naključno izberemo 3 različne kocke in jih vržemo. Šestica ne pade. Kakšna je verjetnost, da smo izbrali le poštene kocke?
- [10 točk] Slučajna spremenljivka X nekega poskusa ima porazdelitveno shemo

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ a^2 & 3a^2 & 2a^2 & a \end{pmatrix}.$$

- Določite vrednost konstante a .
 - V isti koordinatni sistem skicirajte grafa porazdelitvenih funkcij $p_X(x)$ in $F_X(x)$.
 - Izračunajte pričakovano vrednost, varianco in standardni odklon za X .
 - Določite (vse) moduse in mediane za X .
- [10 točk] V vreči so 1 bela, 2 rdeči in 2 črni kroglici, ki so na otip enake. Za vsakega od naslednjih poskusov za opisano slučajno spremenljivko X ugotovite, za katerega od standardnih tipov diskretne slučajne spremenljivke gre, in določite njeno pričakovano vrednost $E(X)$.
 - Na slepo in brez vračanja vlečemo po eno kroglico, dokler ne izvlečemo bele.
 $X \equiv$ število vlečenj.
 - Trikrat na slepo izvlečemo kroglico in jo vrnemo.
 $X \equiv$ število rdečih kroglic med izvlečenimi.
 - Na slepo vlečemo po eno kroglico in jo vračamo, dokler ne izvlečemo črne.
 $X \equiv$ število vlečenj.
 - Na slepo izvlečemo tri kroglice hkrati.
 $X \equiv$ število črnih kroglic med izvlečenimi.
 - Na slepo izvlečemo tri kroglice brez vračanja.
 $X \equiv$ (število različnih barv med izvlečenimi kroglicami)–2.

Rešitev

1. (a) $3/36 \doteq 0.08$.

(b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \doteq 0.12$.

(c) $0.2 + 0.5 - 0.2 \cdot 0.5 = 0.6$.

(d) $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{25} = 0.04$.

(e) $\frac{1}{6}(1/2)^5 + \frac{1}{6}\binom{6}{5}(1/2)^6 = 1/48 \doteq 0.02$.

2. (a) Označimo $A \equiv$ izbrali smo pošteno kocko, in $B \equiv$ padeta dve šestici. Sledi

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{5}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{5}} = 27/29 \doteq 0.93.$$

(b) Označimo $A_i \equiv$ izbrali smo i poštenih kock, in $B \equiv$ šestica ne pade. Sledi

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_3)P(A_3)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_1)P(A_1)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{6}}{\binom{6}{3}}}{\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{6}}{\binom{6}{3}} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\binom{2}{3}\binom{7}{3}}{\binom{6}{3}} + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{6}}{\binom{6}{3}}} = \frac{100}{307} \doteq 0.33.$$

3. (a) $a = 1/3$.

$$(b) \text{ (skica) } p_X(x) = \begin{cases} 1/9, & x = -1; \\ 3/9, & x = 0; \\ 2/9, & x = 1; \\ 3/9, & x = 3; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1/9, & -1 \leq x < 0; \\ 4/9, & 0 \leq x < 1; \\ 6/9, & 1 \leq x < 3; \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

(c) $E(X) = 10/9$, $E(X^2) = 10/3$, $\text{var}(X) = 170/81 \doteq 2.10$, $\sigma(X) \doteq 1.45$.

(d) $\text{mod}(X) = \{0, 3\}$, $\text{med}(X) = 1$.

4. (a) $X \sim \text{Enak}(5)$, $E(X) = 3$.

(b) $X \sim \text{Bin}(3, 2/5)$, $E(X) = 6/5$.

(c) $X \sim \text{Geo}(2/5)$, $E(X) = 5/2$.

(d) $X \sim \text{HGeo}(3, 5, 2)$, $E(X) = 3 \cdot \frac{2}{5} = 6/5$.

(e) $X \sim \text{Ber}(0.4)$, $E(X) = 0.4$. (Število različnih barv pri vlečenju treh kroglic je lahko 2 ali 3. Če odštejemo 2, dobimo možni vrednosti 0 ali 1. Torej je $X \sim \text{Ber}(p)$, kjer je p verjetnost, da izvlečemo tri različne barve: $p = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{4}{10} = 0.4$.)

Verjetnost in statistika 2024/25

2. KOLOKVIJ, 16. JANUAR 2025

*Pišite s kemičnim svinčnikom. Odgovori morajo biti primerno utemeljeni.
Za reševanje imate na voljo 90 minut. Veliko uspeha!*

PRIIMEK IN IME: Vp. številka:

Dovoljena je uporaba osnovnega elektronskega računalna,
brez naprednih funkcij za grafiko, algebro in statistiko.

