



Jože Berk, Jana Draksler in Marjana Robič

Skrivnosti števil in oblik

Učbenik za matematiko
v 9. razredu osnovne šole

9

ROKUS

Klett

Jože Berk, Jana Draksler in Marjana Robič

Skrivnosti števil in oblik

9

Jože Berk, Jana Draksler in Marjana Robič

Skrivnosti števil in oblik 9

Učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole

Urednika: Vasja Kožuh (1. izdaja), Miloš Kovič (2. izdaja)

Recenzent: mag. Gregor Pavlič, Ema Maver

Strokovni pregled (1. izdaja): Magda Albreht, Nataša Centa, Nives Mihelič Erbežnik, Cvetka Tanjšek, Magdalena Tanko in Stane Arh

Jezikovni pregled: Tea Mejak, Tjaša Škrinjar

Ilustracije: Iztok Sitar, Sandi Milič (tehnične risbe)

Stripi: Vasja Kožuh (ideja, besedilo) in Iztok Sitar (risba)

Fotografije: Shutterstock, iStockphoto, Bridgeman Art Library, arhiv Založbe Rokus Klett



Vse knjige in dodatna gradiva Založbe Rokus Klett
dobite tudi na naslovu www.knjigarna.com.

Učbenik Skrivnosti števil in oblik 9 je Strokovni svet RS za splošno izobraževanje na svoji 161. seji, dne 19. 12. 2013, s sklepom št. 613-1/2013/143, potrdil kot e-učbenik za matematiko za 9. razred osnovne šole.

© Založba Rokus Klett, d. o. o. (2005). Vse pravice pridržane.

Brez pisnega dovoljenja založnika so prepovedani reproduciranje, distribuiranje, javna priobčitev, predelava ali druga uporaba avtorskega dela ali njegovih delov v kakršnem koli obsegu in postopku, kot tudi fotokopiranje, tiskanje ali shranitev v elektronski obliki. Tako ravnanje pomeni, razen v primerih od 46. do 57. člena Zakona o avtorski in sorodnih pravicah, kršitev avtorske pravice.



Založba Rokus Klett, d. o. o.
Stegne 9 b, 1000 Ljubljana
telefon: 01 513 46 00
telefaks: 01 513 46 99
e-naslov: rokus@rokus-klett.si
www.rokus-klett.si

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.2)(0.034.2)

BERK, Jože

Skrivnosti števil in oblik 9. [Učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole]
[Elektronski vir] / Jože Berk, Jana Draksler in Marjana Robič ; [ilustracije Iztok Sitar, Sandi Milič (tehnične risbe)] ; stripi Vasja Kožuh (ideja, besedilo), Iztok Sitar (risba) ; fotografije Shutterstock ... et al.]. - 1. elektronska izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Rokus Klett, 2014

ISBN 978-961-271-458-1
1. Draksler, Jana 2. Robič, Marjana
274480384

Mozaik

Iz dneva v dan, v znamenjih zvezd,
čas se lenobno vlačí
v zmerom ožjih zavojih spiralnih cest -
kot tista prastara, neskončna povest
o nečem in o jari kači.

Iz dneva v dan samo hotenje,
nobene slike, le drobci slik,
le pisani kamenčki za mozaik,
ki čas jih zloži v neharmoničen lik
in spodaj zapiše: življenje.

Janez Menart

Drage učenke in učenci!

Še zadnjič vas bosta v osnovnošolskih klopih spremljala Špela in Rok ter vas na svojih avanturah seznanjala z matematičnimi zakonitostmi.

Pot vas bo tudi tokrat vodila skozi strip, ilustrirane zgodbe, v katerih je podan matematični problem, skozi rešene primere in naloge za vajo. V rubriki Nekoč in danes, ki je bogato opremljena s fotografijami, boste spoznavali zgodovinske osnove matematike in njeno uporabo v vsakdanjem življenju. Nova znanja boste samostojno odkrivali tudi ob pomoči navodil v delovnem zvezku in jih preverili v preizkusih.

Ko se boste ob koncu šolskega leta poslavljali od osnovnošolskih klopi, naj vam bo znanje, ki ste ga osvojili na »matematičnem potepanju« s Špelo in Rokom, dobra popotnica za uspešno nadaljevanje življenjske poti.

Avtorji

1 Izrazi	8
1 Ponovitev računanja z algebrskimi izrazi	10
2 Kvadrat dvočlenika	12
3 Produkt vsote in razlike dveh enakih členov	17
4 Razstavljanje izrazov	21
5 Algebrski ulomki	24
6 Računanje z algebrskimi ulomki	27
Špela se preizkusi	30
2 Enačbe	32
1 Linearne enačbe	34
a Rešitve linearne enačbe	40
b Enačbe z oklepaji	42
c Enačbe z ulomki	47
č Neenačbe	50
d Izražanje neznanih količin iz formul	52
2 Uporaba enačb pri reševanju besedilnih nalog	55
a Naloge o številih	56
b Naloge o starosti	61
c Naloge iz geometrije	65
č Naloge iz vsakdanjika	70
d Naloge o gibanju	74
3 Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama	78
4 Algebrske enačbe – enačbe z neznanko v imenovalcu	82
Špela se preizkusi	86
3 Sorazmerje in podobnost	88
1 Razmerje količin	90
2 Sorazmerje	94
3 Premo sorazmerje	97
4 Obratno sorazmerje	100
5 Besedilne naloge iz razmerja in sorazmerja	103
6 Razmerje dolžin daljic	106
7 Podobnost	109
8 Podobni trikotniki	113
Špela se preizkusi	121
4 Geometrijska telesa	124
1 Odnosi med geometrijskimi elementi v prostoru	126
2 Geometrijska telesa	136
3 Prizma	139
4 Valj	150
5 Piramida	155
6 Stožec	164
7 Krogla	170
8 Vrtenine	174
Špela se preizkusi	177

5 Funkcija	180
1 Številska premica in koordinatni sistem	182
2 Odvisnost dveh količin; funkcija	188
3 Linearna funkcija	193
4 Graf linearne funkcije	195
Špela se preizkusi	202
 6 Obdelava podatkov	 204
1 Srednje vrednosti	206
2 Verjetnost	213
3 Vprašalniki in empirična preiskava	221
 Matematika v vsakdanjem življenju	 229
 Špela na cilju	 233

Kako uporabljati učbenik?

grafična vodila



rešeni
primeri



naloge
za vajo



pozor



pomni



namig



pojdi
v delovni zvezek

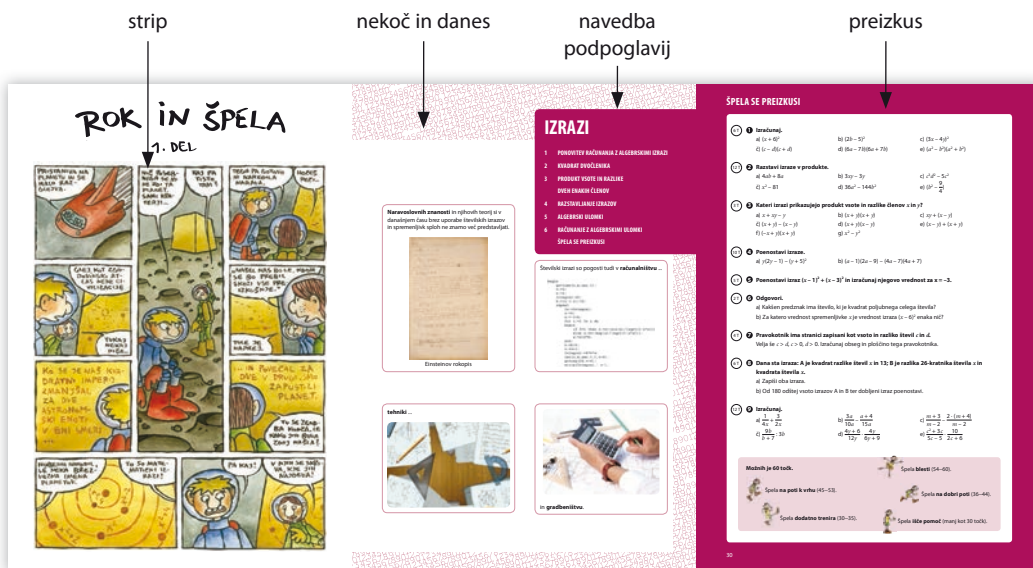


uporabi
žepno računalno

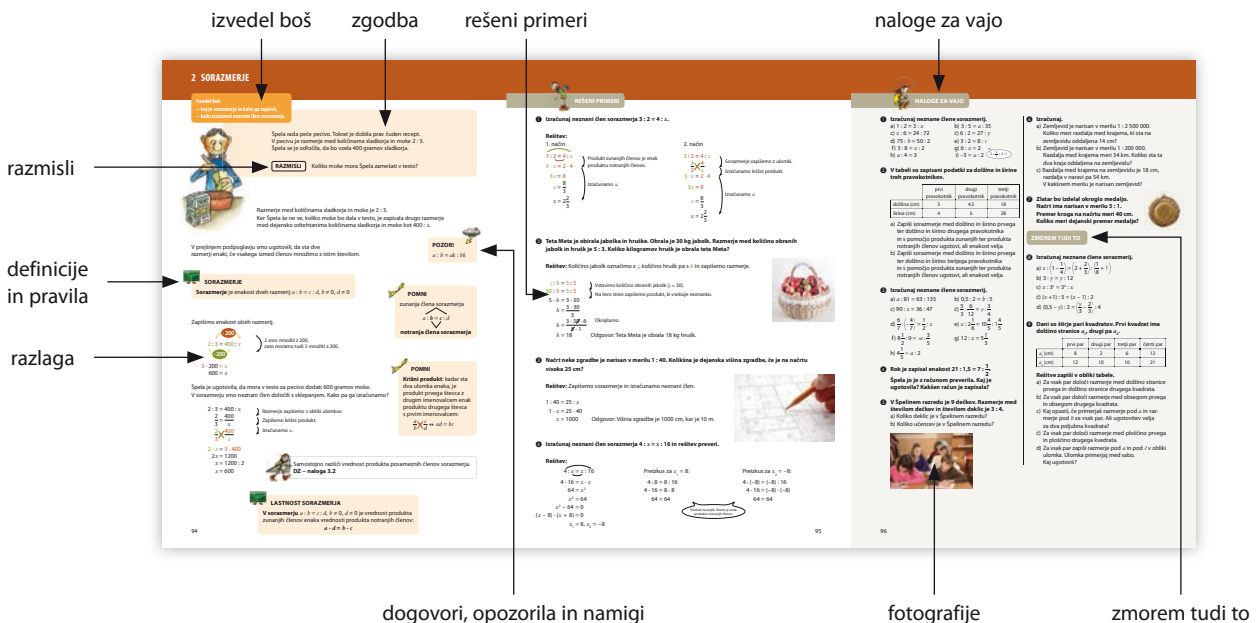


uporabi
računalnik

zgradba poglavja

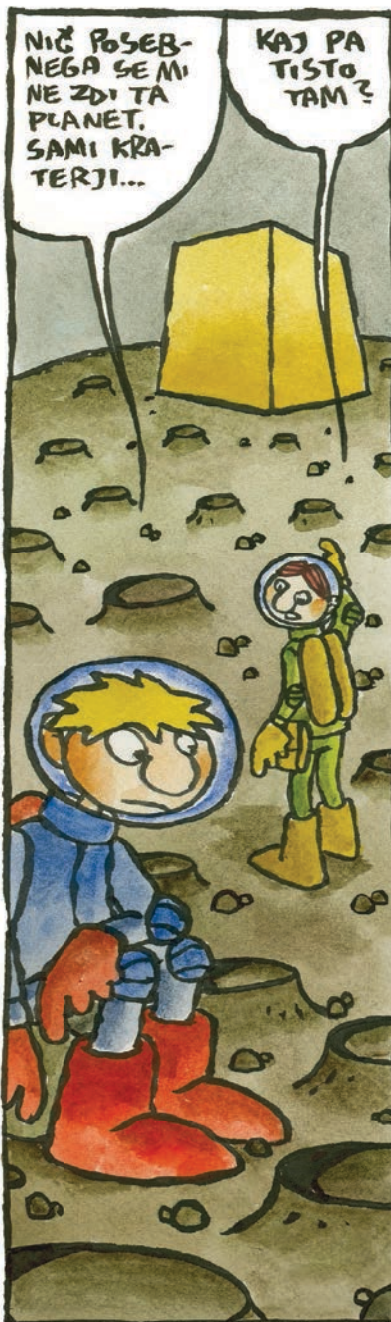


zgradba podpoglavja



ROK IN ŠPELA

1. DEL



NEKOČ IN DANES

Stari Grki so nauk o številih in računanje z njimi imenovali **arimetika**. V Grčiji je prvi znani algebrski zapis pripravil **Diofant iz Aleksandrije**, ki je uporabljal črke za preglednejši in krajši zapis.

Veja matematike, ki vključuje računanje s spremenljivkami, se imenuje **algebra**. Ime izvira iz naslova knjige arabskega matematika Mohameda ibn Muse al Hvarizmija »Al džebr v'almukabala«, kar pomeni dopolnjevanje in izenačevanje.

Algebra se je v zahodnem svetu zelo močno razširila v 17. stoletju. Znani matematik tega obdobja **René Descartes** je znane količine označeval z začetnimi črkami abecede (npr. a, b, c), neznane količine pa z zadnjimi črkami (x, y, z), kar je v veljavi še danes.

Kitajci so prvi razvili sistem reševanja algebrskih enačb, pri katerem so komponente enačbe razvrstili v kvadratno, šahovnici podobno shemo.

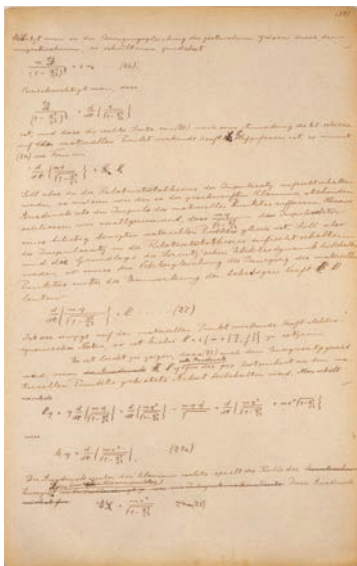


CB parallele a GA, & pourceque CB & BA sont deux quantités indeterminées & inconnues, ie les nomme l'une y & l'autre x. mais affin de trouver le rapport de l'une à l'autre; ie confidere aussy les quantités connues qui determinent la description de cete ligne courbe, comme GA que ie nomme a, KL que ie nomme b, & NL parallele a GA que ie nomme c. puis ie dis, comme NL est à LK, ou c à b, ainsi CB, ou y, est à BK, qui est par consequent $\frac{b}{c}y$: & BL est $\frac{b}{c}y - b$, & AL est $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C Beft à LB, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainsi a, ou GA, est à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que multipliant

IZRAZI

- 1 PONOVITEV RAČUNANJA Z ALGEBRSKIMI IZRAZI
 - 2 KVADRAT DVOČLENKA
 - 3 PRODUKT VSOTE IN RAZLIKE
DVEH ENAKIH ČLENOV
 - 4 RAZSTAVLJANJE IZRAZOV
 - 5 ALGEBRSKI ULOMKI
 - 6 RAČUNANJE Z ALGEBRSKIMI ULOMKI
- ŠPELA SE PREIZKUSI

Naravoslovnih znanosti in njihovih teorij si v današnjem času brez uporabe številskih izrazov in spremenljivk sploh ne znamo več predstavljati.

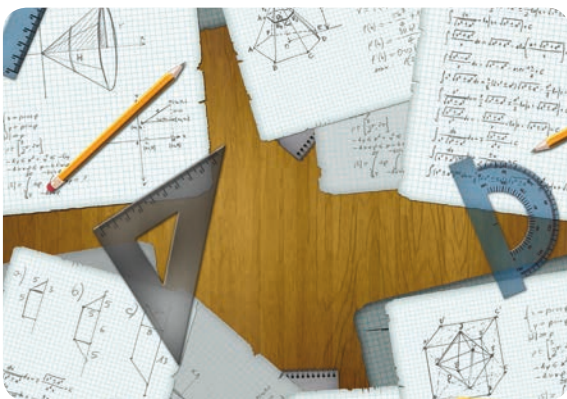


Einsteinov rokopis

Številski izrazi so pogosti tudi v računalništvu ...

```
begin
  gettime(u,m,sec,t);
  v:=0;
  n:=1;
  Integral:=0;
  h:=(1-(-1))/2;
  repeat
    Is:=Integral;
    s:=0;
    x:=-1+h;
    for i:=1 to n do
      begin
        if f=1 then s:=s+(sin(x)/(sqrt(1-x*x)))
        else s:=s+(exp(x)/(sqrt(1-x*x)));
        x:=x+2*h;
      end;
    h:=h/2;
    v:=v+1;
    Integral:=4*h*s;
    cas(u,m,sec,t,1,v+6);
    gotoxy(28,v+6);
    write(Integral,' ');
  end;
```

tehniki ...



in gradbeništvu.

Seštevanje in odštevanje

Seštevamo in odštevamo le enočlenike, ki se razlikujejo le v koeficientu.

$$4a - 2b + 3a - 6b = \underline{4a} - 2b + \underline{3a} - 6b = \underline{7a} - 8b$$

Združimo podobne enočlenike in izračunamo.

$$2x + (3x - 5) = 2x + 3x - 5 = 5x - 5$$

Odpravimo oklepaje: če je pred oklepajem +, se predznaki znotraj oklepaja ohranijo.

$$5x - (2x - 7) = 5x - 2x + 7 = 3x + 7$$

Odpravimo oklepaje: če je pred oklepajem -, se predznaki znotraj oklepaja spremenijo.

Množenje veččlenika z enočlenikom

$$a \cdot (b + c) = \underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$$

$$2x \cdot (3 - 2x + 4y) = \underline{2x} \cdot (\underline{3} - \underline{2x} + \underline{4y}) = \underline{2x} \cdot \underline{3} - \underline{2x} \cdot \underline{2x} + \underline{2x} \cdot \underline{4y} = 6x - 4x^2 + 8xy = -4x^2 + 6x + 8xy$$

Vsak člen veččlenika pomnožimo z enočlenikom.

Množenje veččlenikov

$$(a + b)(c + d) = \underline{ac} + \underline{ad} + \underline{bc} + \underline{bd}$$

$$\begin{aligned} (x - 6)(y + 4) &= (\underline{x} - \underline{6})(\underline{y} + \underline{4}) = \\ &= \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{4} + \underline{(-6)} \cdot \underline{y} + \underline{(-6)} \cdot \underline{4} = \\ &= xy + 4x - 6y - 24 = \\ &= 4x - 6y + xy - 24 \end{aligned}$$

Vsak člen drugega veččlenika pomnožimo z vsakim členom prvega veččlenika.

$$\begin{aligned} (3x + 2)(2x + 3y - 1) &= \\ &= (3x + 2)(2x + 3y - 1) = \\ &= 3x \cdot 2x + 3x \cdot 3y + 3x \cdot (-1) + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 3y + 2 \cdot (-1) = \\ &= 6x^2 + 9xy - 3x + 4x + 6y - 2 = \\ &= 6x^2 + 9xy + x + 6y - 2 \end{aligned}$$



NALOGE ZA VAJO

- 1 Izpiši enočlenike in jim določi koeficiente.

$$-5x^3 + 1, y^2, 7 - a^2, 2b^3, -3a, \frac{x}{3}, -d, 15 - x.$$

Enočlenik	
Koeficient	

- 2 Prva palica je dolga a metrov. Druga palica je x -krat tako dolga kot prva palica. Z algebrskim izrazom zapiši dolžino druge palice.

- 3 Izračunaj produkte.

a) $2a \cdot 5b^2$ b) $4d \cdot (-1)d$
 c) $2x^3 \cdot xy^2$ č) $5a^2b \cdot (-4)ab^2$
 d) $\frac{1}{2}f \cdot 6g$ e) $0,4x^3 \cdot 8xy^2$
 f) $(2ab^2)^3 \cdot 5a$

- 4 Izpostavi skupni faktor.

a) $8ab - 7bc$ b) $15a + 20b$
 c) $6x^2 - 18xy$ č) $24x^4 - 16x^2$
 d) $9a^2b - 12ab + 15ab^3$

- 5 Izpostavi skupni faktor iz izraza $3x^2y - 6xy^2$ in izračunaj vrednost izraza za $x = -2, y = 3$.

- 6 Poenostavi izraz.

a) $5xy - 7 + 2 - 3xy$ b) $5a^2 - 9a^2 + a^2$
 c) $3m - 6n + 4 - m + 2n - 1$
 č) $2a + 3b - (-4a)$ d) $3x - y - (2x + y)$
 e) $-5v + (4t + 7v)$ f) $c + (3c - 2d) - 5d$
 g) $(3a - 4b) + (a - 7b)$ h) $a - (2b - 3) - (3a - 5b)$
 i) $\frac{3}{4}y - 0,5y + y - \frac{1}{3}y$ j) $y - (3y - (y - 2y) + y)$

- 7 Izračunaj produkte.

a) $6(x - y)$ b) $3a(2x - 1)$
 c) $-7x(2x + 4)$ č) $(3a + 5b) \cdot (-4)$
 d) $(7x + 3x^2) \cdot x^3$ e) $xy^2(x^2 - 5)$
 f) $(b - 2)(b + 3)$ g) $(-x + 3)(2x - 4)$
 h) $(a + 9b)(b + 2a)$ i) $(4x - 3y)(2x + 5y)$
 j) $(c - d)(3c - 4d)c$

- 8 Poenostavi izraze.

a) $3(a - b) + 4b$ b) $2y(x - 1) - 4x(1 - y)$
 c) $(m + 6)(m - 4) - m$
 č) $(t - 7)(t + 9) - (t + 6)(t - 10)$
 d) $\frac{1}{2}a(a - 8b) - a^2$
 e) $\frac{3}{4}x(8x - 4y) - (0,8x^2 + \frac{1}{2}y)$

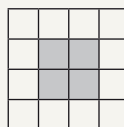
- 9 Poenostavi izraze in izračunaj vrednosti za dane vrednosti spremenljivk.

a) $7a - (5a - 4) + (3a - a^2)$ za $a = \frac{1}{2}$
 b) $(x - 3) \cdot x - 2x(x + 3) + (x + 1) \cdot (-x)$ za $x = -2$
 c) $(n + 2)(n - 7) - (n - 1)(n + 2) - n^2$ za $n = 5$

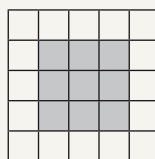
- 10 Kvadrat 3×3 vsebuje 1 siv in 8 belih kvadratkov.



Kvadrat 4×4 vsebuje 4 sive in 12 belih kvadratkov.



Kvadrat 5×5 vsebuje 9 sivih in 16 belih kvadratkov.



Po istem vzorcu nadaljujemo. Razišči število majhnih kvadratkov sive in bele barve in dopolni spodnjo tabelo. Zapiši tudi algebrski izraz.

	Število sivih ploščic	Število belih ploščic	Skupno število ploščic
Kvadrat 3×3	1	8	9
Kvadrat 4×4			
Kvadrat 5×5			
Kvadrat 6×6			
Kvadrat 7×7			
Kvadrat 8×8			
Kvadrat 9×9			
Kvadrat $n \times n$	$(n - 2)^2$		

ZMOREM TUDI TO

- 11 Osnovnica enakokrakega trikotnika meri $2x + 1$, krak meri $2x + 3$, višina na osnovnico pa $2x + 2$.

a) Izračunaj obseg trikotnika. b) Izračunaj ploščino trikotnika.

- 12 Romba imata stranici $a - 2$ in $a + 3$. Za koliko se razlikujeta njuna obsega?

- 13 Diagonali deltoida merita $2y - 4$ in $2y + 5$. Izračunaj ploščino tega deltoida.

- 14 Najprej zapiši izraz po besedilu, nato ga poenostavi in reši.

a) Trikratnik števila a , zmanjšan za 4, pomnoži s petkratnikom števila a , povečanim za 1. Katere število dobiš?
 b) Od osemkratnika števila a odštej trikratnik razlike števil b in a . Dobljeno število pomnoži s trikratnikom vsote a in b . Katere število dobiš?

1 KVADRAT DVOČLENIKA

Izvedel boš:
— kako kvadriraš dvočlenik.

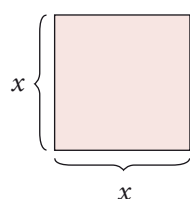


Rok je predvideval, da bo iz kvadratnega testa, ki ga je razvaljala Špela, dobil premalo piškotov, zato je testo razvaljal še enkrat in ga povečal za 3 enote v obeh smereh.

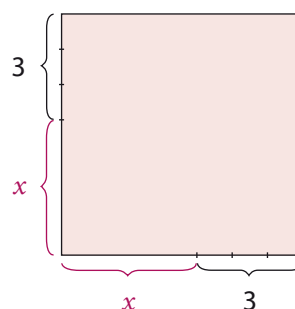
RAZMISLI

Za koliko se je povečala ploščina testa?

Če stranico Špelinega kvadrata označimo z x , je stranica Rokovega kvadrata $x + 3$.



Špelino testo



Rokovo testo

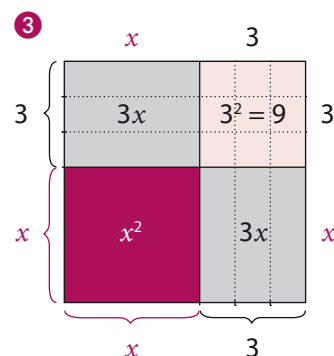
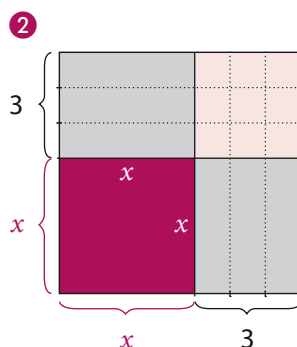
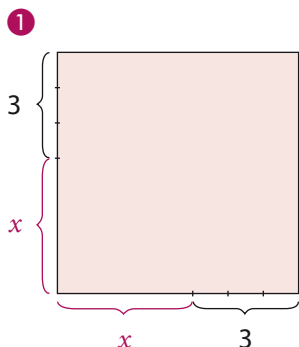


Razišči ploščine kvadratov, ki imajo stranico označeno z dvočlenikom.

DZ – naloga 1.1

Odgovor poiščimo grafično.

- 1 Narišimo Rokov kvadrat s stranico $x + 3$.
- 2 Razdelimo ga na manjše pravokotnike in kvadrate, kot kaže slika.
- 3 Določimo ploščine označenih pravokotnikov in kvadratov.



$$p = x^2 + \underbrace{3x + 3x + 9}_{6x}$$

Iz slike vidimo, da je ploščina Rokovega kvadrata $x^2 + 6x + 9$.

Ploščina Rokovega kvadrata je torej za $6x + 9$ večja od ploščine Špelinega kvadrata.

Nalogo rešimo še računsko.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Kvadrat dvočlenika zapišemo tudi kot produkt dvočlenika s samim seboj in ga izračunamo po pravilu za množenje veččlenikov:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + \underbrace{3x + 3x}_{6x} + 9 = x^2 + 6x + 9$$



KVADRAT DVOČLENIKA

Kvadrat dvočlenika izračunamo tako, da dvočlenik množimo s samim seboj – tako dobimo formulo

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kvadrat dvočlenika je vsota treh členov: kvadrata prvega člena, dvakratnika produkta prvega in drugega člena ter kvadrata drugega člena.

b	ab	b ²
	a ²	ab
a	a	b



REŠENI PRIMERI

1 Izračunaj kvadrat dvočlenika $a - 3$.

Rešitev:

1. način: Rešitev določimo tako, da izračunamo produkt dveh enakih dvočlenikov.

$$\begin{aligned} (a - 3)^2 &= (a - 3)(a - 3) = \\ &= a \cdot a + a \cdot (-3) + (-3) \cdot a + (-3) \cdot (-3) = \\ &= a^2 - 3a - 3a + 9 = \\ &= a^2 - 6a + 9 \end{aligned}$$

2. način: Rešitev določimo po pravilu za kvadrat dvočlenika.

$$\begin{aligned} (a - 3)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3) + (-3)^2 \\ &= a^2 - 6a + 9 \end{aligned}$$

POZOR!

Pri množenju pazimo na predznake.



POMNI

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

(1. člen)² + 2 · (1. člen) · (2. člen) + (2. člen)²

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

(1. člen)² - 2 · (1. člen) · (2. člen) + (2. člen)²

2 Izračunaj $(3x + 7)^2$.

Rešitev:

1. način: kvadrat dvočlenika zapišemo kot produkt dvočlenika s samim seboj in ustrezno množimo.

$$\begin{aligned}(3x + 7)^2 &= (3x + 7)(3x + 7) = \\ &= 3x \cdot 3x + 3x \cdot 7 + 7 \cdot 3x + 7 \cdot 7 = \\ &= 9x^2 + 21x + 21x + 49 = \\ &= 9x^2 + 42x + 49\end{aligned}$$

2. način: kvadrat dvočlenika izračunamo po pravilu $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$$\begin{aligned}(3x + 7)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 7 + 7^2 = \\ &= 9x^2 + 42x + 49\end{aligned}$$

3 Dan je izraz $(2x - 4)^2 - 3x(x - 8)$.

a) Poenostavi izraz.

b) Izračunaj vrednost poenostavljenega izraza za $x = -\frac{1}{2}$.

Rešitev:

a) Izraz poenostavimo tako, da izračunamo kvadrat dvočlenika in produkt enočlenika z dvočlenikom, nato pa izraz skrajšamo.

Pozor: minus pred oklepajem

$$\begin{aligned}(2x - 4)^2 - 3x(x - 8) &= \\ &= 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 + 24x = \\ &= x^2 + 8x + 16\end{aligned}$$

b) Vrednost skrajšanega izraza izračunamo tako, da namesto spremenljivke x vstavimo vrednost $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}x^2 + 8x + 16 &= \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) + 16 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{2} + 16 = \\ &= \frac{1}{4} - 4 + 16 = \\ &= 12\frac{1}{4}\end{aligned}$$

4 Zapiši in izračunaj:

a) kvadrat vsote 3 in $5y$

b) vsoto kvadratov 3 in $5y$

Rešitev:

a) $(3 + 5y)^2 = 9 + 30y + 25y^2$

b) $3^2 + (5y)^2 = 9 + 25y^2$



POZOR!

Kvadrat vsote ni enak vsoti kvadratov.
 $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

5 Od vsote števil b in 6 odštej kvadrat vsote števil $2b$ in 6.

Rešitev: Zapišimo izraz po besedilu in ga poenostavimo.

$$\begin{aligned} &= (b + 6) - (2b + 6)^2 \\ &= b + 6 - (4b^2 + 24b + 36) = \\ &= \underline{b} + \underline{6} - 4b^2 - \underline{24b} - \underline{36} = \\ &= -4b^2 - 23b - 30 \end{aligned}$$



POZOR!

Kadar je pred oklepajem $-$, vsem členom iz oklepaja spremenimo predznake.

6 Izraz $(5x^3 + 7yz^4)^2 - (5x^3 - 7yz^4)^2$ najprej poenostavi, nato pa izračunaj njegovo vrednost za $x = -1$, $y = \frac{1}{7}$, $z = \frac{1}{2}$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} &= (5x^3 + 7yz^4)^2 - (5x^3 - 7yz^4)^2 = \\ &= (25x^6 + 70x^3 yz^4 + 49 y^2 z^8) - (25x^6 - 70x^3 yz^4 + 49 y^2 z^8) = \\ &= \underline{25x^6} + 70x^3 yz^4 + 49 y^2 z^8 - \underline{25x^6} + 70x^3 yz^4 - \underline{49 y^2 z^8} = \\ &= 140x^3 yz^4 = \\ &= 140(-1)^3 \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ &= 140(-1) \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{16}\right) = \\ &= -\frac{20}{16} = \\ &= -\frac{5}{4} = \\ &= -1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Najprej kvadriramo oba dvočlenika.
- Ker je pred oklepajem $-$, vsem členom iz oklepaja spremenimo predznake.
- Člene združimo.
- Vstavimo vrednosti $x = -1$, $y = \frac{1}{7}$, $z = \frac{1}{2}$.



NAMIG

Kvadrat potence pravilno izračunamo $(x^3)^2 = x^6$.



NALOGE ZA VAJO

1 Izračunaj kvadrate dvočlenikov. Primere a, b, c in č ponazori še s ploščinami kvadratov.

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) $(x + 1)^2$ | b) $(a + 5)^2$ |
| c) $(b + 7)^2$ | č) $(d + 6)^2$ |
| d) $(d + 8)^2$ | e) $(c - 2)^2$ |
| f) $(m - 4)^2$ | g) $(k - 9)^2$ |
| h) $(2 + x)^2$ | i) $(3 - n)^2$ |
| j) $(5 - t)^2$ | k) $(o + v)^2$ |
| l) $(a - b)^2$ | m) $(-3 + s)^2$ |
| n) $(-v + 2)^2$ | o) $(-z - 4)^2$ |
| p) $(-x - y)^2$ | r) $(-10 - a)^2$ |

2 Zapiši pare tako, da k računu iz levega stolpca poiščeš ustrezen rešitev iz desnega stolpca.

- | | |
|-----------------|-------------------|
| a) $(x - 2)^2$ | 1) $x^2 + 4x + 4$ |
| b) $(x + 2)^2$ | 2) $x^2 + 4$ |
| c) $(2 - x)^2$ | 3) $x^2 - 2x + 4$ |
| č) $(-x - 2)^2$ | 4) $x^2 - 4x + 4$ |

3 Izračunaj kvadrate dvočlenikov.

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(2x + 1)^2$ | b) $(3x + 4)^2$ |
| c) $(3a - 2)^2$ | č) $(5d - 4)^2$ |
| d) $(3x + 2y)^2$ | e) $(4a - 6b)^2$ |
| f) $(3m - 6n)^2$ | g) $(-5k + 6m)^2$ |
| h) $(-2z - 7c)^2$ | i) $(x^2 - 1)^2$ |
| j) $(a^2 - b)^2$ | k) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ |
| l) $\left(4y - \frac{1}{4}\right)^2$ | m) $(2a^2 - 3b^2)^2$ |

4 Stranico kvadrata a smo povečali za 8 enot.

- Zapiši dvočlenik, ki ponazarja dolžino kvadrata.
- Izračunaj obseg kvadrata.
- Izračunaj ploščino kvadrata.

- 5 Špelini sošolci so pogosto delali napake pri računanju kvadrata dvočlenika. Oglej si zapise in ugotovi, pri katerem se niso zmotili.

- a) $(x + 11)^2 = x^2 + 11$
 b) $(x + 11)^2 = x^2 + 121$
 c) $(x + 11)^2 = x^2 + 11x + 121$
 č) $(x + 11)^2 = x^2 + 11x + 111$
 d) $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 121$
 e) $(x + 11)^2 = x^2 + 22x + 1111$
 f) $(x + 11)^2 = x^2 + 22 + 121x$

- 6 Prepiši v zvezek in dopolni.

- a) $(a + \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 144$
 b) $(x - \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 2xy + \underline{\hspace{1cm}}$
 c) $(\underline{\hspace{1cm}} - 3)^2 = 4b^2 - \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$
 č) $(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})^2 = 16 + 16a + \underline{\hspace{1cm}}$
 d) $(\underline{\hspace{1cm}} + c)^2 = 36 + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$
 e) $(5x - \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} - 10xy + \underline{\hspace{1cm}}$
 f) $(1 + \underline{\hspace{1cm}})^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + 49y^2$

- 7 Poenostavi izraze.

- a) $(x + 1)^2 - 5$
 b) $3x + (x - 3)^2$
 c) $2a - (a - 5)^2$
 č) $a + b - (a - b)^2$
 d) $x(x - 2) - (2x + 1)^2$
 e) $(3a - 2)^2 - 7(a - 2)$
 f) $(2b + 1)(b - 1) + (2b - 1)^2$
 g) $(4x - 2y)^2 + (x + y)(2x - 3y)$

- 8 Najprej poenostavi izraze in nato izračunaj njihovo vrednost za dano vrednost spremenljivke.

- a) $(x - 5)^2 + x^2$ za $x = \frac{1}{2}$
 b) $2a^2 - (2a - 1)^2$ za $a = 2$
 c) $y - 2 - (3 - 2y)^2$ za $y = -1$
 č) $b(b - 2) - (b - 3)^2$ za $b = -3$
 d) $(2x + 3y)(3x - 2y) + (2x + 3y)^2$ za $x = -2$
 za $y = 5$

- 9 Dan je kvadrat ABCD s stranico x . Po naslednjem pravilu rišemo nove kvadrate tako, da se oglišča $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ vedno prekrivajo. Dolžino stranice x povečujemo in narišemo nov kvadrat $A_1B_1C_1D_1$. Dolžino stranice x potrojimo in narišemo nov kvadrat $A_2B_2C_2D_2$. Dolžino stranice x pomnožimo s 4 in narišemo nov kvadrat $A_3B_3C_3D_3$.

- a) Nariši skico.
 b) Pripravi preglednico in vanjo zapiši dolžine stranic, obsege in ploščine za prvih deset gradnikov vzorca.
 c) Za koliko se razlikujeta dva sosednja obsega kvadratov iz vzorca?
 č) Za koliko se razlikujeta dve sosednji ploščini kvadratov iz danega vzorca?
 d) Zapiši dolžino stranice, obseg in ploščino za

16 136 gradnik vzorca.

- 10 Izračunaj kvadrate dvočlenikov.

- a) $(1,2a + 0,3b)^2$
 b) $(0,5x - 1,6y)^2$
 c) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^2$
 č) $\left(\frac{1}{4}a - 2\right)^2$
 d) $\left(3b + \frac{1}{3}\right)^2$
 e) $\left(-\frac{3}{4}m + \frac{3}{2}n\right)^2$
 f) $\left(-1\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b\right)^2$
 g) $-(3x + 7y)^2$
 h) $-(2a - 4b)^2$
 i) $-(xy - x)^2$

- 11 Ugotovi, katere dvočlenike smo kvadrirali.

- a) $x^2 - 14x + 49$
 b) $4a^2 + 20a + 25$
 c) $x^2 - 8x + 16$
 č) $9x^2 + 12xy + 4y^2$
 d) $36v^2 - 36vz + 9z^2$
 e) $16a^4 - 72a^2b + 81b^2$

- 12 Zapiši izraz po besedilu in ga poenostavi.

- a) K razliki števil $3x$ in 5 prištej kvadrat vsote števil $2x$ in 3.
 b) Od kvadrata števila 4 odštej kvadrat razlike števil $2a$ in 4.
 c) Od trikratnika števila y odštej polovico števila 10 in dobljeni dvočlenik kvadriraj.

- 13 Vsako stranico kvadrata t skrajšamo za 12 enot.

- a) Izračunaj obseg nastalega lika.
 b) Izračunaj ploščino nastalega lika.

ZMOREM TUDI TO

- 14 Poenostavi izraze.

- a) $-2 + 2(x - (x - 2)^2)$
 b) $3((1 - a)^2(a - 1) + 2(a + 3)^2)$
 c) $2(3(2b - 2)^2 - 1) - (4b - 4)^2(b - 4)$
 č) $(3xz - 2yz)^2 - (3xz + 2yz)^2$

- 15 Včasih so računali kvadrate poljubnega naravnega števila brez uporabe žepnega računalnika, po pravilu za kvadrat dvočlenika. Oglej si primera.

$$14^2 = (10 + 4)^2 = 100 + 80 + 16 = 196$$

$$999^2 = (1000 - 1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001$$

Na podoben način izračunaj kvadrate naravnih števil 199, 1999, 207, 2005. Rezultate preveri z žepnim računalom.



2 PRODUKT VSOTE IN RAZLIKE DVEH ENAKIH ČLENOV

Izvedel boš:

— kako izračunaš produkt vsote in razlike dveh enakih členov.

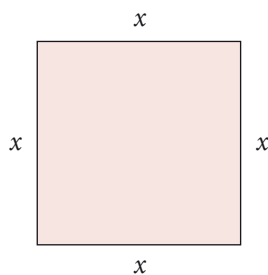
Pri selitvi je Špela izbirala med dvema sobama, kvadratno in pravokotno. Pravokotna je imela eno stranico 3 enote krajšo od kvadratne in drugo 3 enote daljšo od kvadratne.

RAZMISLI

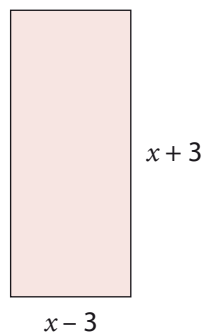
Katera soba ima večjo ploščino?



Če stranice kvadrata označimo z x , sta stranici pravokotnika dvočlenika $x - 3$ in $x + 3$.



kvadratna soba



pravokotna soba

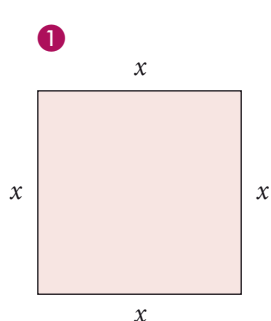


Razišči ploščine pravokotnikov, ki imajo za stranice vsoto dveh členov in razliko istih dveh členov.

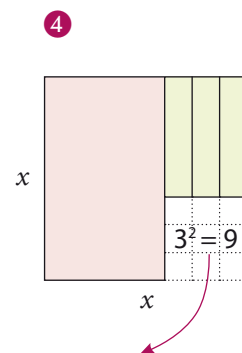
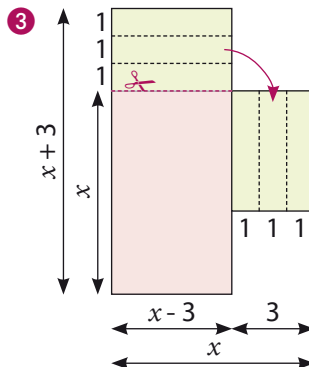
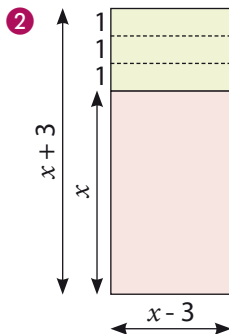
DZ – naloga 1.2

Odgovor poiščimo grafično.

- 1 Najprej narišimo kvadrat s stranico x .
- 2 Iz kvadrata narišimo pravokotnik, ki ima dolžino $x - 3$ in širino $x + 3$.
- 3 Pravokotnik poskusimo preoblikovati v kvadrat s stranico x .
- 4 Do ploščine celotnega kvadrata s stranico x manjka ravno ploščina malega kvadrata, torej 9 enot.



Ploščina prvotnega večjega kvadrata je x^2 .



Ploščina manjkajočega kvadrata je 9 enot.

Iz slike vidimo, da je ploščina iskanega pravokotnika $x^2 - 9$, torej ima pravokotna soba manjšo ploščino.

Nalogo rešimo še računsko.

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

Rezultat dobimo tako, da od **kvadrata 1. člena** odštejemo **kvadrat 2. člena**. Računamo lahko tudi po pravilu za množenje dvočlenika z dvočlenikom.

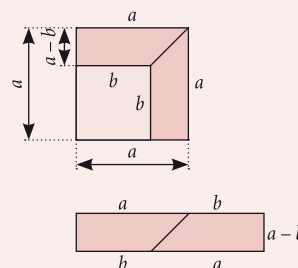
$$\begin{aligned}(x+3)(x-3) &= x \cdot x + x \cdot (-3) + 3 \cdot x + 3 \cdot (-3) = \\ &= x^2 - 3x + 3x - 9 = \\ &= x^2 - 9\end{aligned}$$



PRODUKT VSOTE IN RAZLIKE DVEH ENAKIH ČLENOV

Produkt vsote in razlike dveh enakih členov je poseben primer množenja dveh dvočlenikov. Rezultat je razlika kvadratov prvega in drugega člena.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



REŠENI PRIMERI

1 Izračunaj produkt dvočlenikov $a+4$ in $a-4$.

Rešitev:

1. način: množimo po pravilu za množenje dvočlenikov.

$$\begin{aligned}(a+4)(a-4) &= \\ &= a \cdot a + a \cdot (-4) + 4 \cdot a + 4 \cdot (-4) = \\ &= a^2 - 4a + 4a - 16 = \\ &= a^2 - 16\end{aligned}$$

Nasprotni števili:
vsota je 0.

→ Pri množenju pazimo na predznake.

→ Vsota drugega in tretjega člena je nič.

2. način: produkt določimo po pravilu za produkt vsote in razlike dveh enakih členov.

$$\begin{aligned}\text{1. člen} \quad \text{2. člen} \\ (a+4)(a-4) &= \\ &= a^2 - 4^2 = \\ &= a^2 - 16\end{aligned}$$



NAMIG

$-4a + 4a = 0$,
ker je $-4 + 4 = 0$
nasprotni števili



POZOR!

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

(1. člen)² - (2. člen)²

Najprej preverimo, ali imamo res zapisan produkt vsote in razlike dveh enakih členov.

2 Izračunaj $(3x + 7)(3x - 7)$.

Rešitev:

1. način: množimo po pravilu za množenje veččlenikov in nato skrčimo.

$$\begin{aligned} & (3x + 7)(3x - 7) = \\ & = 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-7) + 7 \cdot 3x + 7 \cdot (-7) = \\ & = 9x^2 - 21x + 21x - 49 = \\ & = 9x^2 - 49 \end{aligned}$$

2. način: produkt določimo po pravilu

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

$$\begin{aligned} & (3x + 7)(3x - 7) = \\ & = (3x)^2 - 7^2 = \\ & = 9x^2 - 49 \end{aligned}$$

3 Poenostavi izraz $(x + 5)^2 - (x - 6)(x + 6)$, nato pa izračunaj njegovo vrednost za $x = -2$.

Rešitev:

Najprej izraz poenostavimo tako, da izračunamo kvadrat dvočlenika in produkt vsote in razlike dveh enakih členov.

$$\begin{aligned} & (x + 5)^2 - (x - 6)(x + 6) = \\ & = x^2 + 10x + 25 - (x^2 - 36) = \\ & = x^2 + 10x + 25 - x^2 + 36 = \\ & = 10x + 61 \\ & 10 \cdot (-2) + 61 = \\ & = -20 + 61 = \\ & = 41 \end{aligned}$$

Zaradi minusa pred oklepajem vse predznake znotraj oklepaja spremenimo.

Namesto spremenljivke x vstavimo -2 .
Izračunamo vrednost izraza.

4 Izračunaj $\frac{e \cdot f}{2}$, če je e vsota členov $2x$ in 6 , f pa razlika istih dveh členov.

Rešitev:

Najprej zapišimo e in f .

$$e = 2x + 6$$

$$f = 2x - 6$$

$$\begin{aligned} & = \frac{e \cdot f}{2} = \\ & = \frac{(2x + 6)(2x - 6)}{2} = \\ & = \frac{4x^2 - 36}{2} = \\ & = \frac{4(x^2 - 9)}{2} = \\ & = \frac{4 \cdot 2(x^2 - 9)}{2 \cdot 1} = \\ & = 2(x^2 - 9) = \\ & = 2x^2 - 18 \end{aligned}$$

Vstavimo podatke za e in f .

Množimo izraza v števcu.

Izpostavimo skupni faktor v števcu.

Okrajšamo števec in imenovalec.

**1 Izračunaj produkte vsote in razlike dveh enakih členov.**

- a) $(x+1)(x-1)$ b) $(a+5)(a-5)$
 c) $(b+7)(b-7)$ č) $(d-6)(d+6)$
 d) $(c-8)(c+8)$ e) $(9+m)(9-m)$
 f) $(10-k)(10+k)$ g) $(-x+1)(x+1)$
 h) $(-n+4)(n+4)$ i) $(-5+t)(5+t)$
 j) $(r-p)(r+p)$ k) $(x-z)(x+z)$

2 Izračunaj produkte vsote in razlike dveh enakih členov.

- a) $(2x+1)(2x-1)$ b) $(3a+2)(3a-2)$
 c) $(7t-3)(7t+3)$ č) $(5d-4)(5d+4)$
 d) $(3x+8y)(3x-8y)$ e) $(4a+6b)(4a-6b)$
 f) $(5m-9n)(5m+9n)$ g) $(3k-10m)(3k+10m)$
 h) $(-2z+1)(2z+1)$ i) $(x^2-1)(x^2+1)$
 j) $(3-y^2)(3+y^2)$ k) $(2a^2-3b^2)(2a^2+3b^2)$

3 V katerih primerih je zapisan produkt vsote in razlike dveh enakih členov?

- a) $(2a-3)(3+2a)$ b) $(-3b+2a)(+3b-2a)$
 c) $(3y-5)(3y-5)$ č) $(-5x-3y)(-5x+3y)$
 d) $(4m+7n)(4m+7n)$ e) $(-3+(-4x))(-3-(-4x))$

4 Poenostavi izraze.

- a) $(x-2)(x+2)-5$
 b) $3a+(a-6)(a+6)$
 c) $2y-(y+7)(y-7)$
 č) $(5a-2)(3a+2)+(2a+3)(2a-3)$
 d) $(3x+2)^2-(3x+2)(3x-2)$
 e) $6z^2-(2z+3)(2z-3)$
 f) $3(x-1)+(x-1)(x+1)$
 g) $(b-1)(b-2)-(b-1)(b+1)$
 h) $5m-(4-5m)-(5m+4)(5m-4)$
 i) $(x-5)(x+7)-(x+4)(x-4)$
 j) $(9x-4y)(9x+4y)-(9x+4y)^2$
 k) $(1,2a+0,3b)(1,2a-0,3b)$
 l) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)$
 m) $\left(-2\frac{1}{4}a-2\right)\left(-2\frac{1}{4}a+2\right)$
 n) $\left(\frac{1}{3}+3b\right)\left(\frac{1}{3}-3b\right)$
 o) $\left(-\frac{3}{4}m+\frac{2}{3}n\right)\left(-\frac{3}{4}m-\frac{2}{3}n\right)$
 p) $\left(-\frac{4}{3}m+\left(-\frac{2}{3}n\right)\right)\left(-\frac{4}{3}m-\left(-\frac{2}{3}n\right)\right)$

5 Najprej poenostavi izraze in nato izračunaj njihovo vrednost za dano vrednost spremenljivke.

- a) $(x+2)(x-2)+x^2$; $x=-\frac{2}{7}$
 b) $3a^2-(2a-1)(2a+1)$; $a=2$
 c) $y(y-2)-(3+2y)(3-2y)$; $y=\frac{1}{2}$
 č) $(2m-5)(2m+5)+(m-4)(2m+3)$; $m=-1$
 d) $(a-b)^2-(2a+2b)(2a-2b)$; $a=2$, $b=-2$
 e) $(5x+9y)(9y-5x)-(9y+5x)^2$; $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$

6 Zapiši izraz po besedilu in ga poenostavi.

- a) Razliko števil $3x$ in 5 pomnoži z vsoto istih dveh števil in dobljenemu produktu prištej kvadrat števila $5x$.
 b) Od števila 27 odštej produkt vsote in razlike števil $2a$ in $3b$.
 c) H kvadratu števila $2a+5$ prištej produkt razlike števil $-6a$ in 4 z vsoto istih dveh števil.
 č) Od trikratnika števila $-y$ odštej 5 in od dobljenega izraza odštej produkt vsote in razlike števil y^2 in -3 .

7 S katerim dvočlenikom moramo množiti dvočlenik $3x-7$, da dobimo $9x^2-49$?

ZMOREM TUDI TO

8 Iz kvadrata oblikujemo pravokotnik tako, da mersko število ene stranice kvadrata skrajšamo za 5, mersko število druge stranice pa podaljšamo za 5. Določi obseg in ploščino nastalega pravokotnika.**9 Ena osnovnica trapeza meri $x+6$, druga $x+10$, višina pa $x-8$. Izračunaj ploščino tega trapeza.****10 Pravokotnik ima dolžino $2a+6$, širina pa je za 12 manjša od dolžine.**

- a) Izračunaj obseg tega pravokotnika.
 b) Izračunaj ploščino tega pravokotnika.
 c) Izračunaj ploščino kvadrata, ki ima stranico enako diagonali prvotnega pravokotnika.

11 Razišči, kako se spreminja vrednost izraza $\frac{(2x+6)(2x-6)}{2}$, če prvi faktor povečujemo za 1, drugi faktor pa zmanjšujemo za 1.

3 RAZSTAVLJANJE IZRAZOV

Izvedel boš:

- kako razliko kvadratov preoblikuješ v produkt,
- kako izraz razstaviš na faktorje.

Špelino pisalno mizo, ki je imela obliko kvadrata, je mizar že pred leti predelal tako, da je v levem vogalu izrezal manjši kvadrat. Tokrat pa jo je prerezal in na novo spojil tako, da ima obliko pravokotnika in pri predelavi ni bilo odpadkov.

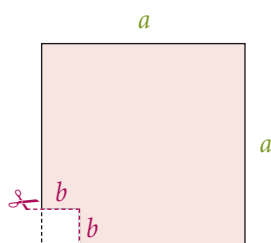
RAZMISLI

Kolikšna je bila ploščina pisalne mize po prvem preoblikovanju? Kolikšni sta stranici pravokotnika in kolikšna je ploščina pravokotnika?



Skicirajmo obe preoblikovanji in opazujmo ploščine.

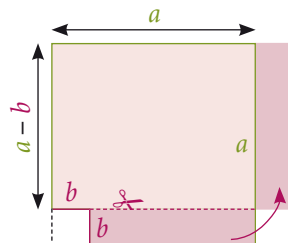
1 preoblikovanje



Ploščina po prvem preoblikovanju

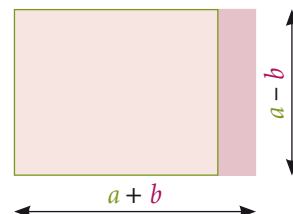
$$p = a^2 - b^2$$

2 preoblikovanje



Ploščina po drugem preoblikovanju

$$p = (a + b)(a - b)$$



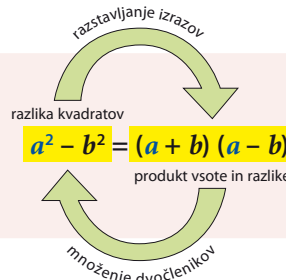
Ker pri drugem preoblikovanju nismo nič zavrgli, sta ploščini enaki in velja enakost

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$



RAZLIKA KVADRATOV

Razliko kvadratov dveh členov zapišemo kot produkt vsote in razlike dveh enakih členov – pravimo, da izraz razstavimo.

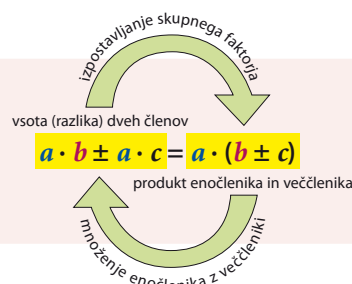


V 8. razredu smo z izpostavljanjem skupnega faktorja **vsoto** (**razliko**) preoblikovali v **produkt**.



IZPOSTAVLJANJE SKUPNEGA FAKTORJA

Če vsi členi veččlenika vsebujejo enak faktor, skupni faktor izpostavimo in tako vsoto (razliko) preoblikujemo v produkt.





RAZSTAVLJANJE ALGEBRSKIH IZRAZOV

Algebrske izraze razstavimo v produkt na dva načina:

1. Iz vsote ali razlike izpostavimo skupni faktor:

$$ab + ac = a(b + c) \quad ab - ac = a(b - c)$$

2. Razliko kvadratov razstavimo v produkt vsote in razlike dveh enakih členov:

$$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$$

Algebrske izraze razstavimo (faktoriziramo) v produkt še na druge načine.
Kako, pa boš izvedel v srednji šoli.



REŠENI PRIMERI

1 Izpostavi skupni faktor.

a) $14ab + 35b$

b) $18x^2y - 36xy^3$

c) $6x^3 - 18x^4$

Rešitev: a) $14ab + 35b = 7b(2a + 5)$

b) $18x^2y - 36xy^3 = 18xy(x - 2y^2)$

c) $6x^3 - 18x^4 = 6x^3(1 - 3x)$

2 Zapiši kot produkt.

a) $4x^2 - 81$

b) $x^4 - 25$

c) $y^2 - 0,04$

Rešitev:

a) $4x^2 - 81 = (2x)^2 - 9^2 =$

$= (\underline{\quad} + \underline{\quad})(\underline{\quad} - \underline{\quad}) =$

$= (2x + 9)(2x - 9)$

↳ Zapišemo prazne oklepaje in razmislimo.

↳ Na prvo mesto v oklepaju zapišemo kvadratni koren prvega člena, na drugo mesto pa kvadratni koren drugega člena.

b) $x^4 - 25 = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$

c) $y^2 - 0,04 = (y + 0,2)(y - 0,2)$



NAMIG

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$\sqrt{81} = 9$$

3 Katerega izmed izrazov lahko razstaviš v produkt v množici racionalnih števil $\mathbb{Q}$? Razstavi ga.

a) $x^2 + 36$

b) $x^2 - 36$

c) $x + 36$

č) $x - 36$

Rešitev:

V produkt lahko razstavimo samo izraz, zapisan pod točko b), saj je $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$.



POZOR!

Vsote kvadratov ne moremo razstaviti.
 $a^2 + 9 \neq (a + 3)(a - 3)$

4 Izraz $x^2 - 3$ razstavi v produkt v množici realnih števil $\mathbb{R}$.

Rešitev: $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$



POZOR!

$$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

- 5 Najprej razstavi izraz v števcu, nato pa ulomek $\frac{4x^2 - 144}{x - 6}$ okrajšaj.

Rešitev:

$$\begin{aligned} &= \frac{4x^2 - 144}{x - 6} = \\ &= \frac{(2x + 12)(2x - 12)}{x - 6} = \\ &= \frac{(2x + 12) \cdot 2 \cdot \cancel{(x - 6)}}{\cancel{x - 6}} = \\ &= \frac{(2x + 12) \cdot 2 \cdot (x - 6)}{x - 6} = \\ &= 2(2x + 12) = \\ &= 4x + 24 \end{aligned}$$

Najprej razstavimo števec.

V števcu iz člena $(2x - 12)$ izpostavimo 2.

V števcu in imenovalcu krajšamo faktorja $(x - 6)$.

Množimo in zapišemo rezultat.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Razstavi v produkt dveh dvočlenikov.

- | | |
|--|---------------------------|
| a) $x^2 - 1$ | b) $a^2 - 4$ |
| c) $b^2 - 16$ | č) $9 - d^2$ |
| d) $64 - x^2$ | e) $c^2 - d^2$ |
| f) $25m^2 - 49n^2$ | g) $144s^2 - 196r^2$ |
| h) $k^4 - 36$ | i) $\frac{1}{4}x^2 - 225$ |
| j) $0,16x^2 - 0,81y^2$ | k) $0,04 - 0,09s^2$ |
| l) $2\frac{1}{4}a^2 - 1\frac{7}{9}b^2$ | |

- 2 Katere enakosti so pravilne?

- a) $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$
 b) $a^2 - b^2 = (a - b)(a - b)$
 c) $c^2 - d^2 = (c - d)^2$
 č) $e^2 - f^2 = (e + f)(e - f)$
 d) $(m + n)(m - n) = -n^2 + m^2$
 e) $(s^2 + n^2)(s^2 - n^2) = s^2 - n^2$
 f) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = x^2 - 5$

- 3 Špela je zapisala produkt vsote in razlike istih dveh števil. Izračunala ga je, nato pa prištela $12x$ in 17 in dobila $49x^2 + 12x - 64$. Zapiši produkt, ki ga je zapisala Špela.

- 4 Najprej razstavi izraze v števcu ali imenovalcu, nato pa ulomke okrajšaj, če je mogoče.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ | b) $\frac{5}{x^2 - 25}$ |
| c) $\frac{15y - 5}{30y - 10}$ | č) $\frac{m^2 + 3m}{6 + 2m}$ |
| d) $\frac{b^2 - 4}{b^2 - 4b + 4}$ | e) $\frac{x^2 - 10xy + 25y^2}{x - 5y}$ |
| f) $\frac{a^2 - 81}{a + 3}$ | |

ZMOREM TUDI TO

- 5 Osnovnica in višina na osnovnico v enakokrakem trikotniku sta zapisani kot vsota in razlika dveh enakih členov. Ploščina meri $\frac{x^2}{2} - 18$. Izračunaj osnovnico in višino tega trikotnika.
- 6 Izraz $(x - 3)(x + 5) - (x + 4)(x - 4) + (x + 1)^2 - 2(2x + 3)$ skrči in nato rezultat razstavi.
- 7 Dana je pravokotna ploščica z dolžino $(2a + 2)$ in širino $(a - 1)$.
- a) Z osmimi danimi ploščicami oblikuj in nariši štiri različne pravokotnike.
- b) Za vsak pravokotnik izračunaj obseg.
- c) Za vsak pravokotnik izračunaj ploščino.

4 ALGEBRSKI ULOMKI

IZBIRNE
VSEBINE

Izvedel boš:

- kateri ulomki so algebrski ulomki,
- kako razširiš algebrski ulomek,
- kako krajšaš algebrski ulomek.



Pri igri s prijatelji je Špela naletela na nalogo: »Ploščina pravokotnika z dolžino a in širino b meri 60 cm^2 .«

S pomočjo metov igralne kocke, ki pokaže število za dolžino a , določi širino tega pravokotnika. Zmagovalec je tisti, ki izračuna najdaljšo širino.

RAZMISLI

Kolikšna je lahko širina omenjenega pravokotnika?
Koliko pik bo vrgel zmagovalec?



POZOR!

Nikoli ne razširjamo ali krajšamo z nič.

Za širino pravokotnika imamo več možnosti.

Širino pravokotnika dobimo tako, da ploščino delimo z dolžino, torej $60 : a$.

a	1	2	3	4	5	6
$\frac{60}{a}$	60	30	20	15	12	10

Ulolek $\frac{60}{a}$ spreminja svojo vrednost za izbrano vrednost spremenljivke a , kadar pa je $a = 0$, ulomek ni definiran (ker z nič ne delimo). Takšne ulomke, ki imajo spremenljivko v imenovalcu imenujemo algebrske ulomke. Zmagovalec pri igri je torej tisti, ki vrže najmanjše število pik.

Tudi algebrske ulomke razširjamo in krajšamo.

Ulolek $\frac{60}{a}$ razširimo z ax :

$$\frac{60 \cdot ax}{a \cdot ax} = \frac{60ax}{a^2x} \quad a \neq 0, x \neq 0$$

Ulolek $\frac{6x}{x^2 - x}$ krajšamo z x :

V imenovalcu izpostavimo skupni faktor x , nato krajšajmo.

$$\frac{6x}{x^2 - x} = \frac{6x}{x(x - 1)} = \frac{6x}{x(x - 1)} = \frac{6}{x - 1} \quad x \neq 1$$

Algebrski ulomek lahko tudi okrajšamo.

Okrajšajmo ulomek $\frac{20ax^2y^3}{30axy^4}$. Poiščimo največji skupni delitelj števca in imenovalca in z njim delimo števec in imenovalec.

$$\frac{20ax^2y^3}{30axy^4} = \frac{20ax^2y^3 : 10axy^3}{30axy^4 : 10axy^3} = \frac{2x}{3y} \quad y \neq 0$$

Kadar je algebrski ulomek funkcija ene vrste spremenljivke, običajno je to x , spada med racionalne funkcije, ki jih obravnavamo v srednji šoli.

Med racionalne funkcije spada tudi obratno sorazmerje $y = \frac{c}{x}$.

Primeri: $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 25}$, $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x}$, $f(x) = \frac{4}{x}$...



POZOR!

Veččlenike delimo na:
enočlenike,
dvočlenike,
tročlenike ...



ALGEBRSKI ULOMKI

Algebrski ulomki so ulomki, ki imajo v imenovalcu spremenljivke. Algebrski ulomek ni določen, kadar je vrednost imenovalca nič.



**RAZŠIRJANJE IN KRAJŠANJE
ALGEBRSKIH ULOMKOV**

Algebrski ulomek razširimo tako, da števec in imenovalec pomnožimo z enakim izrazom, katerega vrednost ni nič. Algebrski ulomek krajšamo tako, da števec in imenovalec delimo z enakim izrazom, katerega vrednost ni nič. Pri razširjanju in krajšanju se lahko spremeni množica števil, za katera je ulomek določen.



REŠENI PRIMERI

- 1 Za katere vrednosti a ulomek $\frac{a}{a-3}$ ni določen?

Rešitev: Ulomek ni določen, kadar je vrednost imenovalca enaka nič, zato rešimo enačbo

$$a - 3 = 0$$

$$a = 3$$

Ulomek $\frac{a}{a-3}$ ni določen za $a = 3$, za vsako drugo vrednost $a \in \mathbb{R}$ pa je določen.

- 2 Izračunaj vrednosti danega algebrskega ulomka za $x \in \left\{-2, -1, 0, 1, 2, -\frac{1}{2}\right\}$.

x	2	1	0	-1	-2	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2x+1}$	$\frac{5}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{5}{5} = 1$	$\frac{5}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{5}{3}$	$\frac{5}{2 \cdot 0 + 1} = \frac{5}{1} = 5$	$\frac{5}{2 \cdot (-1) + 1} = \frac{5}{-1} = -5$	$\frac{5}{2 \cdot (-2) + 1} = \frac{5}{-3}$	$\frac{5}{2 \cdot -\frac{1}{2} + 1} = \frac{5}{0} = \text{nedoločen ulomek}$

- 3 Za katere vrednosti x je ulomek $\frac{2x+1}{5x-10x^2}$ določen?

Rešitev: Ulomek ni določen, kadar je vrednost imenovalca enaka nič, zato rešimo enačbo

$$5x - 10x^2 = 0$$

$$5x(1 - 2x) = 0$$

$$5x = 0 \quad \text{ali} \quad 1 - 2x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ali} \quad -2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Ulomek je določen za vsako realno število $x \in \mathbb{R}$ razen za $y = 0$ in $x = \frac{1}{2}$.

- 4 Razširi ulomek $\frac{2}{x+y}$ na imenovalec $5x(x+y)$.

$$\text{Rešitev: } \frac{2}{x+y} = \frac{2 \cdot 5x}{(x+y) \cdot 5x} = \frac{10x}{5x(x+y)}$$

- 5 Okrajšaj ulomek $\frac{2u-3v}{6ux-9vx}$.

$$\text{Rešitev: V imenovalcu izpostavimo } 3x, \text{ nato krajšamo } \frac{2u-3v}{6ux-9vx} = \frac{(2u-3v)}{3x \cdot (2u-3v)} = \frac{1}{3x}$$

- 6 Okrajšaj ulomek $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}$.

Rešitev: Števec razstavimo po pravilu za razliko kvadratov dveh enakih členov, nato razliko kvadratov še enkrat razstavimo. Imenovalec zapišemo kot kvadrat dvočlenika, nato krajšamo

$$\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x-y)} = \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)}$$

**1 Po navodilih zapiši algebrski ulomek.**

- a) Števec je vsota spremenljivk x in y , imenovalc pa je razlika istih dveh spremenljivk.
 b) Števec je razlika kvadratov spremenljivk a in b , imenovalc pa je trikratnik produkta istih dveh spremenljivk.
 c) Števec je za tri večji od spremenljivke u , imenovalc pa je za dve manjši od spremenljivke u .
 č) Zapiši količnik vsote in razlike spremenljivk m in n .
 d) Zapiši količnik produkta in razlike spremenljivk c in d .
 e) Zapiši količnik kvadrata vsote in vsote kvadratov spremenljivk p in r .

2 Izračunaj vrednost algebrskega ulomka.

- a) $\frac{2-x}{3x}$ za $x = 5$ a) $\frac{1+x}{x^2-1}$ za $x = -3$

3 Za katero vrednost x dani ulomek ni določen?

- a) $\frac{1}{2x}$ b) $\frac{3}{x+1}$
 c) $\frac{2x}{x^2-9}$ č) $\frac{x+3}{3x-6}$
 d) $\frac{5}{x(x-1)}$ e) $\frac{7x^2}{(x-4)^2}$
 f) $\frac{5}{x^2+10x+25}$

4 Razširi po danih navodilih.

- a) $\frac{3x}{4}$ razširi na imenovalc 12
 b) $\frac{a^2}{7b}$ razširi na imenovalc $7b^2$
 c) $\frac{5cd}{4e}$ razširi na števec $20cde$
 č) $\frac{1}{m}$ razširi na števec m^2n^2
 d) $\frac{a}{a+b}$ razširi na števec $a(b+3)$

5 Dan je ulomek $\frac{5}{x}$.

- a) Razširi ga z x .
 b) Razširi ga s $3x^2$.
 c) Razširi ga z $(2x+5)$.

6 Dopolni.

- a) $\frac{5xy}{2z} = \frac{\quad}{2z^2}$ b) $\frac{5}{(x+3)} = \frac{\quad}{(x+3)^2}$
 c) $\frac{3mn}{m+n} = \frac{\quad}{2m+2n}$ č) $\frac{2}{x+1} = \frac{10x}{\quad}$
 d) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{\quad}{x^2-2xy+y^2}$ e) $\frac{-1}{x^2y} = \frac{\quad}{x^3y^3}$
 f) $\frac{3a}{3a+1} = \frac{\quad}{9a^2-1}$

7 Razširi na najmanjši skupni imenovalc.

- a) $\frac{2}{x}, \frac{5}{x}$ b) $\frac{3}{a}, \frac{4}{ab}$
 c) $\frac{7}{m}, \frac{9}{m^2}$ č) $\frac{2x}{3a}, \frac{7y}{5b}$
 d) $\frac{3v}{4x}, \frac{7t}{6x^2}$ e) $\frac{3a}{2x^2y}, \frac{6}{5xy^2}$
 f) $\frac{9mn}{8c^2d}, \frac{3cd^4}{4m^2n^3}$ g) $\frac{12a}{7b^3c}, \frac{5b}{3a^2b}$
 h) $\frac{5}{(x-3)}, \frac{8}{x}$ i) $\frac{a}{(a-2)}, \frac{3a}{(a-3)}$
 j) $\frac{4}{b-3}, \frac{9}{b+5}$ k) $\frac{7}{x+2}, \frac{4}{x-2}$
 l) $\frac{a}{b-5}, \frac{c}{b^2-25}$ m) $\frac{2x}{5x^3-x^2}, \frac{3x}{5x-1}$
 n) $\frac{4}{a^2-1}, \frac{5}{(a-1)^2}$ o) $\frac{8}{x-4}, \frac{6}{x^2-8x+16}$

8 Okrajšaj ulomke.

- a) $\frac{12x}{20}$ b) $\frac{x^7}{x^4}$
 c) $\frac{12ab}{15a^2}$ č) $\frac{21x^3y^4}{35xy^6}$
 d) $\frac{(2a^2b)^3}{4ab}$ e) $\frac{5x+5y}{7x+7y}$
 f) $\frac{4a+8b}{a^2-4b^2}$ g) $\frac{m+2}{m^2+2m+4}$
 h) $\frac{(a-3)^2}{a^2-9}$ i) $\frac{2x-4y}{x^2-4y^2}$

9 Če je mogoče, razcepi števec in imenovalc in nato okrajšaj.

- a) $\frac{6x+4}{2}$ b) $\frac{a-5b}{2a-10b}$
 c) $\frac{xy+xz}{x}$ č) $\frac{6x-18}{18x-54}$
 d) $\frac{2y+4}{y^2+2y}$ e) $\frac{x+4}{x^2-16}$
 f) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ g) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$
 h) $\frac{2x-1}{4x^2-1}$ i) $\frac{(m-6n)^2}{m^2-36n^2}$
 j) $\frac{3x-3y}{3x^2-6xy+3y^2}$

5 RAČUNANJE Z ALGEBRSKIMI ULOMKI

IZBIRNE
VSEBINE

Izvedel boš:

- kako seštevamo algebrske ulomke,
- kako odštevamo algebrske ulomke,
- kako množimo algebrske ulomke,
- kako delimo algebrske ulomke.

Špela je našla zapis o algebrskih ulomkih: Že najstarejše kulture so uporabljale tudi algebrske ulomke, torej ulomke, v katerih nastopajo črke oziroma izrazi. Egipčani so na primer ulomek $\frac{1}{3}$ zapisali takole: 

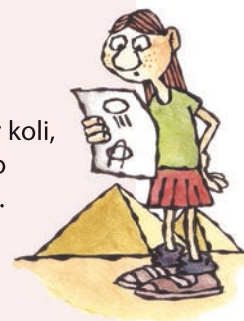
nad tremi črticami, ki so pomenile imenovalca, so narisali hieroglif, ki pomeni „del“. Morda lahko v tem prikazu zaznamo algebraičnost. Izraz „del“ bi lahko pomenil kar koli, torej neko celoto. Zanimivo je tudi to, da so Egipčani vse ulomke podajali kot vsoto ulomkov, ki so imeli v števcu ta hieroglif, torej kot vsoto ulomkov z imenovalcem 1.

Samo za ulomek $\frac{2}{3}$ je obstajal poseben hieroglif. 

RAZMISLI

Kako računamo z algebrskimi ulomki?

Z algebrskimi ulomki računamo enako kot z navadnimi ulomki, torej jih seštevamo, odštevamo, množimo, delimo.



Seštevanje in odštevanje algebrskih ulomkov

Seštevamo in odštevamo ulomke takrat, kadar imajo enak imenovalca. Če ulomki nimajo enakega imenovalca jih razširimo na skupni imenovalca.

Razširimo na skupni imenovalca, imenovalca prepišemo, števce seštejemo.

$$\frac{6}{x} + \frac{7}{y} = \frac{6y}{xy} + \frac{7x}{xy} = \frac{6y + 7x}{xy}$$

Imenovalca prepišemo, od števca zmanjševančca odštejemo števec odštevancja.

$$\frac{5}{2a} - \frac{7}{2a} = \frac{5-7}{2a} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}$$



SEŠTEVANJE IN ODŠTEVANJE ALGEBRSKIH ULOMKOV

Algebrske ulomke seštevamo in odštevamo po pravilih za seštevanje in odštevanje ulomkov: najprej jih razširimo na skupni imenovalca, nato pa števce seštejemo ali odštejemo.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Množenje in deljenje algebrskih ulomkov

Pri množenju ulomke predhodno krajšamo.

$$\begin{aligned} \frac{12x}{25y} \cdot \frac{15y^2}{8x^2} &= \frac{\cancel{12}x}{\cancel{25}y} \cdot \frac{\cancel{15}y^2}{\cancel{8}x^2} = \\ &= \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot y^1}{5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^1} = \frac{9y}{10x} \end{aligned}$$

Pri računanju količnika deljenec pomnožimo z obratno vrednostjo delitelja.

$$\frac{13a^4}{5b} : \frac{26a^2}{65b^2} = \frac{13a^4}{5b} \cdot \frac{65b^2}{26a^2} = \frac{\cancel{13}a^4}{\cancel{5}b} \cdot \frac{\cancel{65}b^2}{\cancel{26}a^2} = \frac{1 \cdot a^2 \cdot 13 \cdot b^1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot a^2 \cdot b}{2}$$



MNOŽENJE IN DELJENJE ALGEBRSKIH ULOMKOV

Algebrske ulomke množimo tako, da med seboj pomnožimo števce in med seboj imenovalce. Če je možno predhodno krajšamo.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Algebrske ulomke delimo tako, da deljenec pomnožimo z obratno vrednostjo delitelja.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad b \neq 0, c \neq 0$$



REŠENI PRIMERI

- ① Seštej ulomka $\frac{3+x}{5x}$ in $\frac{7-x}{2x}$.

Rešitev: Razširimo na skupni imenovalec, imenovalec prepisemo, števce seštejemo.

$$\frac{3+x}{5x} + \frac{7-x}{2x} = \frac{(3+x) \cdot 2}{10x} + \frac{(7-x) \cdot 5}{10x} = \frac{6+2x}{10x} + \frac{35-5x}{10x} = \frac{6+2x+35-5x}{10x} = \frac{41-3x}{10x}$$

- ② Od ulomka $\frac{a-5}{6}$ odštej ulomek $\frac{a-3}{8}$.

Rešitev: $\frac{a-5}{6} - \frac{a-3}{8} = \frac{4(a-5)}{24} - \frac{3(a-3)}{24} = \frac{4a-20-3a+9}{24} = \frac{a-11}{24}$



POZOR!

Če je pred ulomkom predznak –, se predznaki števca spremenijo.

- ③ Izračunaj produkt ulomkov $\frac{2x-y}{12y}$ in $\frac{16x}{4x-2y}$.