1. Vržemo 2 poštena kovanca. Kovance, na katerih je padla cifra, vržemo še enkrat. [5 točk]
Naj bo X število padlih grbov v prvem metu in Y število padlih grbov v drugem metu.
Zapišite porazdelitveno tabelo za par X, Y .
2. Diskretni slučajni spremenljivki sta podani s porazdelitveno tabelo [10 točk]

$X=x \setminus Y=y$	-1	0	1
1	0.1	0.3	0.2
2	0.0	0.1	0.3

- (a) Določite robni porazdelitvi za X in Y . [2t]
 - (b) Ali sta X in Y neodvisni? [1t]
 - (c) Izračunajte $E(X)$ in $E(Y)$. [2t]
 - (d) Izračunajte $E(XY)$, $E(X^2)$ in $E(Y^2)$. [3t]
 - (e) Izračunajte kovarianco in korelacijo $\rho(X, Y)$. [2t]
3. Zvezna slučajna spremenljivka X ima gostoto [15 točk]

$$f_X(x) = \begin{cases} 2cx^2, & 0 \leq x < 1, \\ c(3-x), & 1 \leq x < 3, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

- (a) Določite vrednost konstante c . [3t]
 - (b) Skicirajte graf funkcije f_X . [2t]
 - (c) Določite $\text{mod}(X)$. [2t]
 - (d) Določite $E(X)$. [4t]
 - (e) Določite $\text{med}(X)$. [4t]
4. Test ima 100 vprašanj, vsako ima 5 možnih odgovorov, od katerih je pravilen le eden. [10 točk]
 - (a) Neki testiranec pri vsakem vprašanju obkroži naključen odgovor. Naj bo X število pravilnih odgovorov. Za kateri tip slučajne spremenljivke gre? Koliko pravilnih odgovorov lahko pričakuje? Z neenačo Čebiševa ocenite verjetnost, da zadane več kot 40 odgovorov.
 - (b) Statistika testiranj kaže, da je povprečen rezultat na testu $\mu = 58,2$ pravilnih odgovorov, standardni odklon je 8,5. Predpostavimo, da so rezultati (približno) normalno porazdeljeni. Kolišen delež testirancev je zbral vsaj 50 pravilnih odgovorov? Koliko pravilnih odgovorov potrebujemo, da se uvrstimo med 2,5% najuspešnejših?
 5. Za neodvisni slučajni spremenljivki naj velja $X \sim \text{Exp}(2)$ in $Y \sim U(-1, 1)$. [5 točk]
Izračunajte verjetnost $P(X + Y > 1)$.

Rešitev

$X=x \backslash Y=y$	0	1	2
0	1/16	1/8	1/16
1	1/4	1/4	0
2	1/4	0	0

2. (a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$.

(b) Nista neodvisni, saj na primer $P(X = 1, Y = 1) = 0.2$ ni enako $P(X = 1)P(Y = 1) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$.

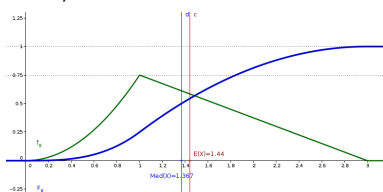
(c) $E(X) = 1.4, E(Y) = 0.4$.

(d) $XY \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ in $E(XY) = 0.7$.

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ in $E(X^2) = 2.2, Y^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ in $E(Y^2) = 0.6$.

(e) $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.14. \sigma(X) \doteq 0.49, \sigma(Y) \doteq 0.33, \rho(X, Y) \doteq 0.87$.

3. (a) $c = 3/8$.



(b)

(c) $\text{Mod}(X) = 1$ (preberemo z grafa).

(d) $E(X) = 23/16 \doteq 1.44$.

(e) $\text{med}(X) = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{6} \doteq 1.37$. (Iz grafa razberemo, da mediana leži na intervalu od 1 do 3, zato določimo a z lastnostjo $\int_a^3 c(3-x)dx = 1/2$, kar se spremeni v kvadratno enačbo za a .)

4. (a) Velja $X \sim \text{Bin}(100, 0.2)$, torej je $E(X) = 20$ in $\text{var}(X) = 16$. Testiranec lahko pričakuje 20 pravih odgovorov. Po Čebiševu je $P(|X - 20| \geq a) \leq \frac{16}{a^2}$. Za $a = 21$ sledi

$$P(X \geq 41) = P(X - 20 \geq 21) = P(|X - 20| \geq 21) \leq \frac{16}{21^2} = 0.036.$$

(b) Opazujemo normalno slučajno spremenljivko X s povprečjem 58.2 in standardnim odklonom $\sigma = 8.5$. Skiciramo graf in po pravilu 68 – 95 – 99.7 razberemo $P(X \geq 50) \doteq P(X > \mu - \sigma) = 0.34 + 0.50 = 0.84$ in $P(X \geq 76) = P(X > \mu + 2\sigma) = 0.025$.

5. Vemo, da velja $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ in $f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$

Zaradi neodvisnosti velja $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-2x}; & x \geq 0, -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

Skiciramo območje integracije, ki ga omejujejo premice $x = 0, y = -1, y = 1$ in $y = 1 - x$. Sledi

$$P(X + Y > 1) = 1 - P(X + Y \leq 1) = 1 - \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=-1}^{1-x} e^{-2x} dy \right) dx = 1 - \frac{e^{-4} + 3}{4} \doteq 0.755.$$