Rešitev: Pri dvočleniku v imenovalcu drugega ulomka izpostavimo skupni faktor, nato krajšamo in na koncu pomnožimo.

$$\frac{2x-y}{12y} \cdot \frac{16x}{4x-2y} = \frac{(2x-y)}{12y} \cdot \frac{16x}{2(2x-y)} = \frac{\cancel{(2x-y)}}{12y} \cdot \frac{16x}{2\cancel{(2x-y)}} = \frac{1 \cdot \cancel{4} \cdot x \cdot 2}{3 \cdot y \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{2x}{3y}$$

- ④ Izračunaj količnik, če je deljenec $\frac{(x-3)^2}{5x^2}$ in delitelj $\frac{10x^4}{x^2-9}$.

Rešitev: Oba dvočlenika razstavimo v faktorje in zapišemo kot produkt prvega ulomka z obratno vrednostjo drugega ulomka.

$$\frac{(x-3)^2}{5x^2} : \frac{x^2-9}{10x^4} = \frac{(x-3)(x-3)}{5x^2} \cdot \frac{10x^4}{(x-3)(x+3)} = \frac{\cancel{(x-3)}(x-3)}{5x^2} \cdot \frac{10x^4}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{1(x-3)2x^2}{1 \cdot 1 \cdot 1(x+3)} = \frac{2x^2(x-3)}{(x+3)}$$

**1 Pomnoži. Če je možno, predhodno krajšaj.**

- a) $\frac{9}{a} \cdot \frac{3}{b}$ b) $\frac{4a}{12b^2} \cdot \frac{25b}{28}$
 c) $\frac{12x}{25y^3} \cdot \frac{35y}{16x^2}$ č) $\frac{15c}{24d} \cdot \frac{8cd^2}{21c^3}$
 d) $2 \cdot \frac{1}{6x}$ e) $\frac{x}{18y^2} \cdot 12y$
 f) $\frac{56}{81x} \cdot \frac{54x^2}{49x}$ g) $\frac{x-4}{2x} \cdot \frac{8}{x-4}$
 h) $\frac{22}{32(a+1)} \cdot \frac{4(a+1)}{33a}$ i) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z^2}{x^2} \cdot \frac{y^3}{z^5}$
 j) $\frac{21-3a}{6-3a} \cdot \frac{20-10a}{35-5a}$ k) $\frac{3a^2-27}{6a+12} \cdot \frac{a^2+4a+4}{a^2-6a+9}$

2 Izračunaj količnike.

- a) $\frac{4}{9y} : \frac{8}{3y}$ b) $\frac{18a}{10} : \frac{27a^2}{25b}$
 c) $\frac{p^2}{r} : p$ č) $\frac{12a^3b}{7} : 4ab^5$
 d) $8x^2y : \frac{4xy}{3}$ e) $\frac{18}{5x^2} : \frac{9}{25x}$
 f) $\frac{x^2-1}{2} : \frac{5x-5}{30}$ g) $\frac{9x}{x+3} : 3x$
 h) $\frac{a-3}{5x^2} : \frac{(5a-15)}{x}$

3 Izračunaj.

- a) $\frac{x}{6} + \frac{2x}{9}$ b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x}$
 c) $\frac{1}{a} + \frac{3}{4}$ č) $\frac{3a}{5} - \frac{4}{y}$
 d) $\frac{8}{c} + \frac{7}{d}$ e) $\frac{2}{x} + \frac{5}{x}$
 f) $\frac{4}{5a} - \frac{3}{5a}$ g) $\frac{5b}{3a} + \frac{8d}{3a}$
 h) $\frac{y}{2} + \frac{3}{8y}$ i) $\frac{a}{b} - \frac{2a}{5b}$
 j) $\frac{5}{6a} + \frac{7}{10a}$ k) $\frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x}$
 l) $\frac{3}{ab} + \frac{2}{bc} - \frac{4}{ab}$ m) $\frac{7}{x} - \frac{5}{x^2}$
 n) $\frac{2y}{x^3} + \frac{5y}{x^2}$ o) $\frac{x}{y} - 3 + \frac{y}{x}$

4 Izračunaj.

- a) $\frac{x+2}{7} + \frac{x+3}{5}$ b) $\frac{2x+3}{4} + \frac{5-8x}{3}$
 c) $\frac{2-y}{4} - \frac{4y+3}{6}$ č) $\frac{5+3y}{x} + \frac{2y-4}{y}$
 d) $\frac{a-1}{a} + \frac{b+5}{b}$ e) $\frac{a-4}{a} + \frac{a+7}{a^2}$
 f) $\frac{5z-3}{5z} - \frac{4-7z}{4z}$ g) $\frac{5x+3}{3x} - \frac{1}{2}$
 h) $\frac{3a+2}{4a^3} - \frac{a-3}{5a^2}$ i) $x + \frac{1}{x}$
 j) $y + \frac{3-y^2}{y}$ k) $a - \frac{5a^2+6}{5a}$

- l) $\frac{4b^2-9}{b} + 3b-2$ m) $\frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2}$
 n) $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+2}$ o) $\frac{y-1}{y-3} + \frac{y-2}{y-3}$

5 Zapiši z algebrskim ulomkom:

- a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \dots$
 b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12} \dots$
 c) $\frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10} \dots$

6 Kateri izraz prikazuje pravi postopek, po katerem izračunamo $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$?

- a) $\frac{1}{a-b}$
 b) $\frac{1}{b-a}$
 c) $\frac{a-b}{ab}$
 č) $\frac{b-a}{ab}$

ZMOREM TUDI TO**7 Poenostavi izraz.**

- a) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{x^2-y^2}{2xy}\right)$
 b) $(x^2-9) : \frac{2x+6}{4}$
 c) $\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}$
 č) $\frac{\frac{ab}{a+b} + a}{\frac{ab}{a+b} - a}$
 d) $\frac{1-y^{-1}}{y-y^{-1}}$
 e) $\frac{\frac{2a+1}{a-2} - 1}{1+2(a-2)^{-1}}$

8 Poenostavi in določi števili A in B tako, da velja

$$\frac{y+1}{y^2-25} + \frac{2-y}{y^2-5y} = \frac{yA+B}{y^3+25y}.$$

9 Razišči vrednost ulomka.

$$\frac{a+3}{2-a} - \frac{a-7}{a-2} \text{ za } a \in \mathbb{Z}$$

6T

1 Izračunaj.

a) $(x + 6)^2$

b) $(2b - 5)^2$

c) $(3x - 4y)^2$

č) $(c - d)(c + d)$

d) $(6a - 7b)(6a + 7b)$

e) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

12T

2 Razstavi izraze v produkte.

a) $4ab + 8a$

b) $3xy - 3y$

c) $c^3d^2 - 5c^2$

č) $x^2 - 81$

d) $36a^2 - 144b^2$

e) $(b^2 - \frac{9}{4})$

3T

3 kateri izrazi prikazujejo produkt vsote in razlike členov x in y ?

a) $x + xy - y$

b) $(x + y)(x + y)$

c) $xy + (x - y)$

č) $(x + y) - (x - y)$

d) $(x + y)(x - y)$

e) $(x - y) + (x + y)$

f) $(-x + y)(x + y)$

g) $x^2 - y^2$

10T

4 Poenostavi izraze.

a) $y(2y - 1) - (y + 5)^2$

b) $(a - 1)(2a - 9) - (4a - 7)(4a + 7)$

5T

5 Poenostavi izraz $(x - 1)^2 + (x - 3)^2$ in izračunaj njegovo vrednost za $x = -3$.

2T

6 Odgovori.

a) Kakšen predznak ima število, ki je kvadrat poljubnega celega števila?

b) Za katero vrednost spremenljivke x je vrednost izraza $(x - 6)^2$ enaka nič?

4T

7 Pravokotnik ima stranici zapisani kot vsoto in razliko števil c in d .

Velja še $c > d$, $c > 0$, $d > 0$. Izračunaj obseg in ploščino tega pravokotnika.

6T

8 Dana sta izraza: A je kvadrat razlike števil x in 13; B je razlika 26-kratnika števila x in kvadrata števila x .

a) Zapiši oba izraza.

b) Od 180 odštej vsoto izrazov A in B ter dobljeni izraz poenostavi.

12T

9 Izračunaj.

a) $\frac{1}{4x} + \frac{3}{2x}$

b) $\frac{3a}{10a} - \frac{a+4}{15a}$

c) $\frac{m+3}{m-2} - \frac{2 \cdot (m+4)}{m-2}$

č) $\frac{9b}{b+7} : 3b$

d) $\frac{4y+6}{12y} \cdot \frac{4y}{6y+9}$

e) $\frac{c^2+3c}{5c-5} \cdot \frac{10}{2c+6}$

Možnih je 60 točk.



Špela **na poti k vrhu** (45–53).



Špela **dodatno trenira** (30–35).



Špela **blesti** (54–60).



Špela **na dobri poti** (36–44).



Špela **išče pomoč** (manj kot 30 točk).

ROK IN ŠPELA

2. DEL



NEKOČ IN DANES

Z reševanjem enačb so se ukvarjali že Egipčani in Babilonci, vendar pa za zapisovanje neznane količine niso uporabljali znakov, temveč so nalogo reševali predvsem z besedilom – od tod se njihovo reševanje tudi imenuje **retorična ali govorna algebra**.

Pes lovi zajca in ta ima 150 čevljev prednosti. Vsakič, ko skoči zajec 7 čevljev daleč, skoči pes 9 čevljev. Po koliko skokih bo pes ujel zajca?

Alcuin

V tem grobu leži Diofant. Strmite, popotni, v to čudo! Umrlega starost pove nagrobnik v jeziku računskem. Šestino vseh let je živel kot deček, priljubljen bogovom. Še prej ko pogнал mu je mah, prešla je spet let dvanajstina. Potekla sedmina je še in vzel si je ljubo družico. Minilo petero je let in žena rodila je sinčka. Učakal edini je sin očetovih let polovico, ko prišla ponj kruta je smrt in strla očetove nade. Tolažbo iskal Diofant še štiri je leta v računstvu, obupan zapustil ta svet in šel je za ljubljenim sinom. Popotnik, ugani sedaj umrlega starost ob smrti!

prevod z nagrobnega spomenika

Prvi, ki je sistematično uporabljal simbole za označevanje neznanke, je bil **Diofant** (210—290). Zanj je značilno, da se ni ukvarjal z geometrijo in da so ga zanimale samo pozitivne racionalne rešitve naloge.

Mnoge naloge, ki jih rešujemo z uporabo linearnih enačb, najdemo že v najstarejših ohranjenih pisnih virih. Nekatere med njimi so obarvane precej pesniško.



Da bi oče opogumil svojega sina pri reševanju nalog, mu je predlagal naslednje: »Dam ti po 8 centov za vsako pravilno rešeno nalogo, vendar pa bom hkrati od tebe zahteval tudi po 5 centov za vsako napačno rešeno nalogo.« Čez nekaj časa mu je sin prinesel v presojo 26 rešenih nalog. Ko jih je oče pregledal, je ugotovil, da drug drugemu nista ničesar dolžna. Koliko nalog je sin rešil pravilno?

Christopher Clavius

Arhimed je odkril tudi zakon o vzvodu. Dokazal je, da manjša sila na ustrezni razdalji od opore uravnovesi večjo silo, ki deluje bližje opori. S tem v zvezi je znan Arhimedov znameniti stavek: »Dajte mi oporno točko in premaknil bom svet.«



Debelino drevesa lahko izmerimo enostavno in zanesljivo.

Z merjenjem debeline dreves je posredno mogoče ugotoviti obliko, višino in prostornino debla, ki je pomembna za posek.



ENAČBE

1 LINEARNE ENAČBE

a REŠITVE LINEARNE ENAČBE

b ENAČBE Z OKLEPAJI

c ENAČBE Z ULOMKI

č NEENAČBE

d IZRAŽANJE NEZNANIH KOLIČIN IZ FORMUL

2 UPORABA ENAČB PRI REŠEVANJU BESEDILNIH NALOG

a NALOGE O ŠTEVILIH

b NALOGE O STAROSTI

c NALOGE IZ GEOMETRIJE

č NALOGE IZ VSAKDANJKA

d NALOGE O GIBANJU

3 SISTEM DVEH LINEARNIH ENAČB

Z DVEMA NEZNANKAMA

4 ALGEBRSKE ENAČBE – ENAČBE Z NEZNANKO

V IMENOVALCU

ŠPELA SE PREIZKUSI

Indijski naravoslovec **Bhaskara** je zastavil tole uganko: »Petina od roja čebel sede na cvetje kadama (lotosov cvet), tretjina od njih poleti na pisane čaše silindhe (bananovec), a trojna razlika le-teh počene na lepo katujo; le ena čebela brenči, kjer vabi opojni jasmin. Deklica svetlih oči, povej mi število čebel!«

Lilavati



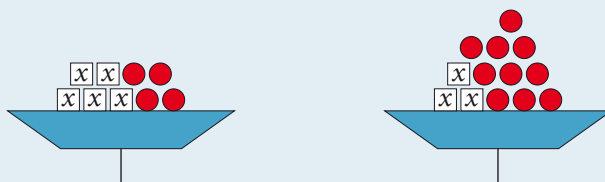
1 LINEARNE ENAČBE

Izvedel boš:

- kdaj je enačba linearna,
- kaj je osnovna množica, kaj rešitev enačbe in kaj množica rešitev,
- kako rešujemo linearne enačbe.



Rok in Špela ugotavljata, koliko bonbonov je v škatlici z bonboni. Ker škatlice ne smeta odpreti, se domislita, da bi število bonbonov ugotovila s tehtnico. Tehtnica je bila v ravnovesju, ko sta imela na levi strani 5 škatlic in 4 bonbone, na desni pa 3 škatlice in 10 bonbonov. Maso škatlic zanemarimo.



RAZMISLI

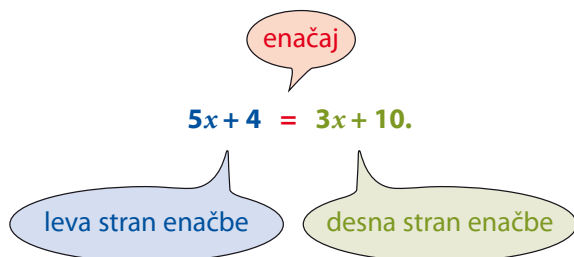
Ugotovi, koliko bonbonov je v posamezni škatlici. Kako bi matematično zapisal ravnovesje na tehtnici?



Odgovori na zastavljeni vprašanji.
DZ – naloga 2.1

Podobne naloge smo reševali že v 8. razredu s pomočjo sklepanja. Upoštevali smo ravnovesje tehtnice oziroma enakost mas na obeh straneh tehtnice: če enako spremenimo (povečamo ali zmanjšamo) masi na obeh straneh tehtnice, se ravnovesje ohrani. Spremembe na levi in desni strani lahko izvedemo s prištevanjem, odštevanjem, množenjem ali deljenjem.

Enakost dveh matematičnih izrazov, v katerih nastopa neznanka, imenujemo enačba.



POMNI

Običajno neznano število v enačbi označimo s črko x , lahko pa uporabimo tudi katero koli drugo črko iz abecede. Spremenljivko x (ali drugo črko) imenujemo neznanka.

S sklepanjem ugotovimo, da so v vsaki škatlici zaviti trije bonboni, kar matematično zapišemo kot

$$x = 3.$$

Pravimo, da je **rešitev enačbe 3**.

Število ali števila, ki so rešitev dane enačbe, sestavljajo **množico rešitev R**. Pri linearnih enačbah je množica rešitev običajno enočlena: $\mathbb{R} = \{a\}$, pri čemer je število a rešitev enačbe. Za enačbo $5x + 4 = 3x + 10$, ki ima rešitev $x = 3$, lahko zapišemo $R = \{3\}$.

O ustreznosti rešitve se lahko prepričamo tako, da namesto spremenljivke x v enačbo vstavimo vrednost $x = 3$ in tako preverimo, ali med vrednostjo leve in vrednostjo desne strani velja enakost.

vrednost leve strani enačbe (L): $5x + 4$

$$5 \cdot 3 + 4 = 15 + 4 = 19$$

vrednost desne strani enačbe (D): $3x + 10$

$$3 \cdot 3 + 10 = 9 + 10 = 19$$

Ugotovimo, da sta vrednosti leve in desne strani enačbe enaki in je vrednost 3 očitno rešitev enačbe.

Takemu preverjanju ustreznosti rešitve pravimo **preizkus**.



ENAČBA

Enačba je enakost dveh matematičnih izrazov, kjer vsaj v enem nastopa neznanka.

Leva stran enačbe imenujemo izraz na levi strani enačaja, **desna stran enačbe** pa izraz na desni strani.

Neznanka je običajno označena s črko x .

Rešitev enačbe je število, pri katerem sta vrednosti leve in desne strani enačbe enaki.

Množica rešitev (R) so vsa števila, ki so rešitev dane enačbe.

Preizkus pravilnosti rešitve naredimo tako, da namesto neznanke vstavimo rešitev in preverimo, ali na obeh straneh enačbe dobimo enako vrednost.

Vrste enačb

Enačbe običajno razvrščamo po številu neznank in po njihovih potencah.

po številu neznank	po potenci neznanke
enačba z eno neznanko $3x + 5 = 11$	enačba 1. stopnje – linearna enačba $3x + 5 = 11$
enačba z dvema neznankama $2x + 3y = 14$	enačba 2. stopnje – kvadratna enačba $x^2 = 9$
enačba s tremi neznankami $4x - 2y + 3z = 9$	enačba 3. stopnje – kubična enačba $x^3 + 2 = 10$



POMNI

V osnovni šoli bomo večinoma obravnavali enačbe z eno neznanko, in sicer take, kjer je eksponent neznanke x število 1:

$$x^1 = x.$$

Take enačbe imenujemo **linearne enačbe z eno neznanko**.

Reševanje linearnih enačb

Linearne enačbe rešujemo tako, da jih postopno preoblikujemo v preprostejše enačbe z enako rešitvijo. Enačbi, ki imata enako rešitev, imenujemo **ekvivalentni** ali **enakovredni enačbi**.

Kako smemo preoblikovati enačbo, da bo še vedno **ekvivalentna** (enakovredna) prvotni enačbi?



POZOR!

Ekvivalentni enačbi imata kljub različni obliki **isto rešitev**, npr:

$$5x = 10 \quad \text{in} \quad 5x + 3 = 13;$$

$x = 2$ je rešitev obeh enačb, zato sta ekvivalentni (enakovredni).



Samostojno rešuj s sklepanjem.
DZ – naloga 2.2

Rešimo uvodno enačbo z neznanim številom bonbonov v škatlicah z ekvivalentnim preoblikovanjem enačbe po postopku, ki smo ga spoznali že v 8. razredu.

$$5 \cdot x + 4 = 3 \cdot x + 10$$

reševanje s sklepanjem (tehnica)		reševanje z ekvivalentnim preoblikovanjem
$5 \cdot x + 4 = 3 \cdot x + 10$ $\begin{array}{c} \text{← -4} \quad \text{← -4} \\ 5 \cdot x + 4 - 4 = 3 \cdot x + 10 - 4 \\ 5 \cdot x = 3 \cdot x + 6 \end{array}$ Na obeh straneh enačbe odvezamemo štiri bonbone.		$5 \cdot x + 4 = 3 \cdot x + 10$ $\begin{array}{c} \text{← -4} \\ 5 \cdot x + 4 - 4 = 3 \cdot x + 10 - 4 \\ 5 \cdot x = 3 \cdot x + 6 \end{array}$ Člen 4 zapišemo na drugo stran enačaja; s tem se mu spremeni predznak: -4.
$5 \cdot x = 3 \cdot x + 6$ $\begin{array}{c} \text{← -3x} \quad \text{← -3x} \\ 5 \cdot x - 3 \cdot x = 3 \cdot x - 3 \cdot x + 6 \\ 2 \cdot x = 6 \end{array}$ Na obeh straneh enačbe odvezamemo tri škatlice bonbonov.		$5 \cdot x = 3 \cdot x + 6$ $\begin{array}{c} \text{← -3x} \\ 5 \cdot x - 3 \cdot x = 3 \cdot x - 3 \cdot x + 6 \\ 2 \cdot x = 6 \end{array}$ Člen s spremenljivko $3 \cdot x$ zapišemo na drugo stran enačaja; s tem se mu spremeni predznak: -3x.
$2 \cdot x = 6$ $\begin{array}{c} \text{← :2} \quad \text{← :2} \\ 2 \cdot x : 2 = 6 : 2 \\ x = 3 \end{array}$ Na obeh straneh enačbe prepolovimo število škatlic oziroma bonbonov.		$2 \cdot x = 6$ $\begin{array}{c} \text{← :2} \\ 2 \cdot x : 2 = 6 : 2 \\ x = 3 \end{array}$ Na eni strani enačbe odpravimo od nič različen faktor 2; s tem dobimo na drugi strani enačbe obratni faktor: $\frac{1}{2}$.



Samostojno rešuj z ekvivalentnim preoblikovanjem.
DZ – naloga 2.3



EKVIVALENTNO PREOBLIKOVANJE

Linearno enačbo lahko preoblikujemo v ekvivalentno enačbo, tako da:

1. Na obeh straneh enačbe prištejemo ali odštejemo isti člen.
2. Obe strani enačbe pomnožimo ali delimo z istim (od nič različnim) faktorjem.



REŠENI PRIMERI

1 S poskušanjem (preglednica) reši enačbo $17 = 8 - 3x$. Rešitev enačbe je iz množice celih števil.

Rešitev: Za vrednost neznanke x si izberemo negativna cela števila, saj ugotovimo, da bo razlika na desni strani večja od 8 le, če bo vrednost neznanke x negativno celo število.

vrednost neznanke x	vrednost leve strani enačbe	vrednost desne strani enačbe
-1	17	$8 - 3 \cdot (-1) = 11$
-2	17	$8 - 3 \cdot (-2) = 14$
-3	17	$8 - 3 \cdot (-3) = 17$
-4	17	$8 - 3 \cdot (-4) = 20$
-5	17	$8 - 3 \cdot (-5) = 23$
-6	17	$8 - 3 \cdot (-6) = 26$

Vrednost leve (17) in vrednost desne strani enačbe (17) se ujemata pri vrednosti neznanke $x = -3$. Rešitev enačbe je torej $x = -3$.



POMNI

V navadi je, da pišemo neznanko na levi strani enačbe in znana števila na desni.

Torej: $5x = 10$ in ne $10 = 5x$, čeprav sta oba zapisa enakovredna.

2 Reši enačbo $3x + 6 = 21$ in napravi preizkus.

Rešitev: Na levi strani ohranimo člen, ki vsebuje neznanko, na desno stran pa »prenesemo« število 4.

$$\begin{aligned}
 3x + 6 &= 21 \\
 3x &= 21 - 6 \\
 3x &= 15 \\
 x &= 15 : 3 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Ko zapišemo **število 6** na drugo stran enačbe, dobimo **nasprotno število -6**.

Enačbo **delimo s številom 3**, torej s faktorjem pri neznanki.

Preizkus:

$$\begin{aligned}
 \text{L: } 3x + 6 &= & \text{D: } &= 21 \\
 &= 3 \cdot 5 + 6 = \\
 &= 15 + 6 = \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

Preizkus potrdi pravilnost rešitve, saj sta pri $x = 5$ vrednosti leve in desne strani enačbe enaki; $R = \{5\}$.

3 Reši enačbo $3 = \frac{x}{4} - 4$ in napravi preizkus.

Rešitev: Najprej zamenjamo levo in desno stran enačbe, saj je v navadi, da člene, ki vsebujejo neznanko, zberemo na levi strani enačbe. Pri tem se predznak členov ne spremeni.

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{4} - 4 &= 3 \\
 \frac{x}{4} &= 3 + 4 \\
 \frac{x}{4} &= 7 \\
 x &= 7 \cdot 4 \\
 x &= 28
 \end{aligned}$$

Število -4 zapišemo na drugo stran enačbe, dobimo +4.

Enačbo množimo s **številom 4**.

Preizkus:

$$\begin{aligned}
 \text{L: } &= 3 & \text{D: } &= \frac{x}{4} - 4 = \\
 & & &= \frac{28}{4} - 4 = \\
 & & &= 7 - 4 = \\
 & & &= 3
 \end{aligned}$$

Rešitev $x = 28$ je ustrezna, saj preizkus pokaže enaki vrednosti leve in desne strani enačbe; $R = \{28\}$.

4 Reši enačbo $7x - 2 = 5x + 10$ in napravi preizkus.

$$7x - 2 = 5x + 10$$

$$7x - 5x = 10 + 2$$

$$2x = 12$$

$$x = 12 : 2$$

$$x = 6$$

Na levi strani enačbe zberemo člene z neznanko x , na desni pa števila: pri tem upoštevamo, da členi spremenijo predznak.

Skrčimo podobne člene.

Enačbo delimo s koeficientom (število 2) pri neznanki.



POMNI

Običajno pri reševanju posamezne korake združimo in tako skrajšamo postopek reševanja: hkrati zapišemo vse člene z neznanko x na eno stran in vsa števila na drugo stran enačbe.

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } 7x - 2 &= \\ &= 7 \cdot 6 - 2 = \\ &= 42 - 2 = \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D: } 5x + 10 &= \\ &= 5 \cdot 6 + 10 = \\ &= 30 + 10 = \\ &= 40 \end{aligned}$$

Odgovor:

Preizkus pokaže, da je rešitev enačbe $x = 6$ ustrezna; $\mathbf{R} = \{6\}$.

5 Dana je osnovna množica števil: $U = \{2, 4, 6, 8\}$. Ugotovi, ali imata spodnji enačbi rešitev v tej množici.

a) $7x - 8 = 4x + 4$

b) $5x + 3 = 3x + 9$

Rešitev:

Obe enačbi rešimo po že znanem postopku.

$$\begin{aligned} 7x - 8 &= 4x + 4 \\ 7x - 4x &= 4 + 8 \\ 3x &= 12 \\ x &= 12 : 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 3 &= 3x + 9 \\ 5x - 3x &= 9 - 3 \\ 2x &= 6 \\ x &= 6 : 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } 7x - 8 &= 7 \cdot 4 - 8 = 28 - 8 = 20 \\ \text{D: } 4x + 4 &= 4 \cdot 4 + 4 = 16 + 4 = 20 \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } 5x + 3 &= 5 \cdot 3 + 3 = 15 + 3 = 18 \\ \text{D: } 3x + 9 &= 3 \cdot 3 + 9 = 9 + 9 = 18 \end{aligned}$$

Odgovor: Da, enačba $7x - 8 = 4x + 4$ ima rešitev v dani množici U , saj je število 4 element množice U ; $\mathbf{R} = \{4\}$.

Odgovor: Ne, enačba $5x + 3 = 3x + 9$ nima rešitve v dani množici U , saj število 3, ki je sicer rešitev enačbe, ni element množice U ; $\mathbf{R} = \{ \}$.

Po nekaj rešenih primerih lahko povzamemo bistvene korake pri reševanju linearnih enačb:



REŠEVANJE LINEARNIH ENAČB

1. Enačbo uredimo tako, da vse člene z neznanko zapišemo na levo stran enačbe, vsa števila pa na desno stran.
2. Skrčimo levo in desno stran enačbe.
3. Enačbo delimo s koeficientom pri neznanki.
4. Dopišemo vrednost neznanke.
5. Napravimo preizkus.
6. Dopišemo ugotovitev, katero število je rešitev enačbe – množica rešitev ($\mathbf{R}$).



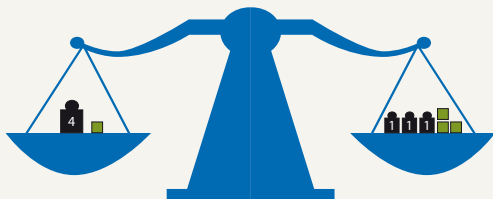
NALOGE ZA VAJO

- 1 Ugotovi maso neznanega predmeta na tehtnici, ki je v ravnovesju.

a)



b)



- 2 Dana je enačba $3x - 5 = x + 3$.

- Ali je zapisana enačba linearna? Pojasni odgovor.
- Prepričaj se, da je $x = 4$ rešitev enačbe. Utemelji odgovor.
- Prepričaj se, da $x = 0$ ni rešitev zapisane enačbe. Utemelji odgovor.
- Izračunaj vrednost leve in desne strani enačbe, če je vrednost neznanke $x = -2$.

- 3 S poskušanjem reši enačbe. Izdelaj preglednico.

- $4x - 8 = -2x + 16$
- $3x + 4 = 19$
- $8 - 2x = 3x - 2$
- $5x - 2 + 1 = 3x + 1$

- 4 Dana je preglednica za enačbo: $5x - 3 = 2x + \square$.

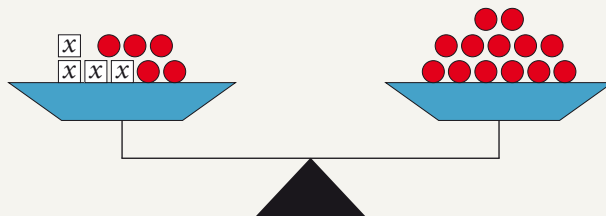
x	Leva stran enačbe: $5x - 3$	Desna stran enačbe: $2x + \square$
0	-3	5
1	2	8
2	7	11
3	12	14
4	17	17
5	22	20
6	27	23

- Ugotovi, kako se spreminjata vrednosti leve in desne strani enačbe, če se spreminja vrednost za x .
- Poišči rešitev enačbe. Kakšni sta vrednosti leve in desne strani enačbe?
- Določi manjkajoče število v enačbi.

- 5 Dana je množica $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Katero število iz dane množice je rešitev enačbe $5x - 4 = 12$?

- 6 Dana je množica $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Katero število iz dane množice je rešitev enačbe $2x - 3 = x - 4$?

- 7 S pomočjo slike zapiši enačbo in jo reši!



- Kdaj sta linearni enačbi ekvivalentni?
- Prepričaj se, ali sta dani enačbi ekvivalentni.
 $2x = 8$ in $3x - 2 = x + 6$.

- 9 Reši enačbe in naredi preizkus.

- $x + 4 = 12$
- $x - 7 = 5$
- $6x = 30$
- $x : 9 = 4$
- $3x + 9 = 21$
- $8x - 4 = 20$
- $x : 3 + 5 = 8$
- $x : 2 - 5 = 1$
- $3x + 26 = x + 30$
- $5x + 3 = 2x + 75$
- $7x - 10 = 2x + 15$
- $2x - 4 = 6x - 16$
- $6x + 1 = 4x + 21$
- $2x + 4 = 5x + 4$
- $8x + 2 = 6x + 30$
- $10x - 5 = 6x + 19$
- $-2x + 10 - x = 4x - 4$
- $2x - 13 = 8 - 6x + 3$
- $5x - 6 + 2x = 3x - 9 + x$
- $6 - 7x + 4 = 2x$

- 10 Med zapisanimi enačbami izberi tisto, ki ni ekvivalentna preostalim.

- $x - 7 = -4$
- $-2x + 7 = 3x - 8$
- $8x - 3 + x = 10 + 2x - 11$
- $9 - 2x = 6 - x$

- 11 Določi število a tako, da bosta enačbi ekvivalentni.

$$3x + 2 = 11 \quad \text{in} \quad x + a + 12 = 3a + 13.$$

1a REŠITVE LINEARNE ENAČBE

Izvedel boš:

— kakšne so lahko rešitve linearne enačbe.

Pokazali smo, da lahko linearne enačbe preoblikujemo v bolj preproste enačbe, ki so jim ekvivalentne. Na koncu vedno dobimo enačbo, ki ima na eni strani neznanko x pomnoženo z nekim številom a , na desni strani pa neko število b .

$$ax = b; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Glede rešitev linearne enačbe obstajajo tri možnosti:

Enačba ima eno samo rešitev

Primer: Reši enačbo $3x - 5 = x + 3$.

Rešitev: $3x - 5 = x + 3$

$$3x - x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$\mathbf{R = \{4\}}$$

Preizkus: L: $3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

$$\mathbf{D: 4 + 3 = 7}$$



POMNI

Linearne enačbe imajo običajno **eno samo rešitev**.

Enačba nima rešitve

Primer: Reši enačbo $2x - 3 = 2x + 4$.

Rešitev: $2x - 3 = 2x + 4$

$$2x - 2x = 4 + 3$$

$$0x = 7$$

Ta linearna enačba nima rešitve.

$$x \in \{ \}$$

$$\mathbf{R = \{ \}}$$

Preizkus: produkt katerega koli števila z 0 ni nikoli 7, temveč je vselej 0.



POZOR!

Enačba $0x = b$; $b \neq 0$ je **nerešljiva enačba**, saj je produkt katerega koli števila (x) s številom nič **enak nič**.

Enačba ima nešteto rešitev

Primer: Reši enačbo $5x - 7 - 2x = -6 + 3x - 1$.

Rešitev: $5x - 7 - 2x = -6 + 3x - 1$

$$5x - 2x - 3x = -6 - 1 + 7$$

$$0x = 0$$

Ta enačba ima **nešteto rešitev**, kar pomeni, da ji ustreza vsako realno število.

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{R = \mathbb{R}}$$

Takšnim enačbam pravimo tudi **identične** enačbe.

Preizkus: produkt vsakega števila z 0 je 0



POMNI

Identične enačbe so enačbe, pri katerih po poenostavitvi dobimo enačbo $0x = 0$ in je njihova množica rešitev $\mathbf{R = \mathbb{R}}$.

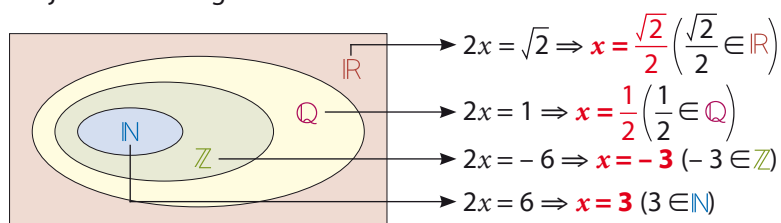


REŠITVE LINEARNE ENAČBE

Linearna enačba ima lahko **eno rešitev** (množica rešitev ima en element), v posebnih primerih pa enačba **nima rešitev** (prazna množica rešitev) ali pa ima **neskončno mnogo rešitev** ($\mathbb{R}$).

Osnovna množica in množica rešitev enačbe

Osnovna množica U je številska množica, iz katere črpamo vrednosti za iskano neznanko x v enačbi. Zgodi se, da v dani množici kakšna od enačb nima rešitve, kar pomeni, da je v dani množici nerešljiva. Lahko pa je, seveda, rešljiva v kaki drugi množici števil.



POMNI

Če v nalogi ni posebej zapisano, katera množica je osnovna množica, domnevamo, da je to množica realnih števil ($\mathbb{R}$).

Množica rešitev enačbe R je množica tistih števil, ki rešijo enačbo (pri katerih je leva stran enačbe po vrednosti enaka desni strani enačbe).



NALOGE ZA VAJO

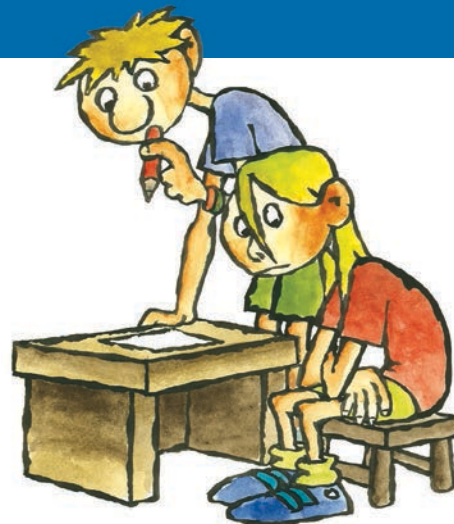
- Dana je osnovna množica $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Katero število iz osnovne množice je rešitev enačbe?
 - $x - 4 = 2 - x$
 - $3x + 5 = 2$
 - $2x + 1 = 5 + 2x - 3$
 - $2x - 6 = x - 1 + 3x$
- S poskušanjem ugotovi, katero od števil iz dane množice je rešitev enačbe. Izdelaj preglednico.
 - $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 $5 - 4x = 8 - x$
 - $U = \{0, 1, 2\}$
 $8x - 4 = 5x + 8$
- Reši enačbe in ugotovi, katere so rešljive v množici naravnih števil.
 - $3x - 4 = 2x + 6$
 - $x + 3 = 3x - 5$
 - $7x - 8 = 4x - 20$
 - $4x + 6 = 2 + 9$
 - $2x + 6 = 3x - 4$
 - $5x = 2x - 21$
- V kateri od osnovnih številske množic ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) dana enačba ni rešljiva?
 - $3x = 14$
 - $x + 1 = -4$
 - $2x = \sqrt{2}$
- Reši enačbe in ugotovi, katere imajo eno rešitev, katere nobene rešitve in katere nešteto rešitev ter poišči ekvivalentne enačbe.
 - $8x + 2 = 5x - 10$
 - $5 + 3x - 4 = 2x + 1 + x$
 - $4x + 2 = 2x - 6$
 - $6x + 9 = 6x + 4$
 - $4 + 7x - 1 = 4x + 3 + 3x$
 - $2x - 3 + x = 5x + 3 - 2x$
 - $x - 8 + 4x = -2 + 3x + 4$
 - $4x + 18 + 5x = 8x + 5 - 3x + 1$
- Katera od zapisanih enačb nima rešitve?
 - $0x = 5$
 - $5x = 0$
 - $0x = 0$
- Kaj lahko povemo o številu rešitev linearne enačbe?
 - Ali ima lahko linearna enačba natanko dve rešitvi?

ZMOREM TUDI TO

- Določi a tako, da enačba $ax - 6 = 4 - 3x$ ne bo rešljiva.
- Določi števili a in b tako, da bo imela enačba $5x - 3b + 8 = ax - b + 10$ nešteto rešitev.

1b ENAČBE Z OKLEPAJI

Izvedel boš:
— kako rešujemo linearne enačbe z oklepaji.



Enačbe z oklepaji rešujemo podobno kot enačbe brez oklepajev.

Nekateri primeri enačb z oklepaji in njihove bistvene lastnosti so prikazani v preglednici.

primer	opis primera
$(2x + 6) - (5 - 3x) = (x - 4) + (6x - 3)$	seštevanje in odštevanje veččlenikov
$3(2x + 1) = 3x + 9$	množenje enočlenika z veččlenikom
$(x - 2)(x + 3) = (x + 4)^2 - 1$	množenje veččlenika z veččlenikom in kvadrat dvočlenika
$(5x - 2)^2 - 2(4x - 3)^2 - (7x + 2)(1 - x) = 7$	množenje veččlenika z veččlenikom, kvadrat dvočlenika in odštevanje veččlenikov.
a) $x^2 - 16 = 0$ b) $2x^2 = 18$ *	razlika kvadratov, ki jo lahko zapišemo kot produkt vsote in razlike istih členov * Da dobimo razliko kvadratov, moramo enačbo najprej preurediti.

Pri vseh primerih bomo potrebovali znanje o računanju z veččleniki.



Samostojno reši podobne primere enačb. Pomagaj si z rešenimi primeri v nadaljevanju učbenika.
DZ – naloga 2.4



REŠEVANJE ENAČB Z OKLEPAJI

Enačbe z oklepaji rešujemo tako, da najprej odpravimo oklepaje, enačbo uredimo, združimo podobne člene in izračunamo vrednost neznanke.



REŠENI PRIMERI

1 Reši enačbo in napravi preizkus.

$$(2x + 6) - (5 - 3x) = (x - 4) + (6x - 3)$$

Rešitev: najprej odpravimo oklepaje tako, da upoštevamo znake pred oklepaji. Nato enačbo rešujemo z ekvivalentnim preoblikovanjem, kot smo se naučili v prvem delu tega poglavja:

$$\begin{aligned} (2x + 6) - (5 - 3x) &= (x - 4) + (6x - 3) \\ 2x + 6 - 5 + 3x &= x - 4 + 6x - 3 \\ 2x + 3x - x - 6x &= -4 - 3 - 6 + 5 \\ -2x &= -8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } (2x + 6) - (5 - 3x) &= \\ &= (2 \cdot 4 + 6) - (5 - 3 \cdot 4) = \\ &= (8 + 6) - (5 - 12) = \\ &= 14 - (-7) = \\ &= 14 + 7 = 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D: } (x - 4) + (6x - 3) &= \\ &= (4 - 4) + (6 \cdot 4 - 3) = \\ &= 0 + (24 - 3) = \\ &= 21 \end{aligned}$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe: $L = D$; $R = \{4\}$.

2 Reši enačbo $3(2x + 1) = 3x + 9$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$\begin{aligned} 3(2x + 1) &= 3x + 9 && \left. \begin{array}{l} \text{Odpravimo oklepaj tako, da množimo enočlenik} \\ \text{z dvočlenikom.} \end{array} \right\} \\ 6x + 3 &= 3x + 9 && \left. \begin{array}{l} \text{Enačbo uredimo (na levi strani zberemo člene} \\ \text{z neznankami, na drugi pa člene brez neznanke).} \end{array} \right\} \\ 6x - 3x &= 9 - 3 && \\ 3x &= 6 && \left. \begin{array}{l} \text{Skrčimo obe strani enačbe.} \\ \text{Enačbo delimo s številom 3.} \end{array} \right\} \\ x &= 2 && \end{aligned}$$

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } 3(2x + 1) &= \\ &= 3(2 \cdot 2 + 1) = \\ &= 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D: } 3x + 9 &= \\ &= 3 \cdot 2 + 9 = \\ &= 6 + 9 = 15 \end{aligned}$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe: $L = D$; $R = \{2\}$.



POMNI

Znak **+** pred oklepajem:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

predznaki členov iz oklepaja se ohranijo.

Znak **-** pred oklepajem:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

predznaki členov iz oklepaja se spremenijo.



POMNI

Množenje enočlenika z dvočlenikom:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Množenje dvočlenika z dvočlenikom:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

3 Reši enačbo $(x - 2)(x + 3) = (x + 4)^2 - 1$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$(x - 2)(x + 3) = (x + 4)^2 - 1$$

$$x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + 8x + 16 - 1$$

$$3x - 2x - 8x = 16 + 6 - 1$$

$$-7x = 21$$

$$x = -3$$

Izračunamo produkt dvočlenikov in kvadrat dvočlenika.

Vsota kvadratnih členov je nič, preostali del enačbe uredimo.

Skrčimo obe strani enačbe.

Enačbo delimo s številom -7 .

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } (x - 2)(x + 3) &= \\ &= (-3 - 2)(-3 + 3) = \\ &= (-5) \cdot 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D: } (x + 4)^2 + 1 &= \\ &= (-3 + 4)^2 - 1 = \\ &= 1 - 1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe: $L = D$; $R = \{-3\}$.

4 Reši enačbo $(5x - 2)^2 - 2(4x - 3)^2 - (7x + 2)(1 - x) = 7$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$(5x - 2)^2 - 2(4x - 3)^2 - (7x + 2)(1 - x) = 7$$

Pozor: negativni faktor pred oklepajem

Pozor: znak minus pred oklepajem

$$25x^2 - 20x + 4 - 2(16x^2 - 24x + 9) - (7x - 7x^2 + 2 - 2x) = 7$$

$$25x^2 - 20x + 4 - 32x^2 + 48x - 18 - 7x + 7x^2 - 2 + 2x = 7$$

$$-20x + 48x - 7x + 2x = 7 - 4 + 18 + 2$$

$$23x = 23$$

$$x = 1$$

Izračunamo kvadrata dvočlenikov in produkt dvočlenikov.

Izraz v oklepajih pomnožimo s faktorjem pred oklepajem in upoštevamo znak $-$ pred oklepajem.

Vsota kvadratnih členov je nič, preostali del enačbe uredimo.

Skrčimo izraza.

Enačbo delimo s številom 23.

Preizkus:

$$\begin{aligned} \text{L: } (5x - 2)^2 - 2(4x - 3)^2 - (7x + 2)(1 - x) &= \\ &= (5 \cdot 1 - 2)^2 - 2(4 \cdot 1 - 3)^2 - (7 \cdot 1 + 2)(1 - 1) = \\ &= 3^2 - 2 \cdot 1^2 - 9 \cdot 0 = \\ &= 9 - 2 \cdot 1 - 0 = \\ &= 9 - 2 = 7 \end{aligned}$$

$$\text{D: } = 7$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe: $L = D$; $R = \{1\}$.

5 Reši enačbi.

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $2x^2 = 18$

Rešitev:

Zapisani enačbi sta enačbi 2. stopnje (kvadratni enačbi).

a) Na levi strani enačbe je razlika kvadratov členov x in 4.

Takšno razliko kvadratov znamo zapisati tudi v obliki produkta vsote in razlike obeh členov:

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

To pa pomeni, da lahko začetno enačbo zapišemo v drugi obliki:

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x - 4)(x + 4) = 0$$

Vrednost na levi bo nič, če je vsaj eden izmed faktorjev enak nič.

$$\begin{array}{ll} \text{Velja: } (x - 4) = 0 & \text{ali } (x + 4) = 0 \\ & x = 4 \quad \text{ali} \quad x = -4 \end{array}$$

Enačbi ustrezata dve rešitvi, kar zapišemo: $R = \{-4, 4\}$.

b) Oba člena zapišemo na levo stran in izpostavimo najmanjši skupni faktor.

Nato razliko kvadratov zapišemo kot produkt:

$$2x^2 = 18$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2(x^2 - 9) = 0$$

$$2(x - 3)(x + 3) = 0$$

Vrednost na levi strani enačbe bo enaka nič, če bo vsaj eden izmed faktorjev enak nič:

$$\begin{array}{ll} (x - 3) = 0 & \text{ali } (x + 3) = 0 \\ x = 3 & \text{ali } x = -3 \end{array}$$

Tudi v tem primeru ima množica rešitev dva elementa: $R = \{-3, 3\}$.

Enačbam, ki jih lahko zapišemo kot produkt več dvočlenikov, pravimo tudi **razcepne enačbe**.



POMNI

Produkt dveh faktorjev je enak **nič**, če je vsaj eden od obeh faktorjev enak **nič**:

$$a \cdot b = 0,$$

če je $a = 0$ ali $b = 0$.

**1 Reši enačbe in napravi preizkus.**

- a) $8 + (x - 4) = 12 - 3x$
- b) $10 - (3x + 5) = 17$
- c) $24 = 8x - (2x + 36)$
- č) $2x - (5 + 6x) = 11 - 4x$
- d) $x + (2 - 5x) = 2x - (7x + 1)$
- e) $6x + (3x + 1) = 20 - (2x - 3)$
- f) $(x + 4) - (3x + 5) = (x + 9) + (6 - x)$
- g) $-(x + 8) + (2x - 4) = 12 - (3x + 48)$
- h) $(3x - 5) - (x + 12) + 1 = 25 - (6x + 9)$

2 Reši enačbe in napravi preizkus.

- a) $3(x - 4) = 36$
- b) $24 = 3(2x - 6)$
- c) $7(x - 3) = x + 3$
- č) $8(x - 8) = 12x + 5(x + 7)$
- d) $2(x - 1) + 5 = 5(x - 3) - 6$
- e) $40 - 2(x + 5) = 3(3x + 1) - 17$
- f) $10 + 5x - (4x - 6) = 9x - 7(x + 1)$
- g) $12 - (5x - 7) = 3x - (3x + 1)$
- h) $15 - (3x - 4) = 2(x - 19) - 3$
- i) $2(x - 4) - (3x - 5) = 3(x - 3) + (x + 1)$
- j) $4(2 - x) - 3(3 - x) = 5(x + 6) - 19$
- k) $12(x + 5) = 8(x - 5) - 60$
- l) $2(x - 1) + 5 = 5(x - 3) - 6$
- m) $13(x - 8) + 7(2x - 19) = 8(x + 5) - 5(19 - x)$

3 Reši enačbe in napravi preizkus.

- a) $(3x - 8)(4x - 5) = (2x - 2)(6x - 17)$
- b) $(x - 1)(4x - 2) - 31 = (2x + 3)(2x + 5)$
- c) $(3x - 2)(2x - 5) = 2(3x + 4)(x - 1) - 45$
- č) $(x - 2)(x - 1) - x(2x - 5) = 14 - (x - 3)(x - 4)$

4 Reši enačbe in napravi preizkus.

- a) $2x(x - 7) + 3x(x + 4) = x(x + 1) + (2x - 3)^2$
- b) $(2x - 5)^2 - 14 = (x - 3)(4x - 7) + 2$
- c) $(4x - 1)^2 - (4x - 7)^2 + 16(x + 1) = 0$
- č) $2(x + 2)^2 + 3 - 42x^2 = 2(2x - 5)^2 - 3(4x + 1)^2$
- d) $(3x - 2)^2 + (4x - 3)^2 = (5x - 4)^2$

ZMOREM TUDI TO**5 Reši enačbi in napravi preizkus.**

- a) $3(2 + 5(x + 7) + 2(7 + 6(x + 1))) = 495$
- b) $(4x - 12((x - 2) + 2))(-5 - (x - 4)) = 8(x - 2)(x + 2)$

6 Reši razcepne enačbe.

- a) $(x - 3)(x + 5) = 0$
- b) $(x +)(x - 0,7) = 0$
- c) $x^2 - 25 = 0$
- č) $x^2 = 36$
- d) $x^2 - 1 = 80$
- e) $3x^2 - 108 = 0$
- f) $x^2 - 10x + 25 = 0$

7 Reši enačbo.

$$3x - (4x - 7 - (8 - (2x - 3) - (5 - x))) = 0$$

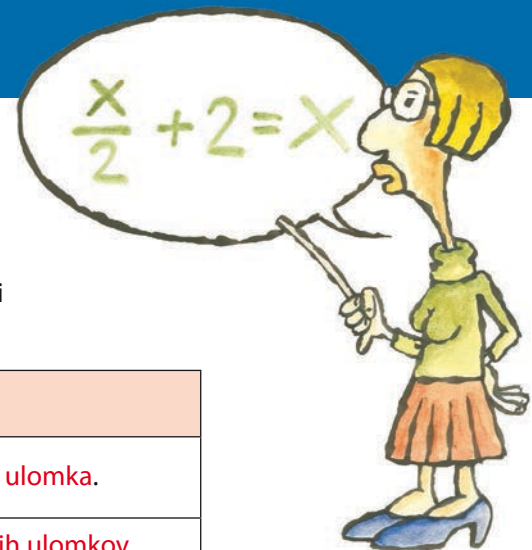
8 Za katero vrednost neznanke x je izraz $5((x - 1)^2 - (x + 1)^2 - 2(2 - 3x))$ enak nič?**9 Razišči, kako je z rešitvami enačb:**

- a) $|2x - 3| = 1$
- b) $3 = |5x - 1|$

1c ENAČBE Z ULOMKI

Izvedel boš:

– kako rešujemo linearne enačbe z ulomki.



Nekateri primeri reševanja enačb z ulomki in njihove bistvene lastnosti so prikazani v preglednici.

primer	opis primera
$\frac{x}{2} + 50 = 3x$	Neznanka x nastopa v števcu ulomka.
$\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + 1\frac{1}{2} = \frac{x}{6} - 1$	Neznanka x nastopa v več števcih ulomkov z različnimi imenovalci.
$\frac{x+2}{2} - 3 = \frac{x}{4}$	Neznanka x nastopa tudi v števcu ulomka, ki je veččlenik.
$\frac{3(x+2)}{13} - \frac{5(x-3)}{7} = \frac{3-2x}{5}$	Neznanka x nastopa v več števcih, ki so produkti enočlenika z veččleniki.



REŠEVANJE ENAČB Z ULOMKI

Enačbe z ulomki rešujemo tako, da najprej vse člene pomnožimo z najmanjšim skupnim večkratnikom vseh imenovalcev, nato pa enačbo ekvivalentno preoblikujemo.



Podobne primere enačb z ulomki boš rešil sam. Lahko si pomagaš z rešenimi primeri v nadaljevanju učbenika.
DZ – naloga 2.5



REŠENI PRIMERI

1 Reši enačbo $\frac{x}{2} + 50 = 3x$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$\frac{x}{2} + 50 = 3x \quad / \cdot 2$$

$$\frac{x \cdot 2}{2} + 50 \cdot 2 = 3x \cdot 2$$

$$x + 100 = 6x$$

$$x - 6x = -100$$

$$-5x = -100$$

$$x = -100 : (-5)$$

$$x = 20$$

Odpravimo ulomek tako, da ...

enačbo množimo s številom 2 (s tem številom pomnožimo vsak člen na levi in desni strani enačbe).

Imenoalec ulomka se okrajša.

Enačbo uredimo.

Skrčimo podobne člene.

Izračunamo vrednost neznanke x .

Preizkus:

$$L: \frac{x}{2} + 50 = \frac{20}{2} + 50 = 10 + 50 = 60$$

$$D: 3x = 3 \cdot 20 = 60$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe: $L = D$; $R = \{20\}$.

- ② Reši enačbo $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + 1\frac{1}{2} = \frac{x}{6} - 1$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} - \frac{x}{3} + \frac{3}{2} &= \frac{x}{6} - 1 \\ \frac{x \cdot \cancel{12} \cdot 3}{\cancel{4}} - \frac{x \cdot \cancel{12} \cdot 4}{\cancel{3}} + \frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot 6}{\cancel{2}} &= \frac{x \cdot \cancel{12} \cdot 2}{\cancel{6}} - 1 \cdot \cancel{12} \\ 3x - 4x + 18 &= 2x - 12 \\ 3x - 4x - 2x &= -12 - 18 \\ -3x &= -30 \\ x &= 10\end{aligned}$$

Vsak člen enačbe pomnožimo s številom 12, ki je najmanjši skupni imenoalec vseh ulomkov v enačbi.

Ulomke okrajšamo in jih tako odpravimo.

Enačbo uredimo.

Enačbo delimo s številom pri neznanki.

Preizkus:

$$\text{L: } \frac{10}{4} - \frac{10}{3} + \frac{3}{2} = \frac{30}{12} - \frac{40}{12} + \frac{18}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\text{D: } \frac{10}{6} - 1 = \frac{10}{6} - \frac{6}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe; $R = \{10\}$.

- ③ Reši enačbo $\frac{x+2}{2} - 3 = \frac{x}{4}$ in napravi preizkus.

Rešitev:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{2} - 3 &= \frac{x}{4} \quad / \cdot 4 \\ \frac{(x+2) \cdot \cancel{4} \cdot 2}{\cancel{2}} - 3 \cdot \cancel{4} &= \frac{x \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} \\ 2(x+2) - 12 &= x \\ 2x + 4 - 12 &= x \\ 2x - x &= 12 - 4 \\ x &= 8\end{aligned}$$

Vse člene enačbe pomnožimo s številom 4, ki je najmanjši skupni imenoalec vseh ulomkov v enačbi.

Ulomke krajšamo – jih tako odpravimo.

Izračunamo produkt faktorja z dvočlenikom.

Uredimo enačbo.

Preizkus:

$$\text{L: } \frac{x+2}{2} - 3 = \frac{8+2}{2} - 3 = \frac{10}{2} - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$\text{D: } \frac{x}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe; $R = \{8\}$.

- ④ Reši enačbo $\frac{3(x+2)}{13} - \frac{5(x-3)}{7} = \frac{3-2x}{5}$ in napravi preizkus.

Rešitev: V enačbi smo posebej pozorni na to, da sta dvočlenika v prvih dveh ulomkih pomnožena s številskim faktorjem in da drugi ulomek odštevamo, kar moramo upoštevati pri množenju dvočlenika.

$$\frac{3(x+2)}{13} - \frac{5(x-3)}{7} = \frac{3-2x}{5} \quad / \cdot 13 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\frac{3(x+2) \cdot 13 \cdot 7 \cdot 5}{13} - \frac{5(x-3) \cdot 13 \cdot 7 \cdot 5}{7} = \frac{(3-2x) \cdot 13 \cdot 7 \cdot 5}{5}$$

$$105(x+2) - 325(x-3) = 91(3-2x)$$

$$105x + 210 - 325x + 975 = 273 - 182x$$

$$105x - 325x + 182x = 273 - 975 - 210$$

$$-38x = -912$$

$$x = 24$$

$$13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$$

Enačbo pomnožimo **13 · 7 · 5**, saj je to najmanjši skupni imenoalec vseh ulomkov: 13, 7 in 5 so tuja si števila.

Ulomke množimo in okrajšamo.

Odpravimo oklepaje.

Uredimo enačbo.

Združimo podobne člene.

Preizkus:

L: $\frac{3(x+2)}{13} - \frac{5(x-3)}{7} = \frac{3(24+2)}{13} - \frac{5(24-3)}{7} = \frac{3 \cdot 26}{13} - \frac{5 \cdot 21}{7} = -9$ **D:** $\frac{3-2x}{5} = \frac{3-2 \cdot 24}{5} = \frac{3-48}{5} = \frac{-45}{5} = -9$

Preizkus pokaže enako vrednost leve in desne strani enačbe; **R** = {24}.



NALOGE ZA VAJO

1 Reši enačbe in naredi preizkus.

a) $\frac{x}{7} = 3$

b) $-5 = \frac{x}{4}$

c) $\frac{3x}{2} = 12$

č) $\frac{5x}{4} = 2\frac{1}{2}$

d) $\frac{3x}{5} = 2,4$

e) $\frac{x}{4} + 1 = 4$

f) $\frac{x}{2} = 6 - x$

g) $\frac{x}{5} + \frac{3}{5} = 2$

h) $\frac{2x}{5} - 3 = 1$

i) $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 42$

j) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} - 7 = \frac{x}{15} - x$

k) $\frac{3x}{2} - 4 = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$

l) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 16 = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$

m) $\frac{7x}{4} - 2\frac{1}{4} = \frac{8x}{5} + 3\frac{3}{5}$

2 Reši enačbe in naredi preizkus.

a) $\frac{4-x}{6} = 2$

b) $\frac{x-3}{2} = 2\frac{1}{2}$

c) $\frac{x-5}{8} = 0,75$

č) $\frac{x+9}{3} = \frac{x}{3} + 4$

d) $\frac{x-3}{3} = \frac{x+2}{4}$

e) $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$

f) $\frac{x+6}{3} = x-4$

g) $\frac{x+2}{4} - 1 = \frac{x}{5}$

h) $\frac{3-x}{4} + \frac{2x-5}{6} = 1$

i) $\frac{x+7}{4} - \frac{x-4}{3} = 2$

j) $\frac{x+2}{5} - \frac{x-2}{6} + \frac{x+4}{2} = 17$

k) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x-2}{2} = \frac{4x}{5} + 6$

l) $\frac{3x-1}{4} = \frac{5x-11}{12} + 1\frac{2}{3}$

ZMOREM TUDI TO

3 Reši enačbe in naredi preizkus.

a) $\frac{2(x-3)}{3} - \frac{x-2}{3} = \frac{x}{6} - \frac{x}{2}$

b) $\frac{5x-1}{4} + \frac{x}{2} = \frac{3-2x}{3} + \frac{7}{36} + \frac{x}{4}$

c) $\frac{4x-9}{10} - \frac{x-5}{5} = \frac{7x+1}{25} - \frac{x-3}{20}$

č) $\frac{7(2x+5)}{3} - \frac{3(5x+7)}{4} = \frac{5-6x}{2}$

d) $\frac{7-3x}{12} - 2(x-2) = \frac{5(5-2x)}{6}$

e) $\frac{4}{5}(2x+3) + 1,5 = \frac{1}{4}(7x-11) + \frac{1}{7}(3x+2)$

f) $\frac{(x-1)(x+5)}{3} - \frac{(x+2)(x+5)}{12} = \frac{(x-1)(x+2)}{4}$

g) $\frac{2}{3} \left(\frac{9}{10}(x-5) \right) + 0,75(x+4) = \frac{3}{7}(3x+3)$

Reševanje neenačb

Znanje, ki smo si ga pridobili pri reševanju linearnih enačb, bomo s pridom uporabili tudi pri reševanju neenačb, saj veljajo skoraj enaka pravila ekvivalentnega preoblikovanja – izjema je množenje neenačb z negativnim številom.



NEENAČBO SPREMENIMO V EKVIVALENTNO:

1. če na obeh straneh neenačbe prištejemo (odštejemo) isto število;
2. če obe strani neenačbe pomnožimo (delimo) z istim pozitivnim številom;
3. če obe strani neenačbe pomnožimo (delimo) z istim negativnim številom, se znak neenakosti obrne.

Rešitev neenačbe je poltrak na številski premici.

Zgled 1: Reši neenačbo: $3x - 5 \leq 7$.

$$\begin{aligned} 3x &\leq 7 + 5 && \text{Število } -5 \text{ prenesemo na desno} \\ &&& \text{stran neenačbe.} \\ 3x &\leq 12 && \text{Neenačbo delimo s številom 3 pri} \\ &&& \text{neznanki } x. \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Rešitev neenačbe so vsa realna števila, ki so manjša ali enaka 4. Na številski premici je to množica točk na realni osi, ki predstavlja na eno stran neomejen poltrak.

Zgled 2: Reši neenačbo: $1 \leq 4x + 9$.

$$\begin{aligned} 4x + 9 &\geq 1 && \text{Zamenjamo levo in desno stran} \\ &&& \text{neenačbe.} \\ 4x &\geq 1 - 9 && \text{Število 9 prenesemo na desno} \\ &&& \text{stran neenačbe.} \\ 4x &\geq -8 && \text{Neenačbo delimo s številom 4} \\ &&& \text{pri neznanki } x. \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

Rešitev neenačbe so vsa realna števila, ki so večja ali enaka -2 . Na številski premici je to množica točk na realni osi, ki predstavlja na eno stran neomejen poltrak.

Zgled 3: Reši neenačbo: $3x + 4 < 5x - 6$.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &< 5x - 6 \\ 3x - 5x &< -6 - 4 \\ -2x &< -10 && / : (-2) \\ x &> 5 \end{aligned}$$

Neenačaj se pri množenju (deljenju) z negativnim številom obrne.



POMNI

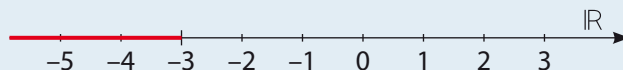
Zakaj se pri množenju (deljenju) z istim negativnim številom znak neenakosti obrne?

Velja torej:

$$1.) -x > b : (-1) \Rightarrow x < -b$$

$$2.) -x < b : (-1) \Rightarrow x > -b$$

Neenačba: $-x > 3$ ($b = 3$), denimo pomeni, da iščemo števila, katerih nasprotna vrednost bo **večja** od števila 3. Rešitev tega pogoja so vsa števila, ki so **manjša** od nasprotne vrednosti števila 3: $x < -3$. To so števila, ki na številski premici ležijo levo od števila -3 . V množici realnih števil je to poltrak.



Reševanje sistema dveh neenačb z eno neznanko

Sistem neenačb z eno neznanko rešimo tako, da posebej rešimo vsako posamezno neenačbo. Rešitev sistema je presek množic rešitev posameznih neenačb. Vsaki neenačbi ustreza poltrak na številski osi.

Ker morata biti pogoja hkrati izpolnjena, velja:

množica rešitev sistema neenačb z eno neznanko je presek množic, ki ju določata obe neenačbi.



POMNI

Neenakost oblike
 $c \leq ax + b \leq d$

lahko zapišemo v obliki sistema dveh enačb:

$$c \leq ax + b \text{ in } ax + b \leq d,$$

kjer upoštevamo:

$$\underbrace{c \leq ax + b}_{1. \text{ neenačba}} \leq d$$

$$c \leq \underbrace{ax + b \leq d}_{2. \text{ neenačba}}$$

Zgled 1: $-1 \leq 2x - 5 \leq 3$

Neenakost zapišemo v obliki sistema dveh linearnih neenačb:

$$-1 \leq 2x - 5 \text{ in } 2x - 5 \leq 3$$

Poiščemo množico rešitev obeh neenačb:

$$-1 \leq 2x - 5$$

$$2x - 5 \geq -1 \quad \text{Zamenjamo levo in desno stran neenačbe.}$$

$$2x \geq -1 + 5 \quad \text{Število } -5 \text{ prenesemo na desno stran.}$$

$$2x \geq 4 \quad \text{Neenačbo delimo s faktorjem 2.}$$

$$x \geq 2$$

Rešitev prve enačbe so vsa realna števila, ki so večja ali enaka 2. Na številski premici je to poltrak.

Tudi drugo neenačbo rešujemo po podobnem postopku:

$$2x - 5 \leq 3$$

$$2x \leq 3 + 5 \quad \text{Število } -5 \text{ prenesemo na desno stran.}$$

$$2x \leq 8 \quad \text{Neenačbo delimo s faktorjem 2.}$$

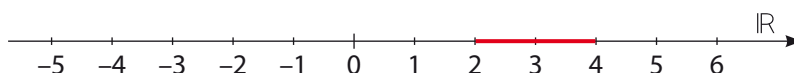
$$x \leq 4$$

Rešitev druge neenačbe so vsa realna števila, ki so manjša ali enaka 4.

Presek rešitev obeh neenačb so števila, ki so večja ali enaka 2 in hkrati manjša ali enaka 4:

$$2 \leq x \leq 4.$$

Množica rešitev dane neenačbe je daljica na številki premici realnih števil.



NALOGE ZA VAJO

1 Reši neenačbe:

a) $3x - 1 \geq 8$

b) $\frac{3}{4}x + 2 \geq 14$

c) $6 + 0,2x \geq 7$

č) $10 \leq 6x + 4$

2 Reši neenačbo in ugotovi ali je $x = -5$ ena od rešitev dane neenačbe.

a) $2x + 11 > 3x + 15$

b) $\frac{3}{4} + 5x \leq 1,25 + 7x$

3 Reši neenačbe:

a) $-5 \leq 3x + 4 \leq -8$

b) $2 \leq 5x - 3 \leq 7$

1d IZRAŽANJE NEZNANIH KOLIČIN IZ FORMUL

Izvedel boš:

— kako izražamo neznane količine iz formul.



Rok razmišlja, ali sme varno stopiti na led na domačem ribniku pred hišo. Led prenese tlak 6000 Pa, Rokova stopala pa merijo 0,12 m². Spomnil se je znanja iz fizike: tlak je količnik med silo, ki deluje pravokotno na ploskev in velikostjo ploskve, na katero ta sila deluje. Meri se v Pa (pascal), kar pomeni $\frac{N}{m^2}$.

RAZMISLI

Kako bi iz fizikalne formule za tlak $p = \frac{F}{S}$ izrazili silo, s katero krpje pritiskajo na podlago?

Pomagamo si lahko z znanjem reševanja enačb, saj si lahko formulo za tlak predstavljamo kot linearno enačbo z ulomki. Če bi iz formule radi izrazili **silo** F , si jo predstavljamo kot iskano količino in jo, po že znanih pravilih reševanja enačb z ulomki, izrazimo iz zapisane enačbe.

$$p = \frac{F}{S}$$

Iskano količino (F) obkrožimo.

$$\frac{F}{S} = p$$

Zamenjamo levo in desno stran enačbe.

$$F = p \cdot S$$

Enačbo pomnožimo s faktorjem S , da odpravimo ulomek.



Če bi iz formule radi izrazili **površino** S , si jo predstavljamo kot iskano količino.

$$p = \frac{F}{S}$$

Iskano količino (S) obkrožimo.

$$p \cdot S = F$$

Enačbo pomnožimo s faktorjem S , da odpravimo ulomek.

$$S = \frac{F}{p}$$

Enačbo delimo s faktorjem p .



FORMULE

Formule obravnavamo enako kot enačbe s številskimi koeficienti: z ekvivalentnimi preoblikovanji iz formule izrazimo iskano količino in nato izračunamo njeno vrednost.



POMNI

Iskano količino v formuli lahko označimo s črko x , pogosto pa jo samo poudarjeno označimo z barvo ali jo obkrožimo.



REŠENI PRIMERI

1 Iz fizikalne formule za električni upor $R = \frac{U}{I}$ izrazi:

a) električno napetost (U)

Rešitev:

$$R = \frac{U}{I}$$

Levo in desno stran zamenjamo, da iskana količina (U) pride na levo stran.

$$\frac{U}{I} = R$$

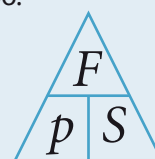
Pomnožimo z imenovalcem (I), da odpravimo ulomek.

$$U = R \cdot I$$



TRIKOTNIK ZA FORMULE

Pri formulah zapisanih v obliki količnika si včasih pomagamo s trikotnikom, ki ga razdelimo na tri polja in vanje vpišemo količine iz formule. Iskano količino dobimo tako, da pokrijemo njeno oznako v trikotniku. Preostali oznaki ti povesta enačbo.



Primer: če želimo iz formule $p = \frac{F}{S}$ izraziti

ploščino (S), dobimo $S = \frac{F}{p}$. Preveri tudi kako bi

iz trikotnika prebral enačbo za računanje sile (F).

b) električni tok (I)

$$R = \frac{U}{I}$$

Iskana količina (I) pride na levo stran z množenjem.

$$\textcircled{I} \cdot R = U$$

Delimo z R , da ostane iskana količina sama na levi strani.

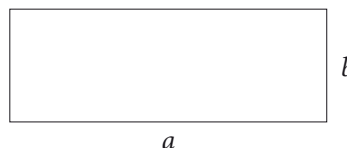
$$I = \frac{U}{R}$$

- ② Zapiši formulo za obseg pravokotnika in iz nje izrazi stranico b . Izračunaj stranico b , če je obseg pravokotnika 56 cm, stranica a pa meri 12 cm.

Rešitev: Formulo za računanje obsega pravokotnika že poznamo: $o = 2a + 2b$.

Iz zapisane formule izrazimo stranico b , po pravilih preoblikovanja linearnih enačb in jo nato izračunamo.

skica:



$$o = 2a + 2b$$

$$2a + 2b = o$$

$$2b = o - 2a$$

$$b = \frac{o - 2a}{2}$$

$$b = \frac{56 - 2 \cdot 12}{2}$$

$$b = \frac{56 - 24}{2}$$

$$b = \frac{32}{2}$$

$$b = 16 \text{ cm}$$

↘ Zamenjamo levo in desno stran enačbe.

↘ Člen z iskano količino zapišemo na levi strani, ostale člene zapišemo na desno.

↘ Enačbo delimo s faktorjem 2 pri iskani količini.

- ③ Razišči, kako je z rešitvami enačbe $2ax = a - b$, če je neznanka x .

Rešitev:

$$2ax = a - b$$

$$x = \frac{a - b}{2a}$$

↘ Enačbo delimo z $2a$, pri čemer je $a \neq 0$.

V danem primeru obstajajo **tri možnosti**:

1. če je število a **različno od nič** ($a \neq 0$), ima enačba natanko eno rešitev, in sicer: $x = \frac{a - b}{2a}$;

2. če je število $a = 0$ in $b \neq 0$, dobimo enačbo oblike: $0x = -b$, kar pomeni, da enačba nima rešitve;

3. če je $a = 0$ in $b = 0$, dobimo enačbo oblike: $0x = 0$, ki ima nešteto rešitev, saj ji ustreza vsako realno število $x \in \mathbb{R}$.

V enačbah, pri katerih v rešitvi nastopa črkovna oznaka (parameter), moramo zanjo izbrati takšno vrednost, da imenovalc ni enak 0.



POZOR!

Enačbe lahko delimo s poljubnim številom, ki more biti različno od 0.

**1 Iz zapisanih matematičnih in fizikalnih formul izrazi zahtevane količine.**

- a) $A = F \cdot s$ F in s
 b) $o = a + b + c$ b in c
 c) $P = \frac{U}{I}$ U in I
 č) $P = O + pl$ O in pl
 d) $P = 2O + pl$ O in pl
 e) $p = \frac{e \cdot f}{2}$ e in f
 f) $W = \frac{mv^2}{2}$ m in v
 g) $p = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$ r in α
 h) $v_2 = v_1 + at$ v_1 in t
 i) $p = \pi r^2$ r
 j) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ R_1 in R_2
 k) $P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ v
 l) $Q = mc(T_2 - T_1)$ m in T_2
 m) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1}{r_2}$ r_1 in F_2

2 Če je $y = 5x + 3$, katera enačba pravilno izraža x v odvisnosti od y ?

- a) $x = \frac{y-3}{5}$ b) $x = \frac{y+3}{5}$
 c) $x = \frac{y}{5} + 3$ č) $x = \frac{y}{5} - 3$

3 Iz formule za dolžino krožnega loka izračunaj polmer krožnice, če je dolžina loka 3π cm in velikost središčnega kota 60° :

- a) tako, da v osnovno formulo vstaviš številske podatke;
 b) tako, da iz formule izraziš polmer krožnice in nato izračunaš njegovo velikost.

4 Iz formule za površino kvadra izračunaj stranico c , če je površina kvadra 240 cm^2 , stranica a meri 10 cm in stranica b 6 cm :

- a) tako, da v osnovno formulo vstaviš številske podatke;
 b) tako, da iz formule izraziš stranico kvadra in nato izračunaš njeno velikost.

5 Reši enačbe, če je x neznanka.

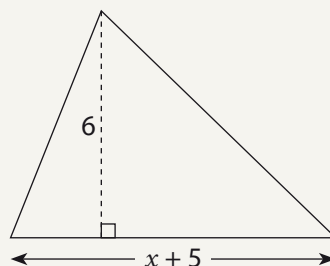
- a) $5x + 6c = 2x - 3c$
 b) $-4x + 1 = m - 3(x - 5m)$
 c) $\frac{1}{3}x - 4z = 3z - \frac{1}{4}x$

6 Razišči, kako je z rešitvami enačb, če je neznanka x . Analiziraj, za katere vrednosti parametra je rešitev smiselna.

- a) $ax = 6$ b) $4x + 8 = a$
 c) $ax + 3 = 4x + 5$ č) $5x + 4 = ax - 8$
 d) $3x + 9 = x + a$ e) $2ax + 4 = 18$
 f) $6x - 6 = 4x - 2a$

ZMOREM TUDI TO**7 Dan je trikotnik z osnovnico $x + 5$ in višino 6 .**

- a) Zapiši formulo za ploščino trikotnika.
 b) Iz formule izrazi vrednost x .
 c) Koliko je vrednost neznanke x , če je ploščina trikotnika 45 cm^2 ?

**8 Reši enačbo in določi vrednost spremenljivke a tako, da bo imela enačba z neznanko x natanko eno rešitev.**

- a) $(a - x)^2 - (2a - x)^2 = 5a^2$
 b) $xa^2 + 7(1 - x) = a + 5 - 3x$
 c) $\frac{a}{3} + \frac{x}{2} = 2a + \frac{ax}{6}$
 č) $ax + 4x = a + 4$
 d) $2a^2 - 18 = ax - 3x$

- 9 a) Iz neenačbe $c \leq a \cdot b$ izrazi količino b .
 b) Iz neenačbe $v_2 \geq v_1 + a \cdot t$ izrazi pospešek a .

2 UPORABA ENAČB PRI REŠEVANJU BESEDILNIH NALOG

Izvedel boš:

– kako uporabljamo enačbe za reševanje različnih nalog z besedilom.

Špela je novega sosedu Jureta vprašala, koliko je star.
Jure ji je odgovoril z uganko: »Če številu mojih let prišteješ 30, dobiš mojo trikratno starost.«

RAZMISLI

Koliko je star Jure?



Pri reševanju podobnih ugank in matematičnih nalog si pomagamo z linearnimi enačbami.
Pri tem je zelo pomembno, da naloge rešujemo sistematično. Najbolje se je držati naslednjih navodil:



POSTOPEK REŠEVANJA NALOG Z BESEDILOM

1. **Pozorno preberemo nalogo.**
2. **Smiselno izberemo neznano količino.** (Običajno je to količina, po kateri sprašuje naloga).
3. Po besedilu naloge **zapišemo enačbo.**
4. **Rešimo enačbo.**
5. **Izračunamo vse neznane količine.**
6. **Preverimo**, ali rešitev ustreza besedilu naloge (naredimo preizkus).
7. **Zapišemo odgovor.**

Z zgornjim navodilom skušajmo rešiti uganko, ki jo je Špeli zastavil Jure.

1 Pozorno preberemo nalogo.

2 Smiselno izberemo neznano količino:

Neznana količina je število Juretovih let: x .

3 Po besedilu zapišemo enačbo ...

Če številu mojih let prišteješ 30, dobiš mojo trikratno starost. → $x + 30 = 3x$

4 in jo rešimo:

$$\begin{aligned}x + 30 &= 3x \\x - 3x &= -30 \\-2x &= -30 \\x &= -30 : (-2) \\x &= 15\end{aligned}$$



POZOR!

Pri vsaki nalogi, ki ima vprašanje podano z besedilom, moramo tudi odgovor zapisati z besedilom.

5 Izračunamo neznano količino:

Neznana količina x označuje Juretovo starost. To je 15 let.

6 Preverimo pravilnost rešitve (po besedilu naloge):

Čez 30 let bo star 45 let, to pa je tudi njegova trikratna starost ($3 \cdot 15 = 45$).

7 Zapišemo odgovor:

Jure je star 15 let.

2a NALOGE O ŠTEVILIH

Izvedel boš:

— kako rešujemo naloge o številih.



V šoli so priredili srečelov. Rok je za vsako ceno hotel izvedeti, katero številko je izvlekla Špela. Špela mu je povedala le, da če od štirikratnika števila odšteje 10, dobi dvakratnik števila.

RAZMISLI

Ali znaš rešiti nalogo na pamet?

Preden rešimo nalogo, si oglejmo, kako zapišemo določene zakonitosti z matematičnimi znaki.

- število x povečaj za 3 $\rightarrow x + 3$
- število x zmanjšaj za 5 $\rightarrow x - 5$
- zapiši sedemkratnik števila $x \rightarrow 7x$
- osemkratnik števila x povečaj za 4 $\rightarrow 8x + 4$
- zapiši tretjino števila $x \rightarrow \frac{x}{3}$
- razpolovi vsoto števil x in 7 $\rightarrow \frac{x + 7}{2}$

Zdaj poskušajmo ugotoviti, katero število je izvlekla Špela.

1 Pozorno preberemo nalogo.

2 Smiselno izberemo neznano količino:

Neznana količina je število, ki ga je izvlekla Špela: x .

3 Po besedilu zapišemo enačbo ...

Če od štirikratnika števila odšteješ 10, dobiš dvakratnik števila. $\rightarrow 4x - 10 = 2x$

4 in jo rešimo:

$$\begin{aligned}4x - 10 &= 2x \\4x - 2x &= +10 \\2x &= +10 \\x &= 5\end{aligned}$$

5 Izračunamo neznano količino:

Neznana količina je število, ki ga je izvlekla Špela. To je 5.

6 Preverimo pravilnost rešitve (po besedilu):

$$\begin{aligned}4 \cdot 5 &= 20 \\2 \cdot 5 &= 10 \\4 \cdot 5 - 10 &= 2 \cdot 5 \quad \text{Štirikratnik je res za 10 večji.}\end{aligned}$$

7 Zapišemo odgovor: Špela je izvlekla število 5.



Samostojno reši naloge o številih.
DZ – naloga 2.6



REŠENI PRIMERI

1 Od katerega števila moramo odšteti 24, da dobimo število 32?

Rešitev:

① **Pozorno preberemo nalogo.**

② **Smiselno izberemo neznano količino:** Iskano število je x .

③ **Po besedilu zapišemo enačbo ...**

Od števila x moramo odšteti število 24, da dobimo število 32. → $x - 24 = 32$

④ **in jo rešimo:** $x - 24 = 32$

$$x = 32 + 24$$

$$x = 56$$

⑤ **Izračunamo neznano količino:** Iskano število je x , to je 56.

⑥ **Preverimo:** $56 - 24 = 32$

⑦ **Zapišemo odgovor:** 24 moramo odšteti od števila 56.

2 Vsota štirih zaporednih naravnih števil je 90. Katera števila so to?

Rešitev: V množici naravnih števil je vsako naslednje število za ena večje od prejšnjega.

① **Pozorno preberemo nalogo.**

② **Smiselno izberemo neznane količine:**

1. iskano število: x

2. iskano število: $x + 1$

3. iskano število: $x + 2$

4. iskano število: $x + 3$

③ **Po besedilu zapišemo enačbo ...**

Vsota štirih zaporednih naravnih števil je 90. → $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 90$

④ **in jo rešimo:** $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 90$

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 90$$

$$x + x + x + x = 90 - 1 - 2 - 3$$

$$4x = 84$$

$$x = 84 : 4$$

$$x = 21$$

⑤ **Izračunamo vse neznane količine:** Dobili smo prvo število x . To je 21. Naslednja števila so:

$x + 1$, to je 22

$x + 2$, to je 23

$x + 3$, to je 24

⑥ **Preverimo,** ali je njihova vsota res 90: $21 + 22 + 23 + 24 = 90$

⑦ **Zapišemo odgovor:** Ta števila so 21, 22, 23 in 24.



POMNI

Neznano sodo število označimo $2x$.

Neznano liho število označimo $2x - 1$.

- ③ Če dvakratniku nekega števila prišteješ 8, dobiš isto, kot če od njegovega trikratnika odšteješ 4. Katero število je to?

Rešitev:

① Pozorno preberemo nalogo.

② Smiselno izberemo neznano količino: Iskano število je x .

③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Dvakratniku števila x prištejemo 8 in dobimo isto, kot če od njegovega trikratnika odštejemo 4. → $2x + 8 = 3x - 4$

④ in jo rešimo: $2x + 8 = 3x - 4$
 $2x - 3x = -4 - 8$
 $-1x = -12$
 $x = -12 : (-1)$
 $x = 12$

⑤ Izračunamo neznano količino: Iskano število je x , to je 12.

⑥ Preverimo: Če dvakratniku števila 12 prištejemo 8, dobimo: $2 \cdot 12 + 8 = 24 + 8 = 32$
Če od trikratnika števila 12 odštejemo 4, dobimo: $3 \cdot 12 - 4 = 36 - 4 = 32$
Obakrat dobimo enako.

⑦ Zapišemo odgovor: To število je 12.

- ④ Če za 8 zvečan trikratnik nekega števila delimo s 5, dobimo število, ki je za 2 manjše od prvotnega števila. Katero število je to?

Rešitev:

① Pozorno preberemo nalogo.

② Smiselno izberemo neznano količino: Iskano število je x .

③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Za 8 zvečan trikratnik števila x delimo s 5 in dobimo število, ki je za 2 manjše od števila x . → $(3x + 8) : 5 = x - 2$

④ in jo rešimo: $(3x + 8) : 5 = x - 2$
 $\frac{3 \cdot x + 8}{5} = x - 2 / \cdot 5$
 $3x + 8 = 5x - 10$
 $3x - 5x = -10 - 8$
 $-2x = -18$
 $x = -18 : (-2)$
 $x = 9$

⑤ Izračunamo neznano količino: Neznano število je x , torej je neznano število 9.

⑥ Preverimo: Za 8 zvečani trikratnik števila 9 delimo s 5: $(3 \cdot 9 + 8) : 5 = (27 + 8) : 5 = 35 : 5 = 7$
Število, ki je za 2 manjše od števila 9: $9 - 2 = 7$
Res dobimo obakrat enako.

⑦ Zapišemo odgovor: To število je 9.

- 5 Če neko število povečamo za 6, je kvadrat novega števila za 144 večji od kvadrata prvotnega števila. Katero število je to?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine:

za 6 zvečano število: $x + 6$

kvadrat iskanega števila: x^2

kvadrat zvečanega števila: $(x + 6)^2$

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Če število x zvečamo za 6, je kvadrat novega števila za 144 večji od kvadrata števila x . $\rightarrow (x + 6)^2 = x^2 + 144$

- ④ in jo rešimo: $(x + 6)^2 = x^2 + 144$

$$x^2 + 12x + 36 = x^2 + 144$$

$$x^2 - x^2 + 12x = 144 - 36$$

$$12x = 108$$

$$x = 108 : 12$$

$$x = 9$$

- ⑤ Izračunamo neznano količino: Iskano število je x , torej je to število 9.

- ⑥ Preverimo: Kvadrat števila $(x + 6)$ je $(9 + 6)^2 = 15^2 = 225$.

Kvadrat števila 9 je $9^2 = 81$.

Razlika je $225 - 81 = 144$.

- ⑦ Zapišemo odgovor: To število je 9.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Če neko število povečaš za 19, dobiš 37. Katero število je to?
- 2 Če neko število zmanjšaš za 28, dobiš 25. Katero število je to?
- 3 Petkratnik katerega števila je število 75?
- 4 Tretjina katerega števila je število 16?
- 5 Če neko število zmanjšaš za njegovo četrtno, dobiš število 33. Katero število je to?
- 6 Špela je v nalogah z besedilom pri zapisovanju enačb naredila nekaj napak. Popravi te napake in reši naloge.
- a) S katerim številom moraš pomnožiti vsoto števil 9 in 15, da dobiš 192?
 $9 + 15x = 192$
- b) Če trikratnik nekega števila povečaš za 18, dobiš 51. Katero število je to?
 $x + 18 = 51$
- c) Če od polovice neznanega števila odšteješ 6, dobiš tretjino neznanega števila. Katero število je to?
 $\frac{x}{2} - 6 = \frac{1}{3}$
- č) Vsota treh zaporednih naravnih števil je 102. Katera števila so to?
 $x + x + x = 102$

7 Špela in Rok sta reševala nalogo z besedilom: če od števila 222 odšteješ trikratnik neznanega števila, dobiš število, ki je za 7 večje od dvakratnika neznanega števila. Katero število je to? Rok je dobil rezultat 215, Špela pa 43. Kdo je imel prav?

8 S katerim številom moraš pomnožiti vsoto števil 5 in 17, da dobiš šestkratnik števila 33?

9 Roku se je list z nalogami polil s kakavom in del zapisa se mu je izbrisal. Dopolni zapise in jih reši.

a) Če neko število povečaš za njegov petkratnik, dobiš 78. Katero število je to?

$$\text{ } + 5x = 78$$

b) Če trikratniku nekega števila prišteješ 17, dobiš isto, kot če od njegovega petkratnika odšteješ 7. Katero število je to?

$$3x + 17 = \text{ }$$

c) Katero število moraš prišteti k dvakratniku števila 17, da dobiš za 8 zmanjšan trikratnik danega števila?

$$\text{ } = 3x - 8$$

č) Če trikratnik nekega števila zmanjšaš za njegovo polovico, dobiš dvakratnik istega števila, povečan za 4. Katero število je to?

$$3x - \text{ } + 4$$

10 Če vsoti treh zaporednih naravnih števil prišteješ 8, dobiš 50. Katera števila so to?

11 Če od 80 odšteješ štiri zaporedna naravna števila, dobiš 46. Katera števila so to?

12 Katera tri zaporedna soda števila moraš sešteti, da dobiš število 66?

13 Vsota štirih zaporednih sodih števil je 108. Katera števila so to?

14 Vsota dveh zaporednih lihih števil je 112. Kateri števili sta to?

15 Vsota treh zaporednih lihih števil je 63. Katera števila so to?

16 Katero število moraš prišteti k številu 37, da bo produkt njune vsote s številom 8 enak 416?

ZMOREM TUDI TO

17 Za 11 zvečani šestkratnik neznanega števila moraš deliti s 5, da dobiš število, ki je za 5 manjše od dvakratnika neznanega števila. Katero število je to?

18 Pri katerem številu je vsota njegove polovice in njegove osmine za sedem večja od njegove tretjine?

19 Pri katerem številu moraš vsoto iskanega števila in števila 8 pomnožiti s 6, da dobiš dvakratnik števila, povečan za 60?

20 Pri katerem številu je njegova osmina za 3 manjša od njegove šestine?

21 Če pomnožiš vsoto nekega števila in števila 6 z razliko tega števila in števila 4, dobiš kvadrat tega števila, zmanjšan za 2. Katero število je to?

22 Za 8 zvečan kvadrat nekega števila je enak produktu danega števila s številom, ki je za 2 večje od danega števila. Katero število je to?

23 Če neko število zmanjšaš za 8, je kvadrat novega števila za 144 manjši od kvadrata prvotnega števila. Katero število je to?

2b NALOGE O STAROSTI

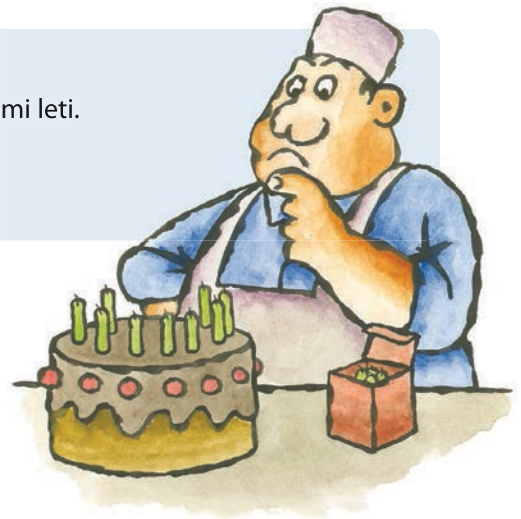
Izvedel boš:

– kako rešujemo naloge o starosti.

Simona bo čez 4 leta dvakrat starejša, kot je bila pred tremi leti.

RAZMISLI

Kako naj Rok ugotovi Simonino starost?



Tudi pri reševanju nalog, povezanih s starostjo, si lahko pomagamo z uporabo enačb. Rešujemo jih podobno kot naloge o številih, le da za boljše razumevanje iskane količine uredimo v preglednico. Oglejmo si najprej nekaj primerov:

- Matej je star 14 let. Čez 5 let → bo star $(14 + 5)$ let
Čez x let → bo star $(14 + x)$ let
Pred 8 leti → je bil star $(14 - 8)$ let
Pred y leti → je bil star $(14 - y)$ let
- Sonja je stara x let. Čez 6 let → bo stara $(x + 6)$ let.
- Marko je star 8 let, Peter pa je dvakrat starejši od njega. → Peter je star $2 \cdot 8$ let, to je 16 let.
- Kaja je stara x let, mati pa je štirikrat starejša od nje. → Mati je stara $4x$ let.
- Oče je star 36 let, Meta pa je dopolnila šestino njegovih let. → Meta je stara $36 \text{ let} : 6 = \frac{36}{6} \text{ let} = 6 \text{ let}$.
- Mati je stara x let, Ana pa je dopolnila četrtno njenih let. → Ana je stara $\frac{x}{4}$ let.

Poglejmo zdaj, kako je Rok izračunal Simonino starost.

- 1 **Pozorno je prebral nalogo.**
- 2 **Izbral je neznano količino:** Simonina starost je x let.
in naredil razpredelnico:

	danes	čez 4 leta	pred 3 leti
Simona	x	$x + 4$	$x - 3$

- 3 **Po besedilu je zapisal enačbo ...**

Simona bo čez 4 leta dvakrat starejša, kot je bila pred 3 leti. → $x + 4 = 2(x - 3)$

- 4 **in jo rešil:**

$$\begin{aligned}x + 4 &= 2(x - 3) \\x + 4 &= 2x - 6 \\x - 2x &= -6 - 4 \\-1x &= -10 \\x &= -10 : (-1) \\x &= 10\end{aligned}$$

- 5 **Izračunal je neznano količino:** Simona je stara x let – to je 10 let.
Čez 4 leta bo stara $10 + 4$ leta – to je 14 let.
Pred 3 leti je bila stara $10 - 3$ leta – to je 7 let.
- 6 **Preveril je pravilnost rešitve:** Dvokratnik števila 7 je 14, torej bo Simona čez 4 leta res dvakrat starejša kot pred 3 leti.
- 7 **Zapisal je odgovor:** Simona je stara 10 let.



POMNI

Pri nalogah o starosti je koristno neznane količine urediti v preglednico.



Samostojno reši naloge o starosti.
DZ – naloga 2.7





REŠENI PRIMERI

- 1 Oče je štirikrat starejši od Mojce, čez 4 leta pa bo le še trikrat starejši od nje. Koliko sta stara?

Rešitev:

- 1 Pozorno preberemo nalogo.
- 2 Smiselno izberemo neznano količino: Mojčina starost je x .
in naredimo razpredelnico:

	danes	čez 4 leta
Mojca	x	$x + 4$
oče	$4x$	$4x + 4$

- 3 Po besedilu zapišemo enačbo ...

Zanima nas dogodek čez 4 leta, ko bo oče trikrat starejši od Mojce. → $4x + 4 = 3(x + 4)$

- 4 in jo rešimo: $4x + 4 = 3(x + 4)$
 $4x + 4 = 3x + 12$
 $4x - 3x = 12 - 4$
 $x = 8$

- 5 Izračunamo vse neznane količine: Mojca je stara x let, torej 8 let.
Oče je štirikrat starejši od nje, torej je star $4 \cdot 8 = 32$ let.
- 6 Preverimo: Mojca je stara 8 let, čez 4 leta bo stara 12 let.
Oče je star 32 let, čez 4 leta bo star 36 let, to je res $3 \cdot 12$.
- 7 Zapišemo odgovor: Mojca je stara 8 let, oče pa 32.

- 2 Sosedovi trije otroci so stari 10 let, 13 let in 15 let, njihova mati pa 36 let. Pred koliko leti so bili vsi trije otroci skupaj stari toliko kot mati?

Rešitev:

- 1 Pozorno preberemo nalogo.
- 2 Smiselno izberemo neznano količino: pred x leti
in naredimo razpredelnico:

	danes	pred x leti
1. otrok	10	$10 - x$
2. otrok	13	$13 - x$
3. otrok	15	$15 - x$
mati	36	$36 - x$

- 3 Po besedilu zapišemo enačbo ...

Pred x leti so bili vsi trije otroci skupaj stari toliko kot mati. → $(10 - x) + (13 - x) + (15 - x) = 36 - x$

- 4 in jo rešimo: $(10 - x) + (13 - x) + (15 - x) = 36 - x$
 $10 - x + 13 - x + 15 - x = 36 - x$
 $-x - x - x + x = 36 - 10 - 13 - 15$
 $-2x = -2$
 $x = -2 : (-2)$
 $x = 1$

- 5 Izračunamo vse neznane količine: 1. otrok je bil pred 1 letom star $(10 - 1)$ let = 9 let
2. otrok je bil pred 1 letom star $(13 - 1)$ let = 12 let
3. otrok je bil pred 1 letom star $(15 - 1)$ let = 14 let
mati je bila pred 1 letom stara $(36 - 1)$ let = 35 let
- 6 Preverimo: Pred 1 letom so bili vsi trije otroci skupaj stari $(9 + 12 + 14)$ let = 35 let.
Mati je bila stara 35 let – to je toliko, kot vsi trije otroci skupaj.
- 7 Zapišemo odgovor: Pred 1 letom so bili vsi trije otroci skupaj stari toliko kot mati.

- ③ Pred osmimi leti je bila mati desetkrat starejša od sina in petkrat starejša od hčere, čez pet let pa bo imela 8 let več, kot bo skupna starost obeh otrok. Koliko so stari danes?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.
 ② Smiselno izberemo neznano količino: Materina starost pred 8 leti je x .
 in naredimo razpredelnico:

	pred 8 leti	danes	čez 5 let
mati	x	$x + 8$	$(x + 8) + 5$
sin	$\frac{x}{10}$	$\frac{x}{10} + 8$	$\left(\frac{x}{10} + 8\right) + 5$
hči	$\frac{x}{5}$	$\frac{x}{5} + 8$	$\left(\frac{x}{5} + 8\right) + 5$



- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Čez 5 let bo imela mati 8 let več kot oba otroka skupaj. $\rightarrow (x + 8) + 5 = \left(\frac{x}{10} + 8\right) + 5 + \left(\frac{x}{5} + 8\right) + 5 + 8$

- ④ in jo rešimo:

$$\begin{aligned}
 (x + 8) + 5 &= \left(\frac{x}{10} + 8\right) + 5 + \left(\frac{x}{5} + 8\right) + 5 + 8 \\
 x + 8 + 5 &= \left(\frac{x}{10} + 8 + 5 + \frac{x}{5} + 8 + 5\right) + 8 \\
 x + 8 + 5 &= \frac{x}{10} + 8 + 5 + \frac{x}{5} + 8 + 5 + 8 \\
 x - \frac{x}{10} - 8 - 5 &= 8 + 5 + 8 + 5 + 8 - 8 - 5 \cdot 10 \\
 10x - x - 2x &= 80 + 50 + 80 + 50 + 80 - 80 - 50 \\
 7x &= 210 \\
 x &= 210 : 7 \\
 x &= 30
 \end{aligned}$$

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: Danes je mati stara $x + 8$ let – to je 38 let,
 čez 5 let pa bo imela $38 + 5 = 43$ let.
 Sin je danes star 11 let, čez 5 let pa bo star 16 let.
 Hči je danes stara 14 let, čez 5 let pa bo imela 19 let.
- ⑥ Preverimo: Mati bo imela čez 5 let 43 let, sin in hči skupaj pa $16 + 19 = 35$ let.
 Materina starost bo res 8 let več kot skupna starost obeh otrok.
- ⑦ Zapišemo odgovor: Zdaj je mati stara 38 let, sin 11 let in hčerka 14 let.



- 1 Koliko je star Marko, če bo čez 8 let trikrat starejši, kot je danes?
- 2 Mati je sedemkrat starejša od hčere, skupaj pa imata 40 let. Koliko sta stari?
- 3 Oče je 4 leta starejši od matere, skupaj pa imata 76 let. Koliko sta stara?
- 4 Marko je star 14 let, Luka pa je 8 let mlajši od njega. Čez koliko let bo Marko dvakrat starejši kot Luka?
- 5 Oče je devetkrat starejši od hčere, ki je stara 6 let. Čez koliko let bo le še trikrat starejši od nje?
- 6 Mati je petkrat starejša od sina, čez 6 let pa bo le še trikrat starejša od njega. Koliko sta stara?
- 7 Peter je trikrat starejši od Anje, pred dvema letoma pa je bil petkrat starejši od nje. Koliko sta stara?
- 8 Pred koliko leti je bil oče devetkrat starejši od sina, če sta danes stara 12 oziroma 44 let?
- 9 Oče je star 46 let, njegovi otroci pa 16, 18, 20 in 24 let. Čez koliko let bodo otroci skupaj dvakrat starejši od očeta?

ZMOREM TUDI TO

- 10 Janko in Metka sta skupaj stara 28 let, čez 6 let pa bo Janko štirikrat starejši od Metke. Koliko sta stara?
- 11 Meta ima 12 let, Jure pa četrtno njenih let. Čez koliko let bo Meta dvakrat starejša od Jureta?
- 12 Jaka ima četrtno Tininih let, čez 8 let pa bo Tina dvakrat starejša od njega. Koliko sta stara?
- 13 Koliko je stara Kaja, če je imela pred 6 leti $\frac{3}{4}$ starosti, ki jo bo imela čez 2 leti?
- 14 Simon ima petino maminih let, Peter pa je 6 let mlajši od materine polovične starosti. Koliko so stari, če imajo skupaj 62 let?
- 15 Ugotovi, čez koliko let bodo Novakovi skupaj stari 222 let, če je mati tri leta mlajša od očeta, dvojčka, ki sta dve leti mlajša od Špele, imata tretjino maminih let, vsi otroci skupaj pa so stari 41 let?
- 16 Jure je star 12 let, njegova mati pa 36 let. Torej je mati trikrat starejša od Jureta. Ali bo čez 2 leti mati še vedno trikrat starejša od Jureta? Odgovor utemelji.



Izvedel boš:

— kako rešujemo naloge iz geometrije.

Rok je za zabavo želel narediti tablice z imeni iz 28 cm dolgih trakov. Tablice naj bi bile od strani videti kot enakokraki trikotnik, s kraki 2 cm daljšimi od osnovnice.

RAZMISLI

Na katerih mestih mora prepogniti papir?



Pri reševanju geometrijskih nalog si pomagamo z enačbami tako, da znane podatke vstavimo v veljavne geometrijske obrazce, neznano količino pa izračunamo. Za boljše razumevanje običajno narišemo skico.

Rok se je naloge lotil podobno kot nalog s števili in o starosti.

1 **Pozorno je prebral nalogo.**

2 **Izbral je neznano količino:** Dolžina osnovnice c je x .
 Krak a je 2 cm daljši od osnovnice: $x + 2$.

in narisal skico.

3 **Po besedilu je zapisal formulo za obseg ...**

Obseg enakokrakega trikotnika je enak vsoti dolžin vseh stranic. → $o = 2a + c$

4 **in jo rešil:**
 $28 = 2(x + 2) + x$
 $28 = 2x + 4 + x$
 $-2x - x = 4 - 28$
 $-3x = -24$
 $x = -24 : (-3)$
 $x = 8 \text{ cm}$

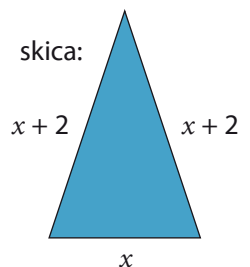
Izračunal je dolžino osnovnice.

5 **Izračunal je vse neznane količine:** Dolžina osnovnice je x , torej je 8 cm.

Dolžina kraka pa je $x + 2$, torej je $(8 + 2) \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.

6 **Preveril je pravilnost rešitve:** $2 \cdot 10 + 8 = 20 + 8 = 28$

7 **Zapisal je odgovor:** Trak mora prepogniti tako, da bo ena stranica dolga 8 cm, dve pa 10 centimetrov.



POMNI

Pri nalogah iz geometrije je pogosto pametno narisati skico.



Samostojno reši naloge iz geometrije.
DZ – naloga 2.8



REŠENI PRIMERI

1 **Širina pravokotnika je za 3 cm krajša od osnovnice, njegov obseg pa meri 38 cm. Izračunaj ploščino tega pravokotnika.**

Rešitev:

Če želimo izračunati ploščino pravokotnika, moramo poznati dolžini obeh stranic. Pomagamo si z enačbo za obseg pravokotnika, ki ga poznamo.

1 **Pozorno preberemo nalogo.**

2 **Smiselno izberemo neznane količine:** Dolžina osnovnice je neznana količina: x .
 Širina pa je za 3 cm krajša od osnovnice: $x - 3$.

in narišemo skico.

- ③ **Zapišemo formulo** za obseg pravokotnika. Ker je obseg pravokotnika $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, lahko zapišemo:

$$38 = 2x + 2(x - 3)$$

- ④ **in jo rešimo:** $38 = 2x + 2(x - 3)$

$$38 = 2x + 2x - 6$$

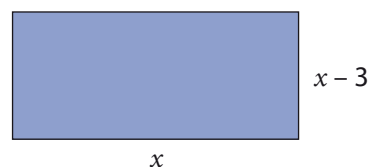
$$-2x - 2x = -6 - 38$$

$$-4x = -44$$

$$4x = 44$$

$$x = 11 \text{ cm}$$

Izračunali smo dolžino osnovnice.



- ⑤ **Izračunamo vse neznane količine:** Osnovnica meri x cm, to je 11 cm.

Širina pa je 3 cm krajša od osnovnice, torej $x - 3 = (11 - 3) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$.

- ⑥ **Preverimo:** $o = 2a + 2b = 2 \cdot 11 + 2 \cdot 8 = 22 + 16 = 38$; $o = 38 \text{ cm}$.

Rezultat je pravilen, torej lahko izračunamo še ploščino tega pravokotnika:

$$p = a \cdot b$$

$$p = 11 \cdot 8$$

$$p = 88 \text{ cm}^2$$

- ⑦ **Zapišemo odgovor:** Ploščina tega pravokotnika meri 88 cm^2 .

- ② **Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika, če je kot α za 50° večji od kota β , kot γ pa je za 20° manjši od kota β .**

Rešitev: Upoštevamo, da je vsota vseh notranjih kotov trikotnika vedno 180° .

Velikosti kotov α in γ sta podani glede na velikost kota β , ki je ne poznamo.

- ① **Pozorno preberemo nalogo.**

- ② **Smiselno izberemo neznane količine:**

Velikost kota β je neznana količina: $\beta = x$.

Kot α je za 50° večji od kota β : $\alpha = x + 50^\circ$.

Kot γ je za 20° manjši od kota β : $\gamma = x - 20^\circ$.

in narišemo skico.

- ③ **Zapišemo formulo** za vsoto notranjih kotov. Vemo, da je vsota

notranjih kotov $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; lahko zapišemo $(x + 50^\circ) + x + (x - 20^\circ) = 180^\circ$

- ④ **in jo rešimo:** $(x + 50^\circ) + x + (x - 20^\circ) = 180^\circ$

$$x + 50^\circ + x + x - 20^\circ = 180^\circ$$

$$x + x + x = 180^\circ - 50^\circ + 20^\circ$$

$$3x = 150^\circ$$

$$x = 150^\circ : 3$$

$$x = 50^\circ$$

Izračunali smo velikost kota β .

- ⑤ **Izračunamo vse neznane količine:** Kot β meri x , to je 50° .

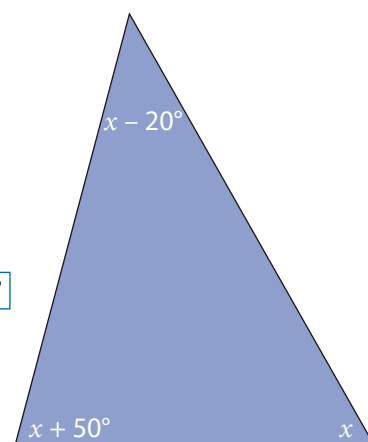
Kot α meri $x + 50^\circ$, to je $50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$.

Kot γ pa meri $x - 20^\circ$, to je $50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$.

- ⑥ **Preverimo vsoto notranjih kotov trikotnika:**

Njihova vsota je $50^\circ + 100^\circ + 30^\circ = 180^\circ$.

- ⑦ **Zapišemo odgovor:** Notranji koti trikotnika merijo: $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$ in $\gamma = 30^\circ$.



- ③ Če v kvadratu povečamo dolžino osnovnice za 6 cm, se ploščina novega kvadrata poveča za 144 cm^2 .
Izračunaj obseg prvotnega kvadrata.

Rešitev: Če želimo izračunati obseg kvadrata, moramo poznati dolžino stranice.

- ① **Pozorno preberemo nalogo.**

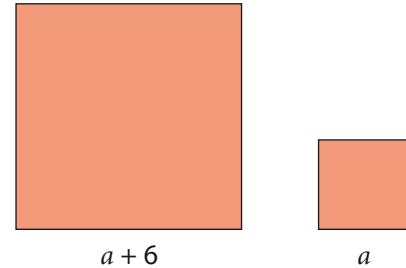
- ② **Smiselno izberemo neznane količine:**

Stranica kvadrata je neznana količina: a .

Ploščina kvadrata: a^2 .

Povečana stranica: $a + 6$.

Ploščina novega kvadrata: $(a + 6)^2$.



in narišemo skico.

- ③ **Po besedilu zapišemo enačbo ...**

Ploščina novega kvadrata je za 144 cm^2 večja od ploščine prvotnega kvadrata. $\rightarrow (a + 6)^2 = a^2 + 144$

- ④ **in jo rešimo:** $(a + 6)^2 = a^2 + 144$

$$a^2 + 12a + 36 = a^2 + 144$$

$$a^2 - a^2 + 12a = 144 - 36$$

$$12a = 108$$

$$a = 108 : 12$$

$$a = 9 \text{ cm}$$

Izračunali smo dolžino stranice prvotnega kvadrata.

- ⑤ **Izračunamo vse neznane količine:** Stranica prvotnega kvadrata meri a cm, torej meri 9 cm.

Stranica novega kvadrata pa meri $a + 6$, to je $9 + 6 = 15$; torej meri 15 cm.

- ⑥ **Preverimo:** Ploščina prvotnega kvadrata je $(9 \text{ cm})^2 = 81 \text{ cm}^2$.

Ploščina novega kvadrata je $(15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$.

Ploščini se res razlikujeta za 144 cm^2 .

- ⑦ **Zdaj lahko izračunamo še obseg prvotnega kvadrata:**

$$o = 4a$$

$$o = 4 \cdot 9$$

$$o = 36 \text{ cm}$$

Zapišemo odgovor: Obseg prvotnega kvadrata meri 36 cm.

- ④ Izračunaj obseg in ploščino pravokotnega trikotnika, če meri ena kateta 12 cm, druga kateta pa je 8 cm krajša od hipotenuze.

Rešitev: Upoštevamo, da je obseg trikotnika enak vsoti vseh treh stranic, ploščina pa polovici produkta obeh katet. Pri reševanju si pomagamo s Pitagorovim izrekom.

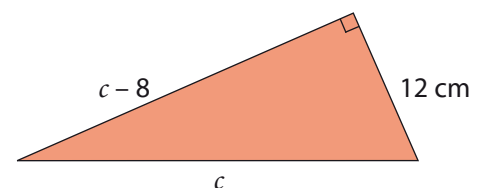
- ① **Pozorno preberemo nalogo.**

- ② **Smiselno izberemo neznane količine:** Dolžina hipotenuze je neznana količina: c .

1. kateta je 8 cm krajša od hipotenuze: $c - 8$.

2. kateta meri 12 cm.

in narišemo skico.



③ **Po besedilu zapišemo ...**

Pitagorov izrek. $\rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = (c - 8)^2 + 12^2$$

④ **in ga rešimo:** $c^2 = (c - 8)^2 + 12^2$

$$c^2 = c^2 - 16c + 64 + 144$$

$$c^2 - c^2 + 16c = 64 + 144$$

$$16c = 208$$

$$c = 208 : 16$$

$$c = 13 \text{ cm}$$

Izračunali smo dolžino hipotenuze.

⑤ **Izračunamo vse neznane količine:** Dolžina hipotenuze je c , torej je 13 cm.

Dolžina prve katete pa je $c - 8 = 13 - 8 = 5$,
torej je dolžina katete 5 cm.

⑥ **Preverimo:** Kvadrat hipotenuze je $13^2 = 169$.

Vsota kvadratov obeh katet je $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Zdaj izračunamo še obseg in ploščino tega pravokotnega trikotnika:

$$o = a + b + c$$

$$o = 5 + 12 + 13$$

$$o = 30 \text{ cm}$$

$$p = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$p = \frac{5 \cdot 12}{2}$$

$$p = 30 \text{ cm}^2$$

⑦ **Zapišemo odgovor:** Obseg trikotnika meri 30 cm, ploščina pa 30 cm^2 .

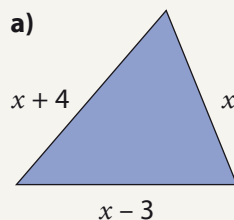


NALOGE ZA VAJO

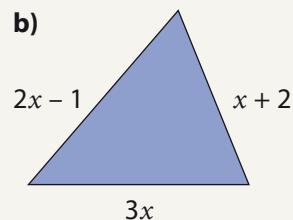
- ① V trikotniku je stranica b za 4 cm krajša od stranice a , stranica c pa je za 6 cm daljša od stranice a . Izračunaj dolžine stranic, če meri obseg tega trikotnika 38 cm.
- ② Obseg trikotnika meri 42 cm, vsaka stranica pa je za 3 cm daljša od prejšnje. Koliko merijo stranice tega trikotnika?
- ③ V pravokotniku je dolžina za 7 cm daljša od višine, obseg pa meri 66 cm. Izračunaj dolžini obeh stranic in ploščino tega pravokotnika.

- ④ Obseg narisane trikotnika meri 49 cm. Izračunaj dolžine stranic.

a)

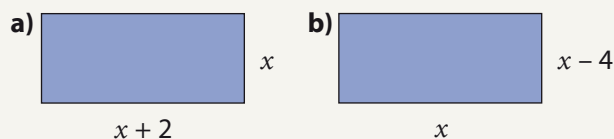


b)

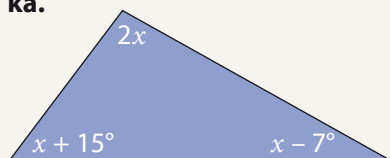


- ⑤ Njiva v obliki pravokotnika je trikrat daljša od širine. Izračunaj ploščino te njive, če so za ograjo potrebovali 32 m žice.

- 6 Obseg narisane pravokotnika je 56 cm. Izračunaj dolžine stranic in ploščino pravokotnika.



- 7 V enakokrakem trikotniku meri kot ob vrhu 30° . Koliko merita kota ob osnovnici?
- 8 V poljubnem štirikotniku je kot α za 30° večji od kota β , kot γ je za 40° manjši od kota β , kot δ pa je za 20° večji od kota α . Koliko merijo koti štirikotnika?
- 9 Špela je izračunala, da meri najmanjši kot trikotnika na sliki 40° . Ali je izračunala pravilno? Zapiši velikosti vseh kotov narisane trikotnika.



- 10 V pravokotnem trikotniku je en ostri kot za 30° večji od drugega. Koliko merijo koti tega pravokotnega trikotnika?
- 11 V trikotniku je prvi notranji kot dvakrat večji od drugega, tretji pa je za 15° manjši od prvega. Koliko merijo?

ZMOREM TUDI TO

- 12 Pravokotnik in kvadrat imata enako ploščino. Osnovnica pravokotnika je za 4 cm daljša od stranice kvadrata, višina pravokotnika pa je za 3 cm krajša od stranice kvadrata. Koliko merijo stranice obeh likov?

- 13 Stranica kvadrata je za 3 cm krajša od osnovnice pravokotnika, višina pravokotnika pa je 5 cm krajša od osnovnice pravokotnika. Kvadrat in pravokotnik imata enaki ploščini. Izračunaj dolžine stranic obeh likov in njuna obsega.

- 14 V pravokotniku meri stranica a 32 cm. Če osnovnico zmanjšamo za 8 cm, višino pa povečamo za 3 cm, sta ploščini obeh pravokotnikov enaki. Izračunaj obe višini in oba obsega.

- 15 Če kvadratu zmanjšamo stranico za 3 cm, je ploščina novega kvadrata za 57 cm^2 manjša od ploščine prvotnega kvadrata. Koliko merita stranici obeh kvadratov? Za koliko cm se razlikujeta obsega?

- 16 Pravokotnika z osnovnicama 16 cm in 12 cm imata enaki ploščini. Izračunaj obe višini in oba obsega, če veš, da je višina prvega pravokotnika za 3 cm krajša od višine drugega pravokotnika.

- 17 Višina pravokotnika je 9 cm krajša od osnovnice. Če samo osnovnico povečamo za 5 cm, se ploščina pravokotnika poveča za 44 cm^2 . Izračunaj dolžini stranic obeh pravokotnikov.

- 18 V pravokotnem trikotniku meri ena kateta 24 cm, vsota hipotenuze in druge katete pa je 32 cm. Izračunaj dolžine stranic ter obseg in ploščino tega trikotnika.

- 19 V pravokotnem trikotniku meri daljša kateta 15 cm, druga kateta pa je za 9 cm krajša od hipotenuze. Izračunaj dolžine stranic ter obseg in ploščino tega trikotnika.

2č NALOGE IZ VSAKDANJKA

Izvedel boš:

— kako rešujemo naloge iz vsakdanjika.



Špela je na smučanje vzela 40 €. Za smučarsko vozovnico je zapravila trikrat toliko denarja kot za enolončnico, za razglednice pa je plačala 2 € več kot za enolončnico. Ostalo ji je še 13 €.

RAZMISLI

Koliko denarja je Špela porabila za posamezne stvari?

Tudi pri reševanju nalog iz vsakdanjika si pomagamo z uporabo enačb.

Špela je denar porabila za vozovnico, za enolončnico in za razglednice, ostalo pa ji je 13 evrov.

1 Pozorno preberemo nalogo.

2 Smiselno izberemo neznane količine:

Za enolončnico je Špela porabila neznano vsoto denarja: x .

Za vozovnico je porabila trikrat toliko kot za enolončnico: $3x$.

Za razglednice je porabila 2 € več kot za enolončnico: $(x + 2)$ €.

Ostalo ji je še 13 €.

3 Po besedilu zapišemo enačbo ...

Če seštejemo ves porabljeni denar in ostanek, dobimo ravno Špelinih 40 €. → $x + 3x + (x + 2) + 13 = 40$

4 in jo rešimo:

$$x + 3x + (x + 2) + 13 = 40$$

$$x + 3x + x + 2 + 13 = 40$$

$$x + 3x + x = 40 - 2 - 13$$

$$5x = 25$$

$$x = 25 : 5$$

$$x = 5$$



5 Izračunamo vse neznane količine:

Za enolončnico je porabila x evrov, to je 5 €.

Za vozovnico je porabila $3x$, torej $3 \cdot 5$ €, to je 15 €.

Za razglednice $(5 + 2) = 7$ €, ostalo pa ji je 13 €.

6 Preverimo, ali ji je res ostalo 13 evrov:

$$40 - 5 - 15 - 7 = 13$$

Da, res ji je ostalo 13 €.

7 Zapišemo odgovor:

Špela je za enolončnico porabila 5 €, za vozovnico 15 € in za razglednice 7 €.



Samostojno reši vsakdanje naloge.
DZ – naloga 2.9



REŠENI PRIMERI

- ① V razredu je 23 učencev. Koliko je dečkov in koliko deklic, če je deklic 5 več kot dečkov?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine:

Število dečkov: n .

Deklic je 5 več kot dečkov: $n + 5$.

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Dečkov in deklic skupaj je 23. → $n + (n + 5) = 23$

- ④ in jo rešimo: $n + (n + 5) = 23$

$$n + n + 5 = 23$$

$$2n = 23 - 5$$

$$2n = 18$$

$$n = 9$$

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: Število dečkov je n , torej je dečkov 9.

Deklic pa je $n + 5$, to je $9 + 5 = 14$.

- ⑥ Preverimo: Dečkov in deklic skupaj je $9 + 14 = 23$. Toliko pa je res vseh učencev v razredu.

- ⑦ Zapišemo odgovor: V razredu je 9 dečkov in 14 deklic.



- ② Metka je želela kupiti 8 zvezkov, a so imeli le zvezke s trdimi platnicami, ki so bili za 40 centov dražji. Tako je za isti denar lahko kupila le 6 zvezkov. Koliko je plačala za vsak zvezek?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine:

Cena zvezka je neznana količina: c .

Cena zvezka s trdimi platnicami je 40 centov večja: $c + 40$.

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

8 zvezkov po stari ceni je enako kot 6 zvezkov po novi ceni. → $8c = 6 \cdot (c + 40)$

- ④ in jo rešimo: $8c = 6 \cdot (c + 40)$

$$8c = 6c + 240$$

$$8c - 6c = 240$$

$$2c = 240$$

$$c = 120$$

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: Stara cena zvezka je c , torej 120 centov ali 1,20 €.

Nova cena je $c + 40$, kar znaša $(120 + 40)$ centov = 160 centov, torej 1,60 €.

- ⑥ Preverimo: 8 zvezkov po 120 centov stane $8 \cdot 120$ centov = 960 centov

6 zvezkov po 160 centov stane $6 \cdot 160$ centov = 960 centov

Res je obakrat plačala enako.

- ⑦ Zapišemo odgovor: Nova cena zvezka je 160 centov ali 1,60 €.

- ③ Ob koncu šolskega leta so učenci devetega razreda odšli na sladoled. Vsak si je izbral eno kepico sladoleda. 6 učencev je izbralo jagodni sladoled, tretjina vseh učencev je izbrala vanilijev sladoled, 25 % učencev je izbralo sladoled z okusom limone, šestina učencev pa je izbrala čokoladnega. Koliko je bilo vseh učencev v razredu in koliko učencev je izbralo posamezen okus?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine: Število vseh učencev je x .

Jagodni sladoled je izbralo: 6 učencev.

Vanilijev sladoled je izbrala tretjina vseh učencev: $\frac{1}{3}$ od $x = \frac{x}{3}$.

Limonin sladoled je izbralo 25 % učencev: 25 % od $x = \frac{25}{100} \cdot x = \frac{x}{4}$.

Čokoladni sladoled je izbrala šestina učencev: $\frac{1}{6}$ od $x = \frac{x}{6}$.

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Vsi učenci so vsota učencev, ki so izbrali posamezen okus sladoleda. $\rightarrow x = 6 + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}$

- ④ in jo rešimo: $x = 6 + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} / \cdot 12$

$$12x = 72 + 4x + 3x + 2x$$

$$12x - 4x - 3x - 2x = 72$$

$$3x = 72$$

$$x = 24$$

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: Vseh učencev je x , kar je 24.

Vanilijev sladoled je izbralo $\frac{x}{3}$ učencev, kar je $\frac{24}{3} = 8$ učencev.

Limonin sladoled je izbralo 25 % učencev, kar je 6 učencev.

Čokoladni sladoled je izbrala šestina učencev, kar je $\frac{24}{6} = 4$ učenci.

- ⑥ Preverimo: Vsota vseh učencev je: $6 + 8 + 6 + 4 = 24$, kar je res število vseh učencev.

- ⑦ Zapišemo odgovor: Vseh učencev je 24. Šest jih je izbralo jagodni sladoled, osem jih je izbralo vanilijev sladoled, šest jih je izbralo limonin sladoled, štirje pa so izbrali čokoladni sladoled.

- ④ V dveh oddelkih devetega razreda je skupaj 44 učencev. Če bi iz a oddelka prestavili v b oddetek 2 učenca, bi jih bilo v obeh oddelkih enako. Koliko učencev je v posameznem oddelku?

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine: Število učencev v 9.a oddelku: x ; število učencev v 9.b oddelku: $44 - x$.

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Če iz a oddelka prestavimo dva učenca v b oddetek, jih bo v obeh oddelkih enako. $\rightarrow x - 2 = (44 - x) + 2$

- ④ in jo rešimo: $x - 2 = (44 - x) + 2$

$$x - 2 = 44 - x + 2$$

$$x + x = 44 + 2 + 2$$

$$2x = 48$$

$$x = 24$$

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: V 9.a oddelku je x učencev, torej 24.

V 9.b oddelku pa $44 - x$, to je $44 - 24 = 20$ učencev.

- ⑥ Preverimo: Če premestimo iz a oddelka 2 učenca v b oddetek, jih v a oddelku ostane $24 - 2 = 22$.

Če prestavimo 2 učenca iz a v b oddetek, jih bo v b oddelku $20 + 2 = 22$.

- ⑦ Zapišemo odgovor: V 9.a oddelku je 24 učencev, v 9.b oddelku pa 20.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Na prireditvi se je zbralo 408 ljudi. Odraslih je bilo 184 več kot otrok. Koliko je bilo otrok in koliko odraslih?
- 2 Pri likovnem krožku je 17 učencev več kot pri literarnem. Na skupni razstavi je bilo 59 izdelkov – vsak učenec je razstavil en izdelek. Koliko otrok je pri likovnem in koliko pri literarnem krožku, če vsak obiskuje samo en krožek?
- 3 Nagradni izlet si je prislužilo 53 učencev: za učni uspeh 18 učencev več kot za športne dosežke, za uspehe na natečajih 7 učencev manj kot za učni uspeh. Koliko je bilo posameznih nagrajencev, če je bil vsak učenec nagrajen le enkrat?
- 4 Trije dečki so zaslužili 50 €. Prvi je dobil 18 € več kot drugi, tretji pa dvakrat toliko kot drugi. Koliko denarja je dobil vsak?
- 5 Babica je štirim vnukom prispevala k žepnini. Najstarejši je dobil 7,50 € več kot najmlajši, drugi je dobil 2 € manj kot najstarejši, tretji pa 1 € več kot najmlajši. Koliko je dobil vsak, če je babica razdelila 30 €?
- 6 Če bi na izlet odšli vsi učenci, bi vsak moral plačati 5 €. Ker pa so trije učenci zboleli, je moral vsak plačati 5,50 €. Koliko učencev je odšlo na izlet?
- 7 Miha je imel toliko denarja, da bi lahko kupil 12 vrtnic. Ker pa so v cvetličarni ceno vrtnic znižali za 70 centov, jih je lahko kupil 15. Kolikšna je bila nova cena vrtnice?
- 8 Špela je prvi dan prebrala $\frac{1}{3}$ knjige, drugi dan $\frac{2}{5}$ celotne knjige, tretji dan pa preostalih 80 strani. Koliko strani ima knjiga?
- 9 Kmetje so prvi dan pokosili $\frac{1}{4}$ travnika, drugi dan $\frac{2}{3}$ travnika, tretji dan pa preostale 4 hektare. Kako velik je travnik?
- 10 Rok ima tri palice z dolžinami v celih decimetrih. S pomočjo žepnega računalnika razišči, kakšne so lahko dolžine palic, da bo z njimi Rok lahko sestavil trikotnik, če je ena palica za 3 dm daljša od druge, tretja pa ima polovico dolžine prve palice (razišči obe možnosti). Kako bi se spremenila dolžina palic, če bi bile dolžine lahko v dm izražene z eno decimalko?



ZMOREM TUDI TO

- 11 Koliko meri posestvo, če je $\frac{1}{3}$ posestva gozd, $\frac{2}{5}$ so travniki, 10 % so njive, preostalih 20 hektarjev pa so vinogradi?
- 12 Koliko denarja je imela Špela, če ga je četrtno porabila za majico, 20 % za zvezke, $\frac{2}{5}$ za živila, preostalih 3,75 € pa za revije?
- 13 Koliko udeležencev je imela država na olimpijadi, če jih je 5 % tekmovalo v plavanju, četrtna v igrah z žogo, 15 % v atletiki, osmina v borilnih veščinah, desetina v preostalih športnih panogah, 65 pa je bilo spremljevalcev?
- 14 Kmet je prvi teden prodal četrtno celotnega pridelka krompirja, drugi teden polovico ostanke, tretji teden pa še preostalih 2400 kg. Koliko kg krompirja je pridelal?
- 15 Rok je prvi mesec zbral $\frac{2}{5}$ vseh sličic za album, drugi mesec četrtno manjkajočih sličic in tretji mesec še preostalih 108 sličic. Koliko sličic je v albumu?
- 16 Učenci obeh devetih oddelkov so zbrali 840 kg papirja. Če bi zbrali v a oddelku 80 kg več, bi imela oba oddelka enako količino papirja. Koliko papirja je zbral posamezen oddelek?
- 17 Kaja in Jure sta porabila 20 €. Če bi Kaja zapravila 1,80 € manj, bi zapravila oba enako. Koliko denarja je zapravil vsak?
- 18 Špela in Rok imata skupaj 210 sličic. Če jih da Rok Špeli 15, jih bo imel dvakrat toliko kot Špela. Koliko sličic ima vsak?
- 19 Na razstavi se je v dveh razstavnih prostorih zbralo 60 ljudi. Če bi iz enega prostora odšlo v drug prostor 6 ljudi, bi bilo v drugem prostoru dvakrat toliko ljudi kot v prvem. Koliko ljudi je v posameznem prostoru?
- 20 Na šoli se je maskiralo 64 učencev višje stopnje. Če bi se tri poljubne maske našemile v živali, bi bilo živalskih mask trikrat več kot preostalih. Koliko učencev je bilo maskiranih v živali?

2d NALOGE O GIBANJU

Izvedel boš:

— kako rešujemo naloge o gibanju.



Rok se je dogovoril s prijateljem Petrom, ki je doma v 56 km oddaljenem kraju, da se sestaneta nekje med obema krajema. Oba sta krenila s kolesi na pot ob 8. uri. Rok je vozil kolo s povprečno hitrostjo 16 km/h, Peter pa s povprečno hitrostjo 12 km/h.

RAZMISLI

Kdaj in kje se bosta srečala?

Pri gibanju so najpomembnejše količine **pot** (s), **čas** (t) in **hitrost** (v). Iz fizike vemo, da je dolžina prepotovane poti pri enakomernem gibanju odvisna od hitrosti, s katero se gibljemo, in od časa gibanja.

$$s = v \cdot t$$

To upoštevamo tudi pri nalogah o gibanju. Naloge rešujemo podobno kot naloge o številih, le da moramo še posebno pozornost nameniti enotam.



POMNI

Pri nalogah o gibanju je pogosto pametno narisati skico.

1 **Pozorno preberemo nalogo.**

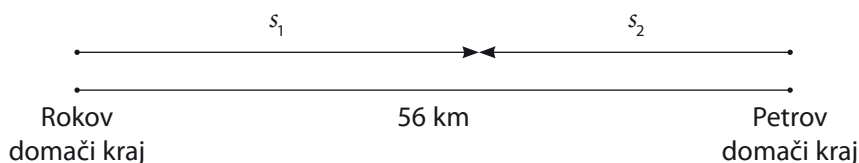
2 **Smiselno izberemo neznane količine:**

Ker sta Rok in Peter na pot krenila sočasno, sta do srečanja oba porabila enak čas t .

Rokova pot: $s_1 = v_1 \cdot t$

Petrova pot: $s_2 = v_2 \cdot t$

in narišemo skico:



3 **Po besedilu zapišemo enačbo ...**

Vsota obeh poti, ki jih opravita Rok in Peter, je enaka razdalji med krajema – to je 56 km. $\rightarrow s_1 + s_2 = 56$

4 **in jo rešimo:**

$$s_1 + s_2 = 56$$

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 56$$

$$16 \cdot t + 12 \cdot t = 56$$

$$28t = 56$$

$$t = 56 : 28$$

$$t = 2$$

Izračunali smo čas, ki sta ga porabila za vožnjo do srečanja.



5 **Izračunamo vse neznane količine:** Ko se srečata, sta na poti 2 uri.

Rokova pot: $s_1 = v_1 \cdot t$, to je $16 \cdot 2$; 32 km.

Petrova pot: $s_2 = v_2 \cdot t$, to je $12 \cdot 2$; 24 km.

6 **Preverimo pravilnost rešitve:** Rok in Peter sta prevozila 32 km + 24 km = 56 km dolgo pot.

To pa je res razdalja med krajema.

7 **Zapišemo odgovor:** Rok in Peter se srečata čez 2 uri (ob 10. uri), ko je Rok prevozil 32 km, Peter pa 24 km.



REŠENI PRIMERI

- ① Avto prevozi neko razdaljo v 4 urah. Če hitrost poveča za 20 km/h, isto razdaljo pri enakomerni vožnji prevozi v 3 urah. Izračunaj obe hitrosti in dolžino prevožene poti.

Rešitev:

- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine: Avto vozi z neznano hitrostjo: v .

Povečana hitrost: $v + 20$.

Prevožena pot je odvisna od hitrosti in od časa: $s = v \cdot t$.

- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Pot, ki jo s hitrostjo v prevozi v 4 urah, je enaka poti, ki jo s hitrostjo $(v + 20)$ prevozi v 3 urah.

- ④ in jo rešimo:

$$\begin{aligned}s_1 &= s_2 \\ v \cdot 4 &= (v + 20) \cdot 3 \\ 4v &= 3v + 60 \\ 4v - 3v &= 60 \\ v &= 60\end{aligned}$$

Izračunali smo neznano hitrost avtomobila v km/h.

- ⑤ Izračunamo vse neznane količine: Prvotna hitrost je v , torej 60 km/h.

Povečana hitrost je $v + 20$, to je 80 km/h.

- ⑥ Preverimo, ali sta obe poti res enaki: $s_1 = 60 \cdot 4 = 240$ km

$$s_2 = 80 \cdot 3 = 240 \text{ km}$$

- ⑦ Zapišemo odgovor: Ko avto prevozi določeno razdaljo v 4 urah, vozi s hitrostjo 60 km/h, ko pa jo prevozi v 3 urah, vozi s hitrostjo 80 km/h. Pri tem prevozi razdaljo 240 km.

- ② Iz Ljubljane odpelje v Maribor ob 7. uri kolesar, ki vozi s povprečno hitrostjo 16 km/h. Ob 11. uri pa odpelje za njim avtobus, ki vozi s povprečno hitrostjo 64 km/h. Kdaj in kako daleč od Ljubljane bo avtobus dohitel kolesarja?



Rešitev:

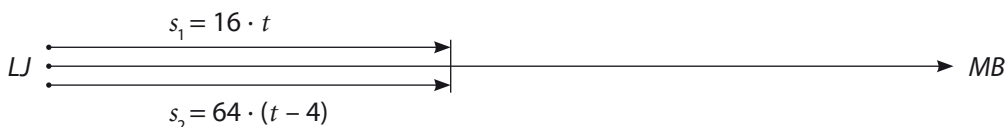
- ① Pozorno preberemo nalogo.

- ② Smiselno izberemo neznane količine:

Kolesar je porabil t ur.

Avtobus je porabil $(t - 4)$ ure, ker se je odpeljal na pot 4 ure kasneje kot kolesar.

in narišemo skico:



- ③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Ko avtobus dohiti kolesarja, sta oba opravila enako dolgo pot. $\rightarrow s_1 = s_2$

④ in jo rešimo:

$$s_1 = s_2$$

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

$$16t = 64(t - 4)$$

$$16t = 64t - 256$$

$$16t - 64t = -256$$

$$-48t = -256$$

$$t = \frac{256}{48}$$

$$t = 5\frac{1}{3}$$

Izračunali smo čas, ki ga je porabil kolesar.

⑤ Izračunamo vse neznane količine:

Avtobus dohiti kolesarja, ko je le ta na poti t ur, torej $5\frac{1}{3}$ ure, to je 5 ur in 20 minut.

Avtobus je pri tem na poti $t - 4$ ur, torej $5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$ ur, to je 1 uro in 20 minut.

⑥ Preverimo, ali sta pri tem opravila enako pot:

kolesar: $s = 16 \cdot 5\frac{1}{3}$; torej $85\frac{1}{3}$ km

avtobus: $s = 64 \cdot 1\frac{1}{3}$; torej $85\frac{1}{3}$ km

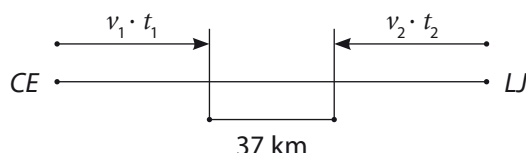
⑦ Zapišemo odgovor: Avtobus dohiti kolesarja, ko je ta na poti 5 ur in 20 minut, to je ob 12. uri in 20 minut. V tem času sta prevozila $85\frac{1}{3}$ km dolgo pot.

③ Iz Celja v 75 km oddaljeno Ljubljano se ob 8. uri odpravi kolesar s povprečno hitrostjo 18 km/h, iz Ljubljane v Celje pa istočasno kolesar s povprečno hitrostjo 20 km/h. Čez koliko časa bosta še 37 km narazen?

Rešitev:

① Pozorno preberemo nalogo.

② Smiselno izberemo neznano količino: Oba bosta na poti t ur: $t_1 = t_2 = t$.
in narišemo skico:



③ Po besedilu zapišemo enačbo ...

Pot, ki jo bosta do takrat opravila oba skupaj ($s_1 + s_2$), bo enaka $(75 - 37)$ km. $\rightarrow s_1 + s_2 = 75 - 37$

④ in jo rešimo: $s_1 + s_2 = 75 - 37$

$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 75 - 37$$

$$18t + 20t = 38$$

$$38t = 38$$

$$t = 38 : 38$$

$$t = 1$$

Izračunali smo čas vožnje kolesarjev.

⑤ Izračunamo neznane količine: Čas, ki ga porabita, je t , torej je to 1 ura.

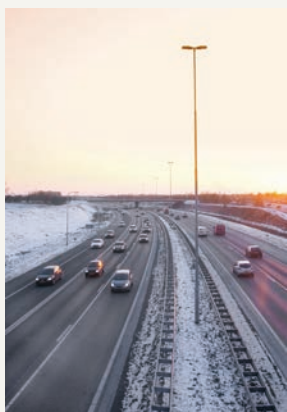
⑥ Preverimo: Čez 1 uro bo prvi kolesar opravil $18 \cdot 1$; torej 18 km dolgo pot, drugi kolesar pa $20 \cdot 1$; torej 20 km dolgo pot. Skupaj sta prevozila $(18 + 20)$ km = 38 km dolgo pot.
Kolesarja sta med seboj oddaljena še 75 km - 38 km = 37 km.

⑦ Zapišemo odgovor: Čez 1 uro bosta kolesarja še 37 km narazen.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Če vozi kolesar z določeno hitrostjo, pride iz kraja *A* v kraj *B* v 4 urah, če pa poveča hitrost za 4 km/h, prevozi isto razdaljo v 3 urah. Kakšna je razdalja med krajema *A* in *B* in s kakšno hitrostjo vozi kolesar?
- 2 Avto prevozi določeno razdaljo v 45 minutah ($\frac{3}{4}$ ure). Če želi razdaljo prevoziti v 40 minutah ($\frac{2}{3}$ ure), mora hitrost povečati za 3 km/h. Kolikšno razdaljo bo prevozil in s kakšno hitrostjo?
- 3 Ob 8. uri se odpelje kolesar s hitrostjo 12 km/h. S kolikšno hitrostjo se mora ob 9. uri za njim odpeljati drug kolesar, da ga bo dohitel ob 11. uri?
- 4 Avto se ob 7. uri odpelje s hitrostjo 54 km/h v 450 km oddaljeni kraj *B*. S kolikšno hitrostjo se mora iz kraja *B* ob 9. uri odpeljati drug avto, da se srečata ob 12. uri?
- 5 Pešca, ki sta drug od drugega oddaljena 33 km, se sočasno odpravita drug proti drugemu. Prvi hodi s hitrostjo 5 km/h, drugi pa s hitrostjo 6 km/h. Kdaj in kje se bosta srečala?
- 6 Pešec in kolesar, ki sta 60 km narazen, se ob 7. uri odpravita drug proti drugemu. Pešec hodi s hitrostjo 6 km/h, kolesar pa se vozi s hitrostjo 18 km/h. Kdaj in kje se bosta srečala?
- 7 Avtomobila, ki sta 250 km narazen, se ob 9. uri odpeljeta drug proti drugemu. Prvi vozi s hitrostjo 50 km/h, drugi pa s hitrostjo 65 km/h. Ali se bosta ob 11. uri že srečala?
- 8 Marko, ki hodi s hitrostjo 6 km/h, se ob 7. uri odpravi na pot. Ob 10. uri pa se s kolesom za njim odpelje Peter, ki vozi s hitrostjo 15 km/h. Kdaj in kje bo Peter dohitel Marka?
- 9 Ob 9. uri se Špela s kolesom odpravi proti 47 km oddaljenemu kraju. Vozi s hitrostjo 14 km/h. Kaja pa ji gre ob 11. uri nasproti peš s hitrostjo 5 km/h. Kdaj in kje se bosta srečali?
- 10 Jure se ob 8. uri odpelje s kolesom in vozi s hitrostjo 20 km/h. Ob 10. uri pa se za njim odpelje oče z avtomobilom in vozi s hitrostjo 60 km/h. Kdaj bo oče dohitel Jureta in kolikšno pot bosta do takrat opravila?
- 11 Kolesar in vlak sta drug od drugega oddaljena 210 km. Ob 10. uri se odpravita drug proti drugemu, kolesar s hitrostjo 18 km/h, vlak pa s hitrostjo 62 km/h. Kdaj bosta še 50 km oddaljena drug od drugega?
- 12 Dva tovornjaka sta drug od drugega oddaljena 500 km. Prvi vozi s hitrostjo 54 km/h, drugi pa s hitrostjo 64 km/h. Čez koliko časa bosta še 87 km narazen, če vozita drug proti drugemu?



3 SISTEM DVEH LINEARNIH ENAČB Z DVEMA NEZNANKAMA

Izvedel boš:

— kaj je sistem enačb in kako lahko rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama.



Špela je Roku povedala, da si je izmislila dve naravni števili in ga izzvala, da ugane, kateri dve. Zaupala mu je, da je vsota teh dveh števil sedem, če pa od prvega števila odšteje dvakratnik drugega števila, dobi razliko ena.

RAZMISLI

Kako bi lahko uganil števili, ki si jih je izmislila Špela?
Ali bi lahko zapisal matematični izraz za Špeline trditve?

Rok je napel možgane in razmislil, katera števila bi sploh lahko bila rešitev Špeline uganke.

Glede na to, da je vsota obeh števil sedem, je hitro določil vse možne pare takih naravnih števil:

(6, 1), (5, 2) in (4, 3).

Potem je preveril drugi del Špelinega namiga, ki pravi, da je razlika med prvim številom in dvakratnikom drugega števila, ena:

$$(6, 1) \rightarrow 6 - 2 \cdot 1 = 4$$

$$(5, 2) \rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$(4, 3) \rightarrow 4 - 2 \cdot 3 = -1$$

Ugotovil je, da si je Špela izmislila števili 5 in 2. Špela je potrdila Rokovo rešitev in bila prijetno presenečena nad njegovo iznajdljivostjo.

Rešitev takšnih in podobnih ugank pa ni vedno tako preprosta. V bolj zapletenih primerih se reševanja lotimo po določenem postopku, brez ugibanja.

Izkaže se, da Špelina uganke vsebuje dve enačbi v katerih nastopata dve neznanki:

Besedilo	Zapis z enačbo
»Vsota dveh števil je sedem.«	$x + y = 7$
»Če od prvega števila odštejemo dvakratnik drugega števila, dobimo ena.«	$x - 2y = 1$



POMNI

V takšnih primerih pravimo, da rešujemo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama. Rešiti tak sistem pomeni, da moramo poiskati par števil, ki ustreza obema enačbama.

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama bomo reševali **na dva načina**:

a) Zamenjalni način

Iz ene od obeh enačb izrazimo eno od neznank in ta izraz vstavimo v drugo enačbo.

To pomeni, da vrednost ene neznanko **zamenjamo** z drugo in od tod ime »zamenjalni« način.

S tem dobimo linearno enačbo z eno neznanko, ki jo izračunamo po že znanem postopku:

Primer: $x + y = 7$ in $x - 2y = 1$

Iz prve enačbe izrazimo neznanko x : $x = 7 - y$ in jo vstavimo v drugo enačbo:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 1 \\7 - y - 2y &= 1\end{aligned}$$

Enačbo uredimo:

$$\begin{aligned}-3y &= 1 - 7 \\-3y &= -6 \\y &= 2\end{aligned}$$

Dobljeno vrednost vstavimo v eno od enačb in izračunamo še neznanko x :

$$\begin{array}{ll}x + 2 = 7 & \text{ali} & x - 2y = 1 \\x = 7 - 2 & & x = 1 + 2y \\x = 5 & & x = 5\end{array}$$

Rešitev sistema sta števili $x = 5$ in $y = 2$.

b) Način nasprotnih koeficientov

Eno ali obe enačbi pomnožimo tako, da dobimo pred isto neznanko v obeh enačbah **nasprotna koeficienta**.

Enačbi nato seštejemo in s tem izločimo eno neznanko. Pri tem načinu, zaradi seštevanja enačb, pišemo enačbi v stolpec, eno pod drugo, pod njima pa narišemo črto – podobno kot pri pisnem seštevanju. Pri tem pazimo, da je zapis urejen in da so iste neznanke napisane ena pod drugo:

$$\begin{array}{r}x + y = 7 \quad / \cdot 2 \text{ (enačbo pomnožimo z 2)} \\x - 2y = 1 \\ \hline 2x + 2y = 14 \\ x - 2y = 1 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 2x + 2y = 14 \\ x - 2y = 1 \end{array}} \right\} + \\ \hline 3x + 0 = 15 \\ x = 5\end{array}$$

Vrednost neznanke x vstavimo v eno od obeh enačb in dobimo še vrednost neznanke y :

$$\begin{array}{ll}5 + y = 7 & \text{ali} & 5 - 2y = 1 \\y = 7 - 5 & & -2y = -4 \\y = 2 & & y = 2\end{array}$$

Rešitev po drugem načinu je seveda enaka kot pri prvem načinu.

Izkaže se, da je podobno kot pri linearnih enačbah z eno neznanko, tudi pri sistemu dveh enačb z dvema mogoče, da rešitev ne obstaja ali pa da jih je neskončno veliko.



REŠENI PRIMERI

1 Reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama na najbolj primeren način:

$$4y - 3x = 9 \quad \text{in} \quad 2x - 8y + 22 = 0.$$

Rešitev: Obe enačbi najprej uredimo, tako, da sta zapisani v enaki obliki:

$$-3x + 4y = 9 \quad \text{in} \quad 2x - 8y = -22.$$

Glede na to, da so pri vseh neznankah v obeh enačbah koeficienti različna števila, je najenostavnejši način za reševanje način z nasprotnimi koeficienti.

Prva možnost je, da odpravimo neznanko x , kar naredimo tako, da prvo enačbo pomnožimo z 2 in drugo s 3. Druga možnost, ki jo bomo pokazali v rešenem primeru pa je, da odpravimo neznanko y , kar naredimo tako, da samo prvo enačbo pomnožimo z 2:

$$\begin{array}{r} -3x + 4y = 9 \quad / \cdot 2 \\ 2x - 8y = -22 \\ \hline -6x + 8y = 18 \\ 2x - 8y = -22 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} -6x + 8y = 18 \\ 2x - 8y = -22 \end{array}} \right\} + \\ \hline -4x + 0 = -4 \\ x = 1 \end{array}$$

Vrednost neznanke x vstavimo v eno od enačb in izračunamo še vrednost neznanke y :

$$\begin{aligned} -3 \cdot 1 + 4y &= 9 \\ -3 + 4y &= 9 \\ 4y &= 12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Rešitev sistema enačb sta števili $x = 1$ in $y = 3$.

2 Vsota dveh števil je 39, njuna razlika pa je 9. Kateri števili sta to?

Rešitev: Najprej po besedilu zapišemo dve enačbi z dvema neznankama:

$$x + y = 39 \quad \text{in} \quad x - y = 9.$$

Sistem enačb lahko rešimo na oba načina, saj sta v tem primeru oba načina enostavna.

Pokažimo rešitev z zamenjalnim načinom. Iz prve enačbe izrazimo vrednost neznanke x :

$$x = 39 - y$$

in jo vstavimo v drugo enačbo:

$$\begin{aligned} 39 - y - y &= 9 \\ 39 - 2y &= 9 \\ -2y &= 9 - 39 \\ -2y &= -30 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Vrednost neznanke y vstavimo v eno od obeh enačb in izračunamo še vrednost neznanke x :

$$\begin{aligned} x + y &= 39 \\ x + 15 &= 39 \\ x &= 39 - 15 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Iskani števili sta števili 24 in 15.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama z zamenjalnim načinom:

a) $4x - 2y = 4$ in $x + y = 13$
b) $-3x + y + 7 = 0$ in $2x + 3y = 1$

- 2 Reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama na način z nasprotnimi koeficienti:

a) $-4x + 3y = -1$ in $9x - 4y + 6 = 0$
b) $2x - 3y = 4$ in $8x - 12y = 15$

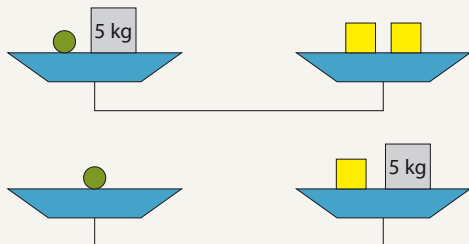
- 3 Reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama na najbolj primeren način:

a) $2x + 3y = 7$ in $x - y = 6$
b) $3x + 4y + 2 = 0$ in $-2x - 3y = 1$

- 4 Reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama tako, da enačbi najprej urediš:
 $3(x - 2) + y + 5 = 2$ in $4(x + 4) + 3(y - 1) = 12$

ZMOREM TUDI TO

- 5 S pomočjo slike zapiši sistem dveh enačb z dvema neznankama in ugotovi maso kroglice in maso kocke.



- 6 Če k dvakratniku prvega števila prišteješ trikratnik drugega števila, dobiš število 38. Kateri števili sta to, če je njuna razlika 4?
- 7 Na parkirnem prostoru so avtomobili in mopedi, skupaj jih je 24. Koliko je avtomobilov in koliko mopedov, če veš, da je vseh koles na parkirišču 78?

- 8 Podjetje je za neko delo najelo 8 mojstrov in 6 pomočnikov ter jim za en dan dela plačalo 1440 €. Drugi dan je prišlo 5 mojstrov in 2 pomočnika, njihovo plačilo pa je bilo 760 €. Koliko je zaslužil mojster in koliko pomočnik?
- 9 Učenec na tekmovanju reši 34 nalog in osvoji 44 točk. Za vsako pravilno rešeno nalogo je dobil dve točki, za vsako nepravilno pa se mu ena točka odšteje. Koliko nalog je rešil pravilno in koliko nepravilno?
- 10 Obseg pravokotnika meri 40 cm. Koliko merita stranici, če je dolžina za 4 cm večja od širine?
- 11 V pravokotnem trikotniku se ostra notranja kota razlikujeta za 18° . Koliko merijo notranji koti v tem pravokotnem trikotniku?
- 12 Na prireditvi je prišlo 75 otrok in odraslih. Prireditelji so vsakemu otroku namenili 2 kosa peciva, vsakemu odraslemu pa en kos peciva. Koliko je bilo na prireditvi otrok in koliko odraslih, če so razdelili 130 kosov peciva in so od tega 10 kosov pojedli prireditelji?
- 13 Na vsakoletni 75 kilometrski tek v Logarsko dolino se tekmovalci lahko odpravijo kot tekači ali kot kolesarji. Ugotovi, koliko je bilo na prireditvi tekačev in koliko kolesarjev, če so sodelovali trije kolesarji več kot je polovično število vseh tekačev in so vsi, ki so prišli na cilj, skupaj premagali 26700 km dolgo pot, če veš, da sedmim tekačem ni uspelo priti do cilja.

4 ALGEBRSKE ENAČBE – ENAČBE Z NEZNANKO V IMENOVALCU

NEOBVEZNE
VSEBINE

Izvedel boš:

– kaj so algebrske enačbe, kako jih rešujemo in kdaj take enačbe niso rešljive.



Rok je imel doma veliko posodo s frnikulami, saj jih je več let vneto zbiral. Odločil se je, da jih bo razdelil svojim najboljšim prijateljem v razredu. Frnikule je naprej preštel in ugotovil je, da jih ima 60. Štiri frnikule, ki so mu še posebej všeč, želi zadržati zase.

RAZMISLI

Koliko prijateljev lahko obdari, da mu na koncu ostanejo še 4 priljubljene frnikule?
Koliko prijateljev je obdaril, če dobi vsak 7 frnikul?

Glede na to, da želi zadržati štiri frnikule, je Rok moral poiskati delitelje števila 56:

$$D_{56} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

To pomeni, da bi lahko obdaril 1, 2, 4, 7, 8, 14 ali 28 sošolcev.

Isti problem bi lahko zapisali tudi v obliki ulomka, kjer je neznanka » x « v imenovalcu ulomka:

$$\frac{56}{x}$$

V tem primeru je neznanka x število obdarjenih prijateljev.

V primeru, ko dobi vsak 7 frnikul, lahko zapišemo enačbo:

$$\frac{56}{x} = 7$$

Rešitev te enačbe lahko poiščemo z ugibanjem ali pa jo rešimo tako, kot smo reševali enačbe z ulomki: enačbo pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem in tako odpravimo ulomek. V našem primeru je edini imenovalec v enačbi neznanka x , kar pomeni, da enačbo pomnožimo z neznanko x :

$$\begin{aligned}\frac{56}{x} &= 7 \quad / \cdot x \\ 56 &= 7 \cdot x \\ x &= 56 : 7 \\ x &= 8\end{aligned}$$



POMNI

Enačbe v katerih je neznanka v imenovalcu pogosto imenujemo **algebrske enačbe**.



POZOR!

Vrednost neznanke x v imenovalcu ne sme biti 0, saj je ulomek $\frac{56}{0}$ **brez pomena**.

Izkaže se, da lahko na podoben način rešimo tudi bolj zahtevne enačbe, kjer neznanka nastopa v imenovalcu ulomka. Pri tem uporabimo znanje, ki smo ga pridobili pri reševanju linearnih enačb z ulomki, kjer je bila neznanka v števcu ulomka. To pomeni, da tudi enačbe z neznanko v imenovalcu postopoma ekvivalentno preoblikujemo. Pri teh enačbah je še posebej pomembno, da naredimo preizkus, saj izračunana vrednost neznanke x ni vedno rešitev enačbe. Pogosto je ulomek brez pomena, kar se zgodi, ko je imenovalec ulomka število 0.



REŠENI PRIMERI

1 Reši enačbo $\frac{2x+1}{x-1} = 3$.

Rešitev: Obe strani enačbe pomnožimo z imenovalcem ulomka in s tem odpravimo ulomek:

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x-1} &= 3 \quad / \cdot (x-1) \\ \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} &= 3(x-1) \\ 2x+1 &= 3(x-1) \\ 2x+1 &= 3x-3 \\ 2x-3x &= -3-1 \\ -x &= -4 \\ x &= 4\end{aligned}$$

Preizkus:

$$\text{L: } \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

D: 3

Izračunana vrednost neznanke, $x = 4$, se izkaže kot rešitev enačbe, saj se pri tej vrednosti neznanke vrednost leve in vrednost desne strani enačbe ujemata: $\mathfrak{R} = \{4\}$

2 Reši enačbo $\frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+8}{x^2+2x}$

Rešitev: V enačbi nastopajo trije ulomki, ki jim določimo skupni imenovalac. Vedno se prepričamo, če lahko katerega od imenovalcev razstavimo, saj je mogoče, da je kateri od faktorjev skupen.

V našem primeru se izkaže, da lahko imenovalac ulomka na desni strani enačbe razstavimo na produkt dveh faktorjev tako, da izpostavimo skupni faktor:

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

To pomeni, da lahko začetno enačbo zapišemo v naslednji obliki:

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

in hitro ugotovimo, da je najmanjši skupni imenovalac v enačbi izraz $x(x+2)$, kar pomeni, da celo enačbo množimo s tem faktorjem:

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot \cancel{x(x+2)}}{\cancel{x}} - \frac{3 \cdot \cancel{x(x+2)}}{\cancel{x+2}} &= \frac{(x+8) \cdot \cancel{x(x+2)}}{\cancel{x(x+2)}} \quad / \cdot x(x+2) \\ 3(x+2) - 3x &= x+8 \\ 3x+6-3x &= x+8 \\ 3x-3x-x &= 8-6 \\ -x &= 2 \\ x &= -2\end{aligned}$$

Glede na zahtevo, da v imenovalcu ulomka ne sme biti vrednosti 0, ker takrat ulomek nima pomena, vidimo, da izračunana vrednost $x = -2$ ni rešitev enačbe, zato **enačba nima rešitve**: $\mathfrak{R} = \{ \}$



③ Delavca bi izkopala jarek v 3 urah. Prvi delavec ga sam izkoplje v 4 urah.

V kolikšnem času ga sam izkoplje drugi delavec?

Rešitev: Pri reševanju izhajamo iz celote, ki jo predstavlja izkopani jarek:

- prvi delavec opravi delo v 4 urah, kar pomeni, da v eni uri izkoplje $\frac{1}{4}$ jarka
- drugi delavec opravi delo v x urah (neznanka), kar pomeni, da v eni uri izkoplje $\frac{1}{x}$ jarka

Enačbo sestavimo tako, da upoštevamo, da kopljeta jarek oba hkrati in da za celotni jarek potrebujeta 3 ure:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x}\right) \cdot 3 = 1$$

Enačbo rešimo tako, da najprej odpravimo oklepaj, nato pa jo pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem, ki je produkt obeh imenovalcev:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{3}{x} &= 1 \quad / \cdot 4x \\ 3x + 12 &= 4x \\ 3x - 4x &= -12 \\ -x &= -12 \\ x &= 12\end{aligned}$$

Drugi delavec bi torej sam izkopal jarek v 12 urah.

Rešitev lahko smiselno preverimo tako, da izračunamo, kolikšen del jarka izkoplje vsak od delavcev v 3 urah:

- prvi delavec: $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$
- drugi delavec: $\frac{1}{12} \cdot 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- oba skupaj: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$, kar pomeni cel izkopani jarek oziroma, da je rešitev pravilna.





NALOGE ZA VAJO

- 1 Preveri, ali je zapisana vrednost neznanke x rešitev dane enačbe. Odgovor utemelji.

a) $\frac{8-x}{x+4} = 5$; $x = -2$

b) $\frac{x+4}{x+1} = \frac{2}{x-2}$; $x = 2$

- 2 Reši enačbi.

a) $\frac{12}{x} - 5 = 1$

b) $\frac{x+3}{x-6} = 10$

- 3 Reši enačbi.

a) $\frac{3}{4x} - \frac{2}{3x} = 1$

b) $\frac{x+3}{x+1} = \frac{x-1}{x-2}$

- 4 Reši enačbi.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x}$

b) $\frac{2}{x-3} + \frac{x}{x+3} = \frac{x^2-2}{x^2-9}$

ZMOREM TUDI TO

- 5 Dva stroja bi izdelala potrebno število vijakov v 10 urah. Prvi stroj bi isto količino vijakov sam izdelal v 15 urah. Koliko ur bi za isto stvar potreboval drugi stroj?
- 6 Števec ulomka je za 3 manjši od imenovalca. Če števec povečamo za 5, imenovalec pa zmanjšamo za 3, dobimo število 2. Kateri ulomek je to?
- 7 Jesensko oranje so v zadrugi opravljali trije traktoristi, ki bi delo skupaj opravili v štirih urah. Koliko časa bi za oranje porabil tretji traktorist sam, če bi prvi traktorist, ki bi njive sam preoral v 12 urah, zbolel, drugemu traktoristu, ki bi posestvo sam preoral v desetih urah, pa se je pokvaril traktor?

- 25 T **1 Reši enačbe in naredi preizkus.**
- a) $5x - 24 = -4$ b) $3x + 2 = 2x - 8$ c) $4 + (2x - 7) = 9 - (4x - 6)$
 č) $\frac{x}{3} - \frac{2x}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$ d) $3(2x - 4) = 6 - 2(x - 3)$
- 5 T **2 K pravilnim trditvam pripiši črko P, k nepravilnim pa črko N.**
- a) Enačba, ki ima neskončno mnogo rešitev, je identična enačba.
 b) Vsaka linearna enačba ima vsaj eno rešitev.
 c) Če levo in desno stran enačbe pomnožimo z istim, od nič različnim, faktorjem, dobimo ekvivalentno enačbo.
 č) V enačbi $o = 2a + c$ je $a = \frac{o - c}{2}$.
 d) Enačba $0 \cdot x = 0$ nima rešitve.
- 6 T **3 Reši enačbo in napravi preizkus.**
- $$\frac{2x - 5}{3} - \frac{11 - 3x}{4} = \frac{5x}{6} + \frac{1}{4}$$
- 5 T **4 Če trikratnik nekega števila povečaš za 19, dobiš isto število, kot če njegov petkratnik zmanjšaš za 11. Katero število je to?**
- 6 T **5 Mati je petkrat starejša od hčere, čez 6 let pa bo le še trikrat starejša od nje. Koliko sta stari?**
- 6 T **6 V trikotniku je kot α dvakrat večji od kota β , kot γ pa je 4° večji od kota β . Koliko merijo notranji koti trikotnika?**
- 6 T **7 Reši enačbo $(2x - 1)^2 - (x - 3)(x + 3) + 3x(2 - x) = 18$.**
- 5 T **8 Metka je prvi dan rešila $\frac{2}{3}$ vseh matematičnih nalog, drugi dan 20 % vseh nalog, tretji dan pa preostalih 6 nalog. Koliko nalog je morala rešiti Metka?**
- 6 T **9 Reši sistem linearnih enačb: $2x - y = 4$ in $x - 3y = -3$.**

Možnih je 70 točk.



Špela **na poti k vrhu** (53–62).



Špela **dodatno trenira** (35–41).



Špela **blesti** (63–70).



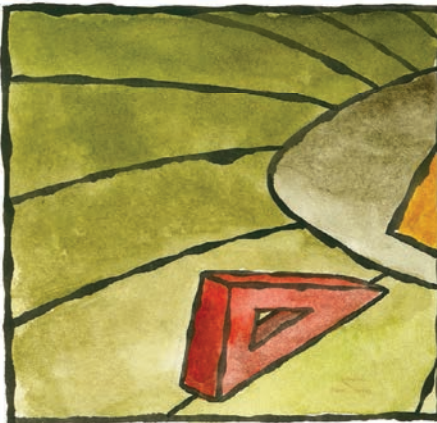
Špela **na dobri poti** (42–52).



Špela **išče pomoč** (manj kot 35 točk).

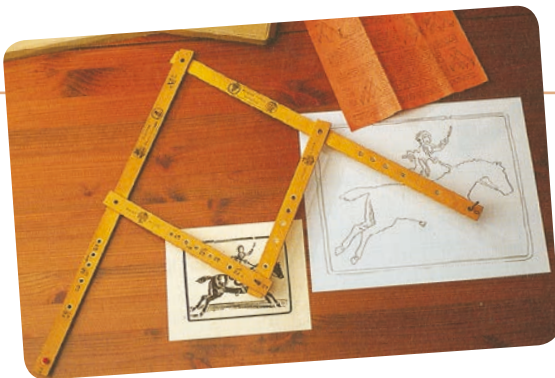
ROK IN ŠPELA

3. DEL

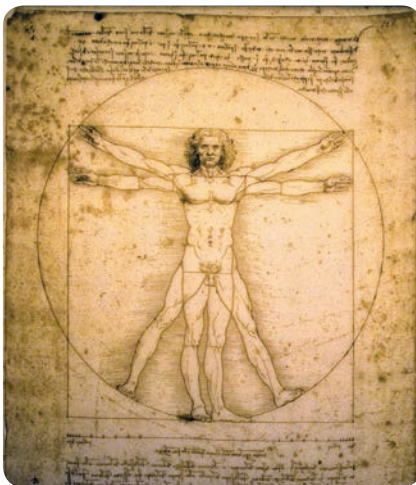


NEKOČ IN DANES

Leta 1631 je nemški matematik in astronom **Christoph Scheiner** (1575–1650) izumil napravo za mehanično prenašanje risb in načrtov v povečanem ali pomanjšanem merilu – **pantograf**.



Italijanski slikar in izumitelj **Leonardo da Vinci** (1452–1519) je študiral razmerje med deli človeškega telesa in ugotovil, da pri mnogih velja pravilo **zlatega reza**.



Znak za podobnost $\sim$ se je razvil iz ležeče črke S, ki simbolizira latinski izraz za podobnost – **simile**.

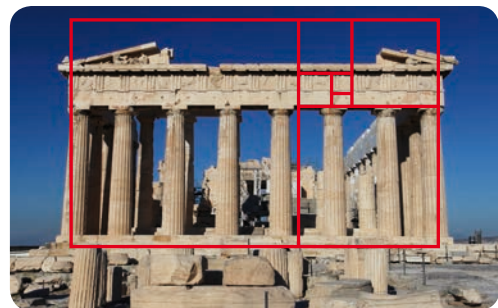
Nota seu symbola quibus insequentibus utor:

Aequale =	Simile Sim.
Maius >	Proxime maius >
Minus <	Proxime minus <
Non maius <	Aequale vel minus <
Non minus >	Aequale vel maius >
Proportio, live ratio aequalis ::	

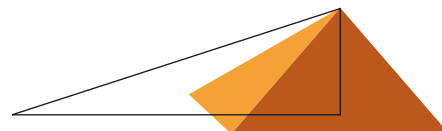
Zlati rez imenujemo delitev daljice na dva dela tako, da je razmerje med celo daljico in daljšim odsekom enako razmerju med daljšim in krajšim odsekom.

A ————— B ————— C

$$|AB| : |AC| = |AC| : |CB| = 1,61 : 1$$

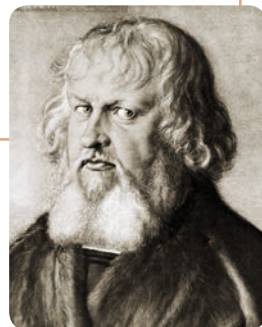


Eden najstarejših grških matematikov **Tales iz Mileta** (okrog 550 pr. n. št.) je na svojih potovanjih po Egiptu s pomočjo dolžine sence izračunal višino Keopsove piramide. Po njem se imenuje **Talesov izrek**.



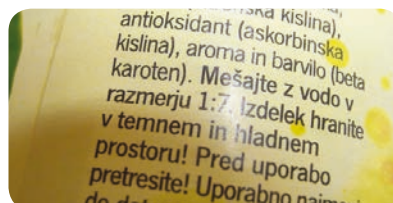
SORAZMERJE IN PODOBNOST

Stalno razmerje med določenimi deli človeškega telesa je na svojih stvaritvah uporabljal tudi nemški slikar in grafik **Albrecht Dürer** (1471–1528). Npr.: velikost glave proti višini telesa 1 : 8; dolžina dlani proti dolžini roke 1 : 4.



- 1 RAZMERJE KOLIČIN
 - 2 SORAZMERJE
 - 3 PREMO SORAZMERJE
 - 4 OBRATNO SORAZMERJE
 - 5 BESEDILNE NALOGE IZ RAZMERJA IN SORAZMERJA
 - 6 RAZMERJE DOLŽIN DALJIC
 - 7 PODOBNOST
 - 8 PODOBNI TRIKOTNIKI
- ŠPELA SE PREIZKUSI

Podobnost in sorazmerja v vsakdanjem življenju:



1 RAZMERJE KOLIČIN

Izvedel boš:

- kako zapišeš razmerje dveh količin,
- kako poenostaviš razmerje,
- kdaj sta dve razmerji enaki.



Rok in njegov prijatelj Matej sta z motorji odšla na bencinsko črpalko po gorivo, ki mu pravimo tudi mešanica. Rok je pri skuterju v večji rezervoar natočil bencin, v manjšega pa olje. Matej pa je v ATX, ki ima le en rezervoar, natočil bencin in iz plastenke prilil nekoliko olja, saj njegov motor za normalno delovanje potrebuje 3-odstotno mešanico olja in bencina. Rok je radoveden: kako Matej ve, koliko olja mora priliti?

RAZMISLI

Koliko olja je v 4 litrih mešanice?

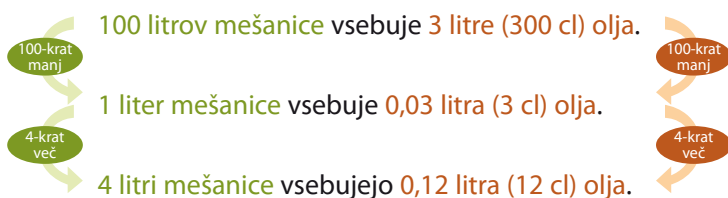
V vsakdanjem življenju pogosto dve količini primerjamo tako, da zapišemo njun **količnik** in pravimo, da sta v **razmerju**.

Matej ve, da mora v svojem motorju pripraviti 3-odstotno mešanico, kar pomeni, da mora **100 enot mešanice** vsebovati **3 enote olja**.

Olje in mešanica sta v razmerju $3 : 100$ (količnik obeh količin je torej $\frac{3}{100}$).

Različne oblike zapisa
 $3\% = \frac{3}{100} = 3 : 100 = 0,03$

Količino mešanice označimo z m , količino olja pa z o .



Količnik $o : m$ je $3 : 100 = \frac{3}{100}$

Količnik $o : m$ je $0,03 : 1 = \frac{3}{100}$

Količnik $o : m$ je $0,12 : 4 = \frac{0,12}{4} = \frac{12}{400} = \frac{3}{100}$

Količnik je ves čas **enak – konstanten**.



RAZMERJE

Razmerje je količnik dveh števil. Zapišemo ga na dva načina:

1. z znakom za deljenje $a : b$, $b \neq 0$ (preberemo a proti b)

prvi člen razmerja

drugi člen razmerja

2. z znakom za ulomek $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.



Samostojno zapiši nekaj razmerij.
DZ – naloga 3.1



POZOR!

Za deljenje ne velja zakon o zamenjavi.

$$o : m = 3 : 100$$

$$m : o = 100 : 3$$

$$\frac{3}{100} \neq \frac{100}{3}$$

$$o : m \neq m : o$$

Namesto razmerja $0,3 : 10$ pišemo $3 : 100$, ker je

$$0,3 : 10 = \frac{0,3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{3}{100} = 3 : 100$$

Namesto razmerja $6 : 200$ pišemo $3 : 100$, ker je

$$6 : 200 = \frac{6 : 2}{200 : 2} = \frac{3}{100} = 3 : 100$$



REŠENI PRIMERI

1 Kateri zapisi predstavljajo razmerje, ki je enako razmerju $1 : 2$? Zakaj?

- a) $2 : 1$
- b) $2 : 3$
- c) $5 : 10$
- č) $8 : 4$
- d) $\frac{1}{2} : 1$
- e) $\frac{30}{60}$
- f) $11 : 12$
- g) $21 : 31$

Rešitev:

Vrednost razmerja se ohranja, če vsak člen razmerja množimo ali delimo z istim številom, zato so pravilni zapisi pod c, d in e.

$$c) 5 : 10 = \frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

Razmerje zapišemo v obliki ulomka in ga okrajšamo.

$$d) \frac{1}{2} : 1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

Vsak člen razmerja $\frac{1}{2} : 1$ množimo z 2.

$$e) \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 1 : 2$$

Razmerje je že zapisano v obliki ulomka. Ulomek okrajšamo.



POMNI

Razmerje je poenostavljeno, kadar ga lahko zapišemo z okrajšanim ulomkom.



POZOR!

Z razmerjem računamo kot z ulomkom – oba člena smemo množiti ali deliti z istim številom

$$a : b = ak : bk, \frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}, k \neq 0, b \neq 0$$



POZOR!

Pri nalogah iz vsakdanjega življenja včasih razmerja ne smemo krajšati npr. rezultat nogometne tekme $6 : 4 \neq 3 : 2$.

- ② Rokova babica ima vinograd, ki je od doma oddaljen 60 km. Večji del poti je asfaltna cesta, le zadnjih 16 km je cesta makadamska. Zapiši ustrezna razmerja in jih poenostavi.

- a) Razmerje med dolžino makadamske ceste in dolžino celotne ceste.
 b) Razmerje med dolžino asfaltne ceste in dolžino celotne ceste.
 c) Razmerje med dolžino asfaltne in dolžino makadamske ceste.
 č) Neurje je poškodovalo zadnjih 800 m makadamske ceste, zato ni prevozna.

Zapiši razmerje med dolžino poškodovane makadamske ceste in celotne makadamske ceste.

Rešitev:

- a) razmerje med dolžino makadamske ceste (m) in dolžino celotne ceste (c) je

$$m : c = 16 : 60 = 4 : 15$$

preverimo s pomočjo ulomkov

$$\frac{16 \text{ km}}{60 \text{ km}} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

okrajšamo enote krajšamo s 4



POMNI

Razmerje je vedno zapisano samo s števili, brez enot.

- b) najprej izračunamo, da je asfaltne ceste 44 km, nato zapišemo razmerje med dolžino asfaltne ceste (a) in dolžino celotne ceste (c)

$$a : c = 44 : 60 = 11 : 15$$

- c) razmerje med dolžino asfaltne ceste (a) in dolžino makadamske ceste (m) je

$$a : m = 44 : 16 = 11 : 4$$

- č) Najprej ustrezni količini zapišemo z enakima merskima enotama. Dolžina celotne makadamske ceste (m) je 16 km, kar je enako 16 000 m, dolžina poškodovane neprevozne makadamske ceste (p) je 800 m.

$$\text{Razmerje } p : m = 800 : 16\,000 = 8 : 160 = 1 : 20$$



POMNI

Pred zapisom razmerja obe količini pretvorimo v enako mersko enoto.



- ③ V športni ekipi Špeline šole je 45 dečkov in 15 deklic, v ekipi sosednje šole pa je 36 dečkov in 24 deklic. V kateri ekipi je razmerje med številom dečkov in številom deklic ugodnejše za dečke?

Rešitev: Zapišimo razmerje med številom dečkov (f) in številom deklic (p) za posamezno šolo.

Špelina šola

$$f : p = 45 : 15$$

$$f : p = 3 : 1$$



sosednja šola

$$f : p = 36 : 24$$

$$f : p = 3 : 2$$



3 : 1 pomeni, da je dečkov 3-krat več kot deklic ($3 : 1 = 3$).

3 : 2 = 1,5 : 1, kar pomeni, da je dečkov 1,5-krat več kot deklic ($3 : 2 = 1,5$).

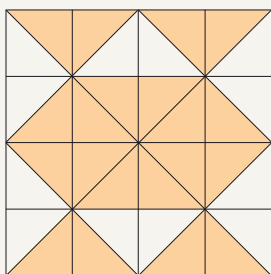
Odgovor: Ugodnejše razmerje za dečke je v športni ekipi Špeline šole.



1 Poenostavi razmerja.

- a) $6 : 8$ b) $16 : 20$
 c) $15 : 30$ č) $28 : 49$
 d) $36 : 24$ e) $1,5 : 2$
 f) $0,25 : 0,5$ g) $3\frac{1}{2} : 14$
 h) $2,4 : 0,16$ i) $\frac{7}{8} : 14$
 j) $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2}$ k) $4a : 3a$, če $a \neq 0$
 l) $\frac{x}{2} : x$, če $x \neq 0$

2 Pozorno si ogledaj sliko, zapiši zahtevano razmerje in ga poenostavi, če je mogoče.



- a) Razmerje med obarvanim in neobarvanim delom lika.
 b) Razmerje med obarvanim delom in celotnim likom.
 c) Razmerje med neobarvanim delom in celotnim likom.

3 Pozorno si ogledaj sliko in zapiši razmerje med obarvanim in neobarvanim delom lika na različne načine:



- a) v obliki »proti«,
 b) z ulomkom,
 c) z odstotki,
 č) z decimalnim številom.

4 Zapiši razmerje med danima količinama.

- a) 1 dm in 1 m b) 1 ura in 1 minuta
 c) 1 hl in 1 l č) 1 t in 1 kg
 d) 1 dan in 1 ura

5 Špela je razmerje količin $a : b = 18 : 12$ zapisala na več načinov. Rok je zapise pozorno pregledal in našel nekaj napak. Kateri primeri so napačno zapisani?

- a) $\frac{a}{b} = \frac{12}{18}$ b) $a : b = 9 : 6$
 c) $a : b = 13 : 7$ č) $b : a = 4 : 6$
 d) $b : a = 3 : 2$ e) $\frac{b}{a} = \frac{24}{36}$
 f) $a : b = 22 : 16$ g) $a : b = 1,5 : 1$

6 Starost sina in starost očeta sta v razmerju 2 : 7. Zapiši v obliki tabele vse celoštevilске možnosti za njune starosti, če oče ni starejši od 95 let.

7 Maratonec teče na 42 km dolgi progi. Pretekel je že 12 km. Zapiši in poenostavi razmerje:

- a) med dolžino poti, ki jo je že pretekel, in dolžino celotne poti;
 b) med dolžino poti, ki jo še mora preteči, in dolžino celotne poti;
 c) med dolžino že pretečene poti in dolžino poti, ki jo še mora preteči.

8 Dolžina mize je 12 dm, njena širina pa 24 cm. Zapiši razmerje med širino in dolžino mize in ga poenostavi.

9 Število učenk (p) na neki šoli je 128, število učencev (f) pa 112.

- a) Zapiši vsa možna razmerja, ki jih lahko sestaviš med danima količinama.
 b) Koliko različnih razmerij si dobil?
 c) Če je mogoče, zapisana razmerja poenostavi.

10 V paralelogramu $ABCD$ je dolžina stranice $AB = a = 6$ cm in pripadajoče višine $v_a = 2$ cm. Točka E je središče stranice AB .

- a) Zapiši razmerje med ploščino trikotnika AED in ploščino trikotnika DEC .
 b) V paralelogramu $ABCD$ je $a = 12$ cm, $v_a = 5$ cm. Točka E je središče stranice AB . Zapiši razmerje med ploščino trikotnika AED in ploščino trikotnika DEC .
 c) Zapiši splošno ugotovitev za razmerje med ploščino trikotnika AED in ploščino trikotnika DEC , če je točka E središče stranice AB v paralelogramu.

2 SORAZMERJE

Izvedel boš:

- kaj je sorazmerje in kako ga zapišeš,
- kako izračunaš neznan član sorazmerja.



Špela rada peče pecivo. Tokrat je dobila prav čuden recept. V pecivu je razmerje med količinama sladkorja in moke 2 : 3. Špela se je odločila, da bo vzela 400 gramov sladkorja.

RAZMISLI

Koliko moke mora Špela zamešati v testo?

Razmerje med količinama sladkorja in moke je 2 : 3. Ker Špela še ne ve, koliko moke bo dala v testo, je zapisala drugo razmerje med dejansko odtehtanima količinama sladkorja in moke kot 400 : x .



POZOR!

$$a : b = ak : bk$$

V prejšnjem podpoglavju smo ugotovili, da sta dve razmerji enaki, če vsakega izmed členov množimo z istim številom.



SORAZMERJE

Sorazmerje je enakost dveh razmerij $a : b = c : d$, $b \neq 0$, $d \neq 0$

Zapišimo enakost obeh razmerij.

$$\begin{array}{c} \cdot 200 \\ 2 : 3 = 400 : x \\ \cdot 200 \\ 3 \cdot 200 = x \\ 600 = x \end{array}$$

2 smo množili z 200, zato moramo tudi 3 množiti z 200.

Špela je ugotovila, da mora v testo za pecivo dodati 600 gramov moke. V sorazmerju smo neznan član določili s sklepanjem. Kako pa ga izračunamo?

$$\begin{array}{l} 2 : 3 = 400 : x \\ \frac{2}{3} = \frac{400}{x} \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{400}{x} \end{array}$$

- › Razmerje zapišemo v obliki ulomkov.
- › Zapišemo križni produkt.
- › Izračunamo x .

$$\begin{array}{l} 2 \cdot x = 3 \cdot 400 \\ 2x = 1200 \\ x = 1200 : 2 \\ x = 600 \end{array}$$



Samostojno razišči vrednost produkta posameznih členov sorazmerja.
DZ – naloga 3.2



POMNI

zunanja člena sorazmerja

$$a : b = c : d$$

notranja člena sorazmerja



POMNI

Križni produkt: kadar sta dva ulomka enaka, je produkt prvega števca z drugim imenovalcem enak produktu drugega števca s prvim imenovalcem:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$



LASTNOST SORAZMERJA

V sorazmerju $a : b = c : d$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ je vrednost produkta zunanjih členov enaka vrednosti produkta notranjih členov:

$$a \cdot d = b \cdot c$$



REŠENI PRIMERI

1 Izračunaj neznan član sorazmerja $3 : 2 = 4 : x$.

Rešitev:

1. način

$$\begin{aligned} 3 : 2 &= 4 : x \\ 3 \cdot x &= 2 \cdot 4 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \\ x &= 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Produkt zunanjih členov je enak produktu notranjih členov.

Izračunamo x .

2. način

$$\begin{aligned} 3 : 2 &= 4 : x \\ \frac{3}{2} &= \frac{4}{x} \\ 3 \cdot x &= 2 \cdot 4 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3} \\ x &= 2\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Sorazmerje zapišemo z ulomki.

Izračunamo križni produkt.

Izračunamo x .

2 Teta Meta je obirala jabolka in hruške. Obrala je 30 kg jabolk. Razmerje med količino obranih jabolk in hrušk je $5 : 3$. Koliko kilogramov hrušk je obrala teta Meta?

Rešitev: Količino jabolk označimo z j , količino hrušk pa s h in zapišemo razmerje.

$$\begin{aligned} j : h &= 5 : 3 \\ 30 : h &= 5 : 3 \\ 5 \cdot h &= 3 \cdot 30 \\ h &= \frac{3 \cdot 30}{5} \\ h &= \frac{3 \cdot 30 \cdot 6}{8 \cdot 1} \quad \text{Okrajšamo.} \\ h &= 18 \end{aligned}$$

Vstavimo količino obranih jabolk ($j = 30$).

Na levo stran zapišemo produkt, ki vsebuje neznanko.

Odgovor: Teta Meta je obrala 18 kg hrušk.



3 Načrt neke zgradbe je narisani v merilu $1 : 40$. Kolikšna je dejanska višina zgradbe, če je na načrtu visoka 25 cm?

Rešitev: Zapišemo sorazmerje in izračunamo neznan član.

$$\begin{aligned} 1 : 40 &= 25 : x \\ 1 \cdot x &= 25 \cdot 40 \\ x &= 1000 \end{aligned}$$

Odgovor: Višina zgradbe je 1000 cm, kar je 10 m.



4 Izračunaj neznan član sorazmerja $4 : x = x : 16$ in rešitev preveri.

Rešitev:

$$\begin{aligned} 4 : x &= x : 16 \\ 4 \cdot 16 &= x \cdot x \\ 64 &= x^2 \\ x^2 &= 64 \\ x^2 - 64 &= 0 \\ (x - 8) \cdot (x + 8) &= 0 \\ x_1 &= 8, x_2 = -8 \end{aligned}$$

Preizkus za $x_1 = 8$:

$$\begin{aligned} 4 : 8 &= 8 : 16 \\ 4 \cdot 16 &= 8 \cdot 8 \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

Preizkus za $x_2 = -8$:

$$\begin{aligned} 4 : (-8) &= (-8) : 16 \\ 4 \cdot 16 &= (-8) \cdot (-8) \\ 64 &= 64 \end{aligned}$$

Produkt zunanjih členov je enak produktu notranjih členov.



NALOGE ZA VAJO

1 Izračunaj neznane člene sorazmerij.

- a) $1 : 2 = 3 : x$ b) $3 : 5 = a : 35$
 c) $x : 6 = 24 : 72$ č) $6 : 2 = 27 : y$
 d) $75 : b = 50 : 2$ e) $3 : 2 = 8 : c$
 f) $3 : 8 = x : 2$ g) $6 : x = 2$
 h) $a : 4 = 3$ i) $-3 = u : 2$ $2 = \frac{2}{1} = 2 : 1$

2 V tabeli so zapisani podatki za dolžine in širine treh pravokotnikov.

	prvi pravokotnik	drugi pravokotnik	tretji pravokotnik
dolžina (cm)	3	4,5	18
širina (cm)	4	6	28

- a) Zapiši sorazmerje med dolžino in širino prvega ter dolžino in širino drugega pravokotnika in s pomočjo produkta zunanjih ter produkta notranjih členov ugotovi, ali enakost velja.
 b) Zapiši sorazmerje med dolžino in širino prvega ter dolžino in širino tretjega pravokotnika in s pomočjo produkta zunanjih ter produkta notranjih členov ugotovi, ali enakost velja.

3 Izračunaj neznane člene sorazmerij.

- a) $a : 81 = 63 : 135$ b) $0,5 : 2 = b : 5$
 c) $90 : x = 36 : 47$ č) $\frac{5}{3} : \frac{6}{12} = y : \frac{3}{4}$
 d) $\frac{6}{7} : \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2} : z$ e) $x : 2\frac{1}{6} = 10\frac{4}{5} : 1\frac{4}{5}$
 f) $8\frac{1}{2} : 9 = m : \frac{3}{5}$ g) $12 : x = 5\frac{1}{3}$
 h) $4\frac{1}{5} = a : 2$

4 Rok je zapisal enakost $21 : 1,5 = 7 : \frac{1}{2}$.

Špela jo je z računom preverila. Kaj je ugotovila? Kakšen račun je zapisala?

5 V Špelinem razredu je 9 dečkov. Razmerje med številom dečkov in številom deklic je $3 : 4$.

- a) Koliko deklic je v Špelinem razredu?
 b) Koliko učencev je v Špelinem razredu?



6 Izračunaj.

- a) Zemljevid je narisani v merilu $1 : 2\,500\,000$. Koliko meri razdalja med krajema, ki sta na zemljevidu oddaljena 14 cm?
 b) Zemljevid je narisani v merilu $1 : 200\,000$. Razdalja med krajema meri 34 km. Koliko sta ta dva kraja oddaljena na zemljevidu?
 c) Razdalja med krajema na zemljevidu je 18 cm, razdalja v naravi pa 54 km. V kakšnem merilu je narisani zemljevid?

7 Zlatar bo izdelal okroglo medaljo. Načrt ima narisani v merilu $5 : 1$. Premer kroga na načrtu meri 40 cm. Koliko meri dejanski premer medalje?



ZMOREM TUDI TO

8 Izračunaj neznane člene sorazmerij.

- a) $x : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(2 + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{1}{8} + 1\right)$
 b) $3 : y = y : 12$
 c) $x : 3^2 = 3^4 : x$
 č) $(x + 1) : 3 = (x - 1) : 2$
 d) $(0,5 - y) : 2 = \left(\frac{y}{3} - \frac{2}{3}\right) : 4$

9 Dani so štirje pari kvadratov. Prvi kvadrat ima dolžino stranice a_1 , drugi pa a_2 .

	prvi par	drugi par	tretji par	četrti par
a_1 (cm)	8	2	6	12
a_2 (cm)	12	10	10	21

Rešitve zapiši v obliki tabele.

- a) Za vsak par določi razmerje med dolžino stranice prvega in dolžino stranice drugega kvadrata.
 b) Za vsak par določi razmerje med obsegom prvega in obsegom drugega kvadrata.
 c) Kaj opaziš, če primerjaš razmerje pod a in razmerje pod b za vsak par. Ali ugotovitev velja za dva poljubna kvadrata?
 č) Za vsak par določi razmerje med ploščino prvega in ploščino drugega kvadrata.
 d) Za vsak par zapiši razmerje pod a in pod $č$ v obliki ulomka. Ulomka primerjaj med sabo. Kaj ugotoviš?

3 PREMO SORAZMERJE

Izvedel boš:

- kako odvisnost med premo sorazmernima količinama zapišeš kot sorazmerje,
- kako naloge iz premega sorazmerja rešuješ z iskanjem neznanega člena sorazmerja.

Špelina mama je za 25 kg krompirja plačala 15 €.
Po enak krompir se odpravi še sosed.

RAZMISLI

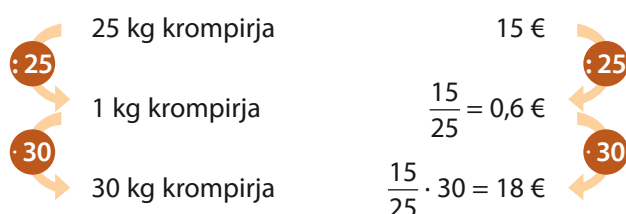
Koliko bo v isti trgovini plačala za 30 kg enakega krompirja?
Ali lahko nalogo rešimo z uporabo znanja o sorazmerju?



Ponovi vse o premem sorazmerju,
in samostojno reši nalogo s pomočjo sklepanja.

DZ – naloga 3.3

Sklepanje



S sklepanjem znesek določimo tako, da 15 delimo s 25 in množimo s 30.

Računanje

Maso krompirja označimo z m , znesek plačila pa z z in zapišemo **sorazmerje**. Sorazmerje lahko zapišemo na dva načina.

Razmerje med zneskom z in maso m je v primeru premega sorazmerja **konstantno** $z : m = 15 : 25$.
Iskani znesek plačila za 30 kg krompirja označimo z x .

$$\begin{aligned} z_1 : m_1 &= z_2 : m_2 \\ 15 : 25 &= x : 30 \\ 25 \cdot x &= 30 \cdot 15 \\ 25x &= 450 \\ x &= 450 : 25 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Zapišemo razmerje med raznovrstnima količinama.

Izračunamo neznan član sorazmerja.

Odgovor: Za 30 kg krompirja bo sosed plačala 18 €.

POMNI

Količini sta premo sorazmerni, kadar sta v takšni odvisnosti, da tolikokrat kot se poveča (zmanjša) prva količina, tolikokrat se poveča (zmanjša) druga količina.

Enačba premega sorazmerja je

$$y = k \cdot x$$

↑
koeficient premega sorazmerja

Količnik $k = \frac{y}{x}$ je **konstanten**.

POMNI

Zapišemo lahko tudi razmerje med istovrstnima količinama.

Razmerji $m_1 : m_2$ in $z_1 : z_2$ sta enaki.

$$\begin{aligned} m_1 : m_2 &= z_1 : z_2 \\ 25 : 30 &= 15 : x \\ x &= 18 \end{aligned}$$



PREMO SORAZMERJE

Premo sorazmerje lahko zapišemo tudi v obliki sorazmerja:

1. z razmerjem med istovrstnima količinama $y : a = x : b$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$,

2. z razmerjem med raznovrstnima količinama $y : x = a : b$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$.

Pri tem sta a in y vrednosti ene količine, b in x pa vrednosti druge količine.

Splošna enačba je $y = \frac{a}{b} \cdot x$.



REŠENI PRIMERI

- ① Dano je sorazmerje $y : x = 6 : 3$. Določi y in ugotovi, ali je zapisano sorazmerje premo. Odgovor utemelji.

Rešitev:

Količini sta **premo sorazmerni**, kadar je **konstanten** njun **količnik**.

$$y : x = 6 : 3$$

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{y}{x} = 2$$

Zapišimo sorazmerje z ulomki.

Količnik obeh spremenljivk je že zapisan. Izračunamo ga.

Količnik obeh spremenljivk je 2, torej je **konstanten**, zato **je** sorazmerje **premo sorazmerje**.

- ② Določi y in ugotovi, ali je katero izmed zapisanih sorazmerij premo sorazmerje. Če je sorazmerje premo, pojasni zakaj, zapiši enačbo in določi koeficient.

a) $4 : y = 2 : x$

b) $y : 5 = 2 : x$

c) $3 : 5 = y : x$

Rešitev:

a) $4 : y = 2 : x$

$$2 \cdot y = 4 \cdot x$$

$$y = \frac{4x}{2}$$

$$y = 2 \cdot x$$

Ugotovitev: Ker je y dvakratnik x , **je** zapisano sorazmerje **premo sorazmerje**.

Enačba tega premega sorazmerja je $y = 2x$.

V omenjenem premem sorazmerju je $k = 2$.

b) $y : 5 = 2 : x$

$$x \cdot y = 5 \cdot 2$$

$$x \cdot y = 10$$

$$y = \frac{10}{x}$$

Ugotovitev: Zapisano sorazmerje ni premo sorazmerje.

c) $3 : 5 = y : x$

$$5 \cdot y = 3 \cdot x$$

$$y = \frac{3x}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x$$

Ugotovitev: Ker dobimo y tako, da pomnožimo x z neko konstanto, **je** zapisano sorazmerje **premo sorazmerje**. Enačba tega premega sorazmerja

je $y = \frac{3}{5}x$. V omenjenem premem sorazmerju je $k = \frac{3}{5}$.

**POZOR!**

Na takšen način sklepamo le, če sta količini premo sorazmerni (kar ugotovimo pred reševanjem naloge).

3 6 kg jagod stane 10,80 €. Koliko plačamo za 7 kg enakih jagod?**Rešitev:**

Najprej ugotovimo, kakšno sorazmerje prikazuje naloga, nato pa jo rešimo z uporabo sorazmerja.

x kg jagod	y €
6 kg jagod	10,80 €
7 kg jagod	? €

Pri premem sorazmerju zapišemo razmerje med količinama v isto smer, kot kažejo puščice.

Kolikokrat več imamo kilogramov jagod, **tolikokrat več** plačamo → **premo sorazmerje**.

$$6 : 7 = 10,80 : y$$

$$6 \cdot y = 7 \cdot 10,80$$

$$6y = 75,60$$

$$y = 75,60 : 6$$

$$y = 12,60$$

Preverimo pravilnost rešitve z uporabo količnika obeh količin. $10,80 : 6 = 1,80$, $12,60 : 7 = 1,80$.

Odgovor: Za 7 kg enakih jagod plačamo 12,60 €.

**POMNI**

Pogosto zapišemo **sklepni račun**.

$$6 \text{ kg jagod} \cdot \dots \cdot 10,80 \text{ €}$$

$$7 \text{ kg jagod} \cdot \dots \cdot y \text{ €}$$

$$y = ?$$

$$6 \cdot y = 7 \cdot 10,80$$

Zapišemo križni produkt (pri premem sorazmerju je količnik obeh količin $\frac{6}{7} = \frac{10,80}{y}$ stalen).

**NALOGE ZA VAJO****1 Ugotovi, ali je zapisano sorazmerje premo.**

a) $y : 6 = x : 12$

b) $5 : y = x : 7$

c) $x : 7 = y : 21$

č) $8 : y = x : 16$

d) $x : 3 = 6 : y$

e) $5 : y = 5 : x$

2 4 enaka zunanja korita za rože imajo skupno maso 12 kg.

a) Kolikšno maso ima 1 enako korito?

b) Kolikšno maso ima 20 enakih korit?

c) Trgovina je nabavila toliko enakih korit, da imajo maso 600 kg. Koliko korit je nabavila trgovina?

3 Pletilja je strojno spletla 6 enakih jopic in porabila točno 3 kg preje.

a) Koliko kilogramov enake preje potrebujemo za 13 enakih jopic?

b) Koliko enakih jopic dobimo iz 10 kg enake preje?

4 Nalogi 2 in 3 reši še z zapisom sorazmerij.**5 Nalogo reši z zapisom sorazmerja.**

a) Mama je za 3,5 metrov blaga plačala 80,50 €. Koliko stane 1 meter tega blaga?

b) Šivilja je preostanek enakega blaga kupila na razprodaji, ko so ga pocenili za 20 %, in ravno tako plačala 80,50 €. Koliko metrov blaga je kupila šivilja?

6 Katero izmed zapisanih sorazmerij je premo sorazmerje? Če je sorazmerje premo, zapiši enačbo in določi koeficient.

a) $2 : x = 8 : y$

b) $x : 7 = y : 7$

c) $12 : y = x : 15$

č) $y : 3 = \frac{1}{2} : x$

d) $0,5 : x = y : 1$

e) $x : \frac{2}{7} = y : \frac{8}{7}$

f) $x : b = y : a$

7 Šolski dimnik, ki je postavljen v vogal šole, meče 4,8 metra dolgo senco. V istem času, ko je Špela (ki je visoka 1,7 m) merila senco dimnika, je Rok izmeril Špelino senco, ki je bila dolga 1,2 metra. Kako visok je dimnik?**8 Nalogo reši z matematičnim modeliranjem. Oblikuj tri različne modele cen za stroške prevoza z osebnim avtomobilom od Rimskih Toplic do Ljubljane.**

4 OBRATNO SORAZMERJE

Izvedel boš:

- kako odvisnost med obratno sorazmernima količinama zapišeš kot sorazmerje,
- kako naloge iz obratnega sorazmerja rešuješ z iskanjem neznanega člena sorazmerja.



Šest prijateljev se je odločilo, da najame apartma v Kranjski Gori. Vsak med njimi naj bi prispeval po 15 € na dan. Zaradi obveznosti sta morala dva izmed njih ostati doma, ostali pa so si razdelili njun delež.

RAZMISLI

Koliko € mora plačati na dan vsak izmed štirih prijateljev, ki so najeli apartma?

Ali lahko tudi nalogo iz obratnega sorazmerja rešimo z uporabo znanja o sorazmerju?



Ponovi vse o obratnem sorazmerju in samostojno reši nalogo s pomočjo sklepanja.

DZ – naloga 3.4

Sklepanje

$\cdot 6$	6 stanovalcev	15 €	$\cdot 6$
	1 stanovalec	$15 \cdot 6 = 90$ €	$\cdot 4$
$\cdot 4$	4 stanovalci	$\frac{15 \cdot 6}{4} = 22,50$ €	

S sklepanjem znesek določimo tako, da 15 množimo s 6 in delimo s 4.

Računanje

Število udeležencev označimo z m , iskani prispevek plačila za posameznika pa z z . V primeru obratnega sorazmerja je **konstanten produkt** $z \cdot m = 15 \cdot 6$. Ker je v sorazmerju produkt zunanjih členov enak produktu notranjih členov, sta z in m ali zunanja ali pa notranja člena. Zapišemo **sorazmerje**:

$$z : 15 = 6 : m \quad \text{ali pa} \quad 15 : z = m : 6$$

Iskani prispevek plačila za 4 stanovalce označimo z x in izračunamo neznan član sorazmerja.

$$x : 15 = 6 : 4$$

$$x \cdot 4 = 15 \cdot 6$$

$$4x = 90$$

$$x = 90 : 4$$

$$x = 22,50$$

Vsak izmed štirih prijateljev prispeva 22,50 € na dan.



POMNI

Količini sta **obratno sorazmerni**, kadar sta v takšni odvisnosti, da tolikokrat kot se poveča (zmanjša) prva količina, tolikokrat se zmanjša (poveča) druga količina.

Enačba obratnega sorazmerja je

$$y \cdot x = c$$

konstanta – vrednost produkta obratnega sorazmerja

Produkt $y \cdot x$ je **konstanten**.

**POZOR!**

Tako sklepamo le, kadar sta količini obratno sorazmerni (to preverimo pred reševanjem naloge).

- 3 6 strojev bi izdelalo naročeno količino lončkov v 27 urah. V kolikšnem času bo izdelana ista količina enakih lončkov, če se je en stroj pokvaril?

Rešitev: Najprej ugotovimo, kakšno sorazmerje prikazuje naloga, nato pa jo rešimo z zapisom sorazmerja.

x strojev y ur
 ↓ 6 strojev 27 ur ↑
 ↓ 5 strojev ? ur ↑

Pri obratnem sorazmerju zapišemo razmerje med količinama v različne smeri – kot kažejo puščice.

Kolikokrat manj je strojev, **tolikokrat več** časa potrebujejo → **obratno sorazmerje**.

$$6 : 5 = y : 27$$

$$5 \cdot y = 6 \cdot 27$$

$$5y = 162$$

$$y = 162 : 5$$

$$y = 32,4$$

**POMNI**

Pogosto zapišemo **sklepni račun**.

6 strojev 27 ur

5 strojev y ur

$y = ?$

$$6 \cdot 27 = 5 \cdot y$$

Zapišemo produkt obeh količin (pri obratnem sorazmerju je produkt stalen).

Preverimo rešitev s pomočjo produkta obeh količin: $6 \cdot 27 = 162$, $5 \cdot 32,4 = 162$.

Odgovor: 5 strojev bo izdelalo naročeno število lončkov v 32 urah in 24 minutah.

**NALOGE ZA VAJO**

- 1 Ugotovi, ali je zapisano sorazmerje obratno.

a) $y : 6 = x : 12$

b) $5 : y = x : 7$

c) $x : 7 = y : 21$

č) $8 : y = x : 16$

d) $x : 3 = 6 : y$

e) $5 : y = x : 5$

- 2 Ali je katero izmed zapisanih sorazmerij obratno sorazmerje? Če je, določi produkt.

a) $2 : x = 8 : y$

b) $x : 7 = y : 7$

c) $12 : y = x : 15$

č) $y : 3 = \frac{1}{2} : x$

d) $0,5 : x = y : 1$

e) $\frac{2}{7} : x = y : \frac{8}{7}$

f) $x : b = a : y$

- 3 Skupina prijateljev se je odpravila z jahto na morje. Zaloga hrane bi za 15 prijateljev zadostovala za 32 dni. Zaradi obveznosti so trije ostali doma.

a) Koliko jih je odšlo na pot?

b) Za koliko dni bo zadoščala zaloga hrane?

- 4 Rok je s še dvema sošolcema pisal raziskovalno nalogo. Ko so jo oblikovali na računalnik, so v vrstico zapisali po 60 znakov in naloga je imela 100 strani. Posebna navodila so zahtevala, da mora imeti vsaka vrstica le 50 znakov. Koliko strani bo imela raziskovalna naloga zdaj?

- 5 Hišnik pokosi šolsko zelenico pravokotne oblike tako, da gre s kosilnico 24-krat v levo in 24-krat v desno. Kosilnica kosi 80 cm širok pas. Ker se je kosilnica pokvarila, si je hišnik sposodil kosilnico, ki kosi 60 cm širok pas. Kolikokrat bo treba s to kosilnico v levo in kolikokrat v desno, da bo pokošena celotna zelenica?

- 6 Gozdarji so pogozdovali in na dveh posekih posadili enako število smrek. Na prvem poseku so posadili 40 vrst smrek in v vsako vrsto po 20 smrek. Na drugem poseku so posadili po 25 smrek v vsako vrsto. Koliko vrst smrek so posadili na drugem poseku?

- 7 Mama je kuhala domač malinovec. Če bi vsega natočila v steklenice po 2 dl, bi napolnila 40 steklenic. Odločila se je, da ga polovico natoči v steklenice po 2 dl, drugo polovico pa v steklenice po $\frac{1}{2}$ litra.

a) Koliko 2-decilitrskih steklenic je napolnila?

b) Koliko politrskih steklenic je napolnila?

c) Koliko je vseh napolnjenih steklenic?

- 8 Pri nalogah 3b, 4, 5 in 6 zapiši sorazmerje.

5 BESEDILNE NALOGE IZ RAZMERJA IN SORAZMERJA

Izvedel boš:

— kako rešiš besedilne naloge iz sorazmerja.

Rok in oče sta se dogovorila, da kupita mami za rojstni dan skupno darilo. Oče je predlagal, da Rok prispeva manjši del celotnega zneska. Kupila sta darilo za 96 € in si znesek razdelila v razmerju 1 : 3.

RAZMISLI

Koliko je prispeval Rok in koliko oče?



Razišči, kako rešujemo besedilne naloge iz razmerja in sorazmerja.
DZ – naloga 3.4

Razmerje 1 : 3 pomeni, da celoten znesek razdelimo na štiri enake dele, ker 1 del prispeva Rok, 3 dele pa oče. Ker ne poznamo velikosti dela, ga označimo z novo spremenljivko t .

Rokov prispevek je $1t$.
Očetov prispevek je $3t$.
} skupaj so 4 enaki deli

Zapišemo enačbo in jo rešimo. Če seštejemo Rokov in očetov prispevek, dobimo celoten znesek.

$$\begin{aligned}1t + 3t &= 96 \\4t &= 96 \\t &= 96 : 4 \\t &= 24\end{aligned}$$

Izračunali smo, da je $\text{del} = t = 24$. Vstavimo vrednost še za izračun prispevkov:

Rokov prispevek $1t = 1 \cdot 24 = 24$
Očetov prispevek $3t = 3 \cdot 24 = 72$

Preizkusimo rešitev: seštevek Rokovega in očetovega zneska mora biti 96:

$$24 + 72 = 96$$

Odgovor: Za mamino darilo je Rok prispeval 24 €, oče pa 72 €.



POSTOPEK REŠEVANJA

Besedilne naloge iz razmerja in sorazmerja rešujemo v več korakih:

1. Pozorno preberemo nalogo.
2. Izpišemo podatke tako, da uvedemo novo spremenljivko.
3. Zapišemo enačbo in jo rešimo.
4. Izračunamo vse neznane količine.
5. Preverimo rešitev.
6. Zapišemo odgovor.



REŠENI PRIMERI

- 1 Dve števili sta v razmerju 4 : 5. Njuna vsota je 72. Izračunaj ti dve števili.

Rešitev:

Ko smo nalogo **prebrali**, izpišemo podatke in **uvvedemo novo spremenljivko** t .

$$a : b = 4 : 5$$

$$\text{število } a = 4t$$

$$\text{število } b = 5t$$

Zapišemo enačbo in jo rešimo.

$$4t + 5t = 72$$

$$9t = 72$$

$$t = 72 : 9$$

$$t = 8$$

Izračunamo vse neznane količine:

$$\text{število } a = 4t = 4 \cdot 8 = 32$$

$$\text{število } b = 5t = 5 \cdot 8 = 40$$

Preverimo rešitev:

Če obe števili seštejemo, je vsota 72; $32 + 40 = 72$; Vsota je 72, zato je rešitev pravilna.

Zapišemo odgovor: Prvo iskano število je 32, drugo pa 40.



- 2 Osnovnica in krak enakokrakega trikotnika sta v razmerju 3 : 4, obseg trikotnika je 55 cm.

Izračunaj stranice trikotnika.

Rešitev:

Ko smo nalogo **prebrali**, izpišemo podatke, narišemo skico in **uvvedemo novo spremenljivko** t .

$$c : a = 3 : 4$$

$$\text{osnovnica } c = 3t$$

$$\text{krak } a = 4t$$

Zapišemo enačbo in jo rešimo:

$$o = c + 2a$$

$$55 = 3t + 2 \cdot 4t$$

$$55 = 3t + 8t$$

$$55 = 11t$$

$$11t = 55$$

$$t = 55 : 11$$

$$t = 5$$

$$\text{Osnovnica } c = 3t = 3 \cdot 5 = 15; c = 15 \text{ cm}$$

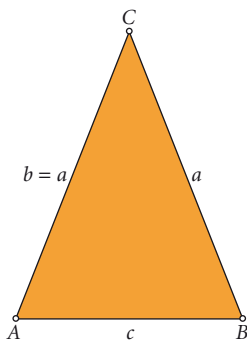
$$\text{Krak } a = 4t = 4 \cdot 5 = 20; a = 20 \text{ cm}$$

Preizkus:

$$o = c + 2a = 15 + 2 \cdot 20 = 15 + 40 = 55; o = 55 \text{ cm; obseg meri } 55 \text{ cm;}$$

Rešitev lahko preverimo tudi tako, da zapišemo razmerje $c : a = 15 : 20$; oba člena delimo s 5 in dobimo razmerje $c : a = 3 : 4$, kar je pogoj iz naloge.

Odgovor: Osnovnica enakokrakega trikotnika meri 15 cm, krak pa 20 cm.



POZOR!

Pri nalogah iz geometrije moramo poznati obrazce za obsege, ploščine ...



NALOGE ZA VAJO

- 1 Zapiši pet urejenih parov števil (a, b) , za katere velja:
a) $a : b = 2 : 9$ b) $a : b = 0,5$ c) $a : b = 1 : \frac{3}{4}$
- 2 Mama je imela 32 bonbonov. Špela in Rok sta si jih razdelila v razmerju 3 : 5. Koliko bonbonov je dobila Špela in koliko Rok, če je Rok dobil več bonbonov?
- 3 Urša je imela 20 metrov dolg trak. Razrezala ga je v razmerju 1 : 3. Koliko meri daljši kos?
- 4 Dve števili sta v razmerju 1 : 4, njuna vsota je 10. Izračunaj ti dve števili.
- 5 Dve števili sta v razmerju 22 : 8, njuna razlika je 42. Izračunaj ti dve števili.
- 6 Razmerje med notranjimi koti trikotnika je 4 : 5 : 6. Izračunaj notranje kote trikotnika.
- 7 Ostra kota v pravokotnem trikotniku sta v razmerju 3 : 7. Katera trditev, ki opisuje velikost ostrih kotov, je pravilna?
a) Prvi kot meri 30° , drugi kot pa 70° .
b) Prvi kot meri 70° , drugi kot pa 30° .
c) Prvi kot meri 90° , drugega pa ne moremo natančno določiti.
č) Prvi kot meri 27° , drugi pa 63° .
d) Ostra kota merita po 60° .
- 8 Stranici pravokotnika sta v razmerju 3 : 4, obseg pravokotnika meri 70 cm. Izračunaj ploščino tega pravokotnika.
- 9 Nariši poljubno krožnico in jo razdeli s točkami A, B, C v razmerju 3 : 4 : 5.
- 10 Pri kemiji izvajajo poskuse. Špela mora zmešati dva elementa v razmerju 8 : 7. Za nadaljnje delo potrebujejo 300 gramov spojine. Koliko gramov prvega in koliko gramov drugega elementa mora pripraviti Špela za spojino?
- 11 Zapiši število 81 kot produkt dveh pozitivnih števil, ki sta v razmerju 4 : 9.
- 12 Produkt dveh pozitivnih števil je 135, razmerje istih dveh števil pa 3 : 5. Kateri števili sta to?

ZMOREM TUDI TO

- 13 Izračunaj naravna števila a, b in c, za katera velja:
a) $a : b : c = 2 : 4 : 8$, $a + b + c = 91$
b) $a : b : c = 5 : 3 : 4$, $a - b + c = 18$
c) $a : b : c = 2 : 3 : 1$, $4a + 3b - 2c = 90$
- 14 Stranici pravokotnika sta v razmerju 3 : 2. Ploščina tega pravokotnika meri 216 cm^2 . Izračunaj stranici tega pravokotnika.
- 15 Kateti pravokotnega trikotnika sta v razmerju 3 : 4, hipotenuza pa meri 20 cm. Izračunaj kateti, obseg in ploščino tega trikotnika.
- 16 Ploščina trikotne cvetlične grede je 490 cm^2 , razmerje med stranico in pripadajočo višino $c : v_c = 4 : 5$. Koliko cm meri stranica c in koliko cm pripadajoča višina?

6 RAZMERJE DOLŽIN DALJIC

Izvedel boš:

- kaj je razmerje dolžin daljic,
- kako zapišemo razmerje dolžin dveh daljic,
- kako narišemo daljico, ki je z dano daljico v določenem razmerju.



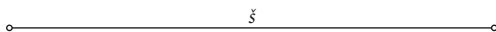
Špela in Rok sta prinesla na tehniški dan vsak svojo leseno palico, saj so izvajali meritve v naravi. Špelina palica je merila 65 cm, Rokova pa 1,3 m.

RAZMISLI

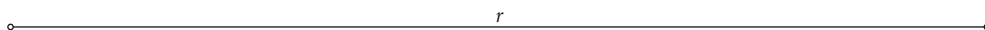
V kakšnem razmerju sta dolžini obeh palic?

Palici lahko ponazorimo z daljicama. Seveda jih moramo narisati v pomanjšanem merilu.

Špelina palica z dolžino 65 cm $\longrightarrow$ daljica $\acute{s}$ z dolžino 6,5 cm



Rokova palica z dolžino 1,3 m $\longrightarrow$ daljica r z dolžino 13 cm



Dve količini med seboj primerjamo tako, da zapišemo razmerje med njima. Dolžini daljic med seboj primerjamo tako, da primerjamo njuni merski števili.

Najprej obe dolžini zapišemo v enaki merski enoti:

dolžina Špeline palice 65 cm

dolžina Rokove palice 1,3 m = 130 cm

Nato zapišemo njuno razmerje:

$$\text{Rokova palica} : \text{Špelini palici} = 130 : 65 = \frac{130}{65} = \frac{2}{1} = 2 : 1$$

$$r : \acute{s} = 2 : 1$$



Razmerje med dolžinama daljic je 2 : 1. Ugotovili smo, da ima Rok dvakrat daljšo palico kot Špela.



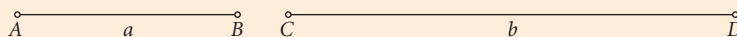
Ugotovi, v kakšnih razmerjih so dolžine narisanih daljic.

DZ – naloga 3.6



RAZMERJE DOLŽIN DALJIC

Razmerje daljic je enako razmerju njunih dolžin.



$$a : b = |AB| : |CD|$$



REŠENI PRIMERI

- 1 Dana je daljica z dolžino $|AB|$. Nariši daljico z dolžino $|CD|$ tako, da bo $|CD| : |AB| = 5 : 1$.



Rešitev:

Dolžino daljice AB izmerimo in iz sorazmerja $|CD| : |AB| = 5 : 1$ izrazimo $|CD|$.

Dolžina daljice AB je 2,8 cm.

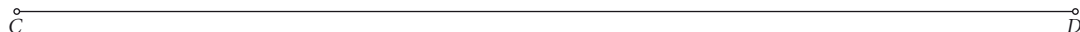
$$|CD| : 2,8 = 5 : 1$$

$$1 \cdot |CD| = 5 \cdot 2,8$$

$$|CD| = 14$$

Tako smo dobili dolžino daljice CD .

Narišemo daljico CD z dolžino 14 cm.



- 2 Daljica MN meri 6,4 cm. Nariši daljico PR tako, da bo razmerje med dolžino daljice MN in dolžino daljice PR 4 : 3.

Rešitev:

Poznamo razmerje med daljicama in dolžino ene od daljic. Z uporabo sorazmerja izračunamo dolžino neznane daljice.

$$|MN| : |PR| = 4 : 3$$

$$6,4 : |PR| = 4 : 3$$

$$4 \cdot |PR| = 3 \cdot 6,4$$

$$4 \cdot |PR| = 19,2$$

$$|PR| = 19,2 : 4$$

$$|PR| = 4,8$$

Dolžina daljice PR je 4,8 cm.

Narišemo daljico PR z dolžino 4,8 cm.





NALOGE ZA VAJO

- 1 Zapiši razmerja daljic, z dolžinami:

$|AB| = 3 \text{ cm}$, $|CD| = 4,5 \text{ cm}$,
 $|EF| = 6 \text{ cm}$ in $|GH| = 13,5 \text{ cm}$.

- a) $|AB| : |CD|$ b) $|AB| : |EF|$ c) $|GH| : |CD|$
 č) $|EF| : |GH|$ d) $|CD| : |EF|$ e) $|GH| : |AB|$

- 2 Zapiši, v kakšnem razmerju sta narisani daljici (potrebne podatke izmeri).

a)

b)

c)

č)

- 3 Na daljici AB ležita točki C in D tako, da velja $|AB| = 24 \text{ cm}$, $|AD| = 18 \text{ cm}$ in $|CD| = 8 \text{ cm}$. Zapiši dana razmerja.

- a) $|AB| : |AD|$ b) $|CD| : |AB|$ c) $|AC| : |CD|$
 č) $|BD| : |AD|$ d) $|CB| : |AC|$ e) $|AB| : |CB|$

- 4 Nariši daljico MN , ki meri 6 cm. V danih sorazmerjih izračunaj neznane dolžine daljic in nato nariši ustrezne slike, da bodo daljice v danih razmerjih.

- a) $|MN| : |AB| = 1 : 2$
 b) $|MN| : |CD| = 6 : 3$
 c) $|MN| : |EF| = 2 : 3$
 č) $|KL| : |MN| = 5 : 4$
 d) $|PR| : |MN| = 2 : 5$

- 5 V pravokotniku meri višina 4 cm. Osnovnica a je z njo v razmerju 3 : 2. Izračunaj dolžino osnovnice, nariši pravokotnik ter izračunaj njegov obseg in ploščino.

- 6 Višina in osnovnica romba sta v razmerju 3 : 5. Nariši ta romb, če veš, da meri višina 2,4 cm.

- 7 Dolžini stranic dveh kvadratov sta v razmerju 5 : 7. Izračunaj obseg in ploščino manjšega kvadrata, če veš, da je dolžina stranice večjega kvadrata 6,3 dm.

- 8 Dolžina in širina pravokotnika sta v razmerju 2 : 3. Izrazi naslednja razmerja dolžin:

- a) med dolžino in obsegom
 b) med širino in diagonalo
 c) med obsegom in polmerom očrtane krožnice.

- 9 Kako dolgi palici enakih dolžin morata v trgovini izbrati Špela in Rok, da ju bosta lahko razrezala – Rok na dva dela v razmerju 2 : 3, Špela pa na tri dele v razmerju 1 : 4 : 5? Z uporabo žepnega računalnika razišči vse možnosti tako, da bodo dolžine novih palic izražene v celih centimetrih in dolžina kupljenih ni večja od enega metra.

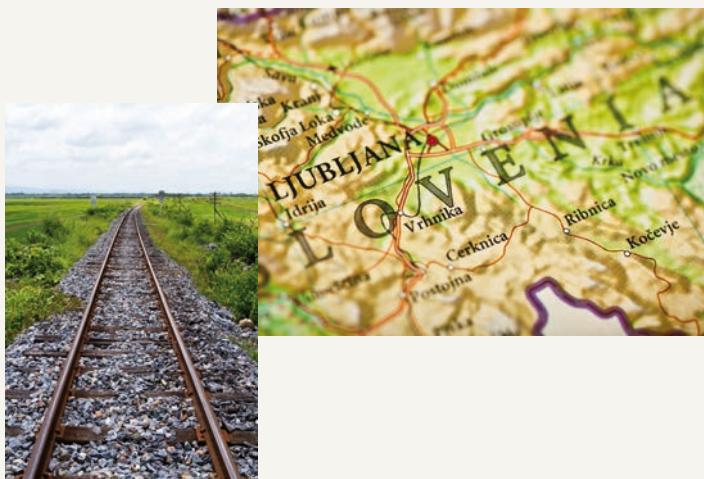


ZMOREM TUDI TO

- 10 H krožnici s polmerom 3,5 cm nariši drugo krožnico, katere središče je od središča prve oddaljeno 6 cm, če veš, da je razmerje med polmerom prve krožnice in polmerom druge krožnice 5 : 4.

- a) Kako lahko opišeš medsebojno lego obeh krožnic?
 b) Kakšno bi moralo biti razmerje med polmeroma, da se krožnici ne bi sekali? (Poišči vsaj en tak primer.)

- 11 Koliko sta oddaljena kraja, če je na zemljevidu, ki je narisana v merilu 1 : 50 000, dolžina daljice, ki ju povezuje, 43 mm?



7 PODOBNOST

Izvedel boš:

- kdaj sta dva lika podobna,
- kako narišemo povečan ali pomanjšan geometrijski lik,
- kako določi istoležne stranice,
- kaj je podobnostni koeficient.

Rok je v reviji našel načrt za ptičjo krmilnico.
V navodilih je pisalo, da so mere v razmerju 1 : 2.

RAZMISLI

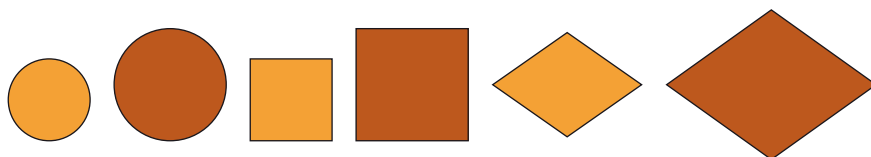
Kako bi Rok izračunal dejanske mere krmilnice?



Za mnoge predmete trdimo, da so si podobni, saj so enakih oblik in različnih velikosti.



Tudi za geometrijske like, ki so enakih oblik in različnih velikosti, pravimo, da so si podobni.



POZOR!

Čeprav v pogovornem jeziku pogosto uporabljamo izraz, da sta si dva podobna, to ni matematična podobnost.

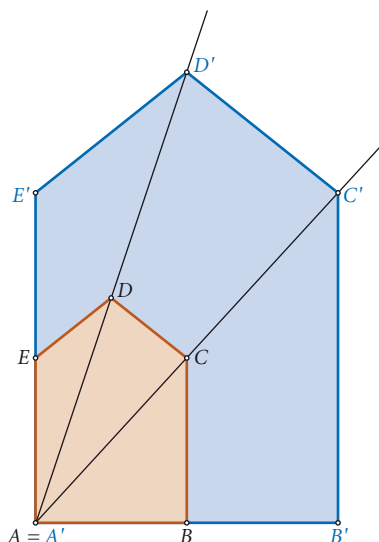


Preden pomagaš Roku ugotoviti, koliko merijo stranice krmilnice, reši nalogo.
DZ – naloga 3.7

Rok je najprej ugotovil, da je dolžina vsake stranice krmilnice dvakrat daljša od dolžine v načrtu.

Upošteval je, da morajo biti tudi koti na posameznih ploskvah enaki, kot so koti v načrtu.

Narisal si je načrt ptičje krmilnice v naravni velikosti in ugotovil, da sta si obe sliki podobni. Razlikovali sta se le po velikosti.



Pri tem opazimo, da sta ustrezno prirejeni stranici vzporedni

$$|A'B'| \parallel |AB| \quad |B'C'| \parallel |BC| \quad |C'D'| \parallel |CD| \quad |D'E'| \parallel |DE| \quad |A'E'| \parallel |AE|$$

$$|A'B'| : |AB| = 2 : 1$$

$$|B'C'| : |BC| = 2 : 1$$

$$|C'D'| : |CD| = 2 : 1$$

$$|A'D'| : |AD| = 2 : 1$$

$$|D'E'| : |DE| = 2 : 1$$

$$|A'C'| : |AC| = 2 : 1$$

$$|A'E'| : |AE| = 2 : 1$$

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$$

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$$

$$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

$$\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D'$$

$$\sphericalangle E \equiv \sphericalangle E'$$



POMNI

Pri risanju zahtevnejših povečav ali pomanjšav si pomagamo s pantografom.



PODOBNOST GEOMETRIJSKIH LIKOV

Geometrijska lika sta si **podobna**, če imata enake kote in enako razmerje dolžin vseh ustrezno prirejenih enakoležnih stranic.

Razmerje dolžin enakoležnih stranic imenujemo **podobnostni koeficient**.

Za podobnost uporabljamo poseben znak: $\sim$

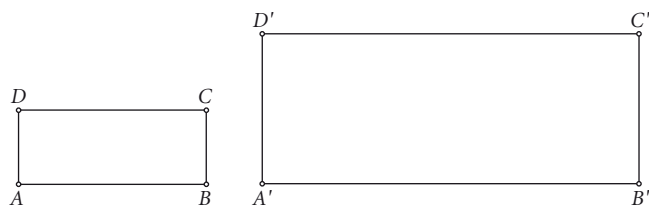
$ABCD \sim A'B'C'D'$ preberemo: štirikotnik $ABCD$ je podoben štirikotniku $A'B'C'D'$



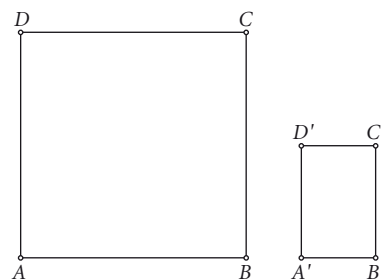
REŠENI PRIMERI

1 Ugotovi, ali sta dana štirikotnika podobna.

a)



b)



Rešitev: Lika sta si podobna, če se ujemata v velikostih posameznih kotov in v razmerju ustrezno prirejenih enakoležnih stranic. Ker imajo vsi pravokotniki vse kote prave, moramo preveriti le še razmerje stranic.

a) Izmerimo dolžini daljic AB in $A'B'$ ter izračunamo njuno razmerje:

$$\begin{aligned} |AB| &= 2,5 \text{ cm} & |AB| : |A'B'| &= 2,5 : 5 = 1 : 2 \\ |A'B'| &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Izmerimo še dolžini daljic BC in $B'C'$ ter izračunamo njuno razmerje:

$$\begin{aligned} |BC| &= 1 \text{ cm} & |BC| : |B'C'| &= 1 : 2 \\ |B'C'| &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tudi oba para prirejenih enakoležnih stranic sta v enakem razmerju, torej sta pravokotnika podobna.

b) Izmerimo dolžini daljic AB in $A'B'$ ter izračunamo njuno razmerje:

$$\begin{aligned} |AB| &= 3 \text{ cm} & |AB| : |A'B'| &= 3 : 1 \\ |A'B'| &= 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Izmerimo še dolžini daljic BC in $B'C'$ ter izračunamo njuno razmerje.

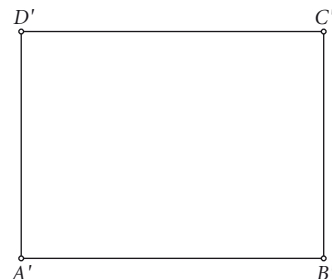
$$\begin{aligned} |BC| &= 3 \text{ cm} & |BC| : |B'C'| &= 3 : 1,5 = 2 : 1 \\ |B'C'| &= 1,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Enakoležni stranici nista v enakem razmerju, zato si pravokotnika nista podobna.

- ② Dan je pravokotnik s stranicama $a = 4$ cm in $b = 3$ cm. Nariši podoben pravokotnik, če veš, da meri stranica $b' = 4,5$ cm.

Rešitev: V podobnih likih morajo biti ustrezno prirejene stranice v enakem razmerju. S sorazmerjem izračunamo dolžino stranice a' in narišemo pravokotnik.

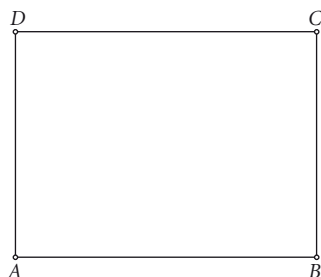
$$\begin{aligned} a : a' &= b : b' \\ 4 : a' &= 3 : 4,5 \\ 3 \cdot a' &= 4 \cdot 4,5 \\ 3a' &= 18 \\ a' &= 18 : 3 \\ a' &= 6 \end{aligned}$$



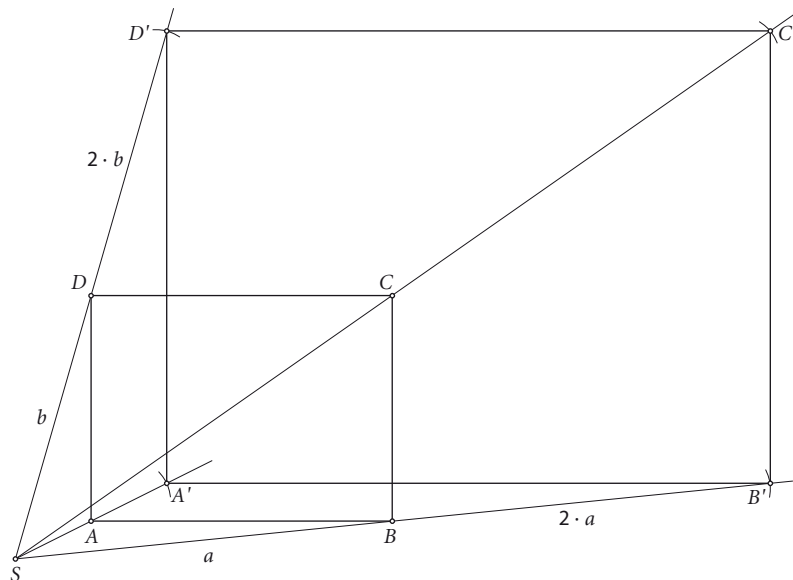
Izračunali smo $a' = 6$ cm. Narišemo pravokotnik.

- ③ Nariši pravokotnik s stranicama $a = 4$ cm in $b = 3$ cm. Grafično ga povečaj v razmerju 1 : 2.

Rešitev: Najprej narišemo pravokotnik z danimi podatki. Od tu naprej sta dve možnosti.

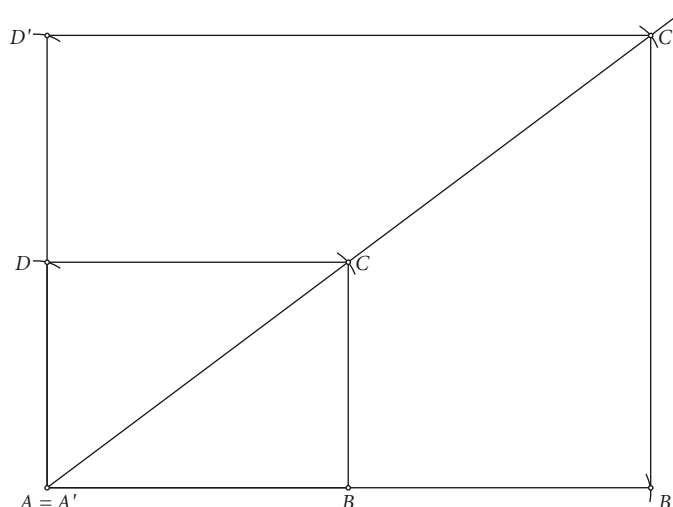


1. način: Izberemo si poljubno točko S , ki leži zunaj pravokotnika. Iz točke S narišemo daljice do vseh oglišč pravokotnika in jih dvakrat povečamo. Tako dobimo oglišča novega pravokotnika, ki je dvakrat večji od prvotnega pravokotnika.



S šestilom preverimo, ali so daljice novega pravokotnika res dvakrat daljše.

2. način: Za središče preslikave pa lahko izberemo kar točko A , ki je oglišče pravokotnika. Do oglišč B in D potekata kar nosilki stranic, v oglišče C pa narišemo daljico iz oglišča A . Na vse daljice, ki jih moramo podaljšati, nanese dvakratno razdaljo iz oglišča A do naslednjega oglišča in tako dobimo oglišča podobnega pravokotnika, ki ima dvakrat daljše stranice od prvotnega pravokotnika.



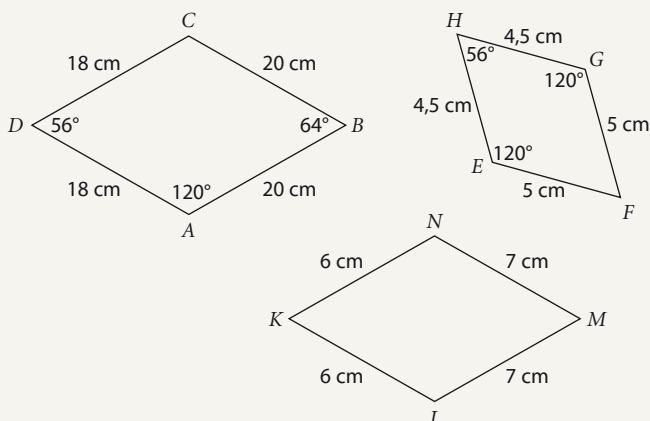
NALOGE ZA VAJO

1 Ugotovi, katera pravokotnika sta podobna.

- | | | |
|----------------|---------------|---------------|
| a) $a = 12$ cm | b) $a = 7$ cm | c) $a = 3$ cm |
| $b = 8$ cm | $b = 5$ cm | $b = 5$ cm |
| $a' = 24$ cm | $a' = 3$ cm | $a' = 4,5$ cm |
| $b' = 16$ cm | $b' = 2$ cm | $b' = 7,5$ cm |

- | | |
|----------------|---------------|
| č) $a = 15$ cm | d) $a = 9$ cm |
| $b = 6$ cm | $b = 5$ cm |
| $a' = 5$ cm | $a' = 4,5$ cm |
| $b' = 2$ cm | $b' = 3$ cm |

2 Ugotovi, kateri liki so si podobni.



3 Dani so pari podobnih pravokotnikov.

1. par: $a = 8$ cm, $b = 6$ cm; $a' = 24$ cm
2. par: $a = 12$ cm, $b = 9$ cm; $b' = 3$ cm
3. par: $b = 10$ cm; $a' = 12$ cm, $b' = 20$ cm
4. par: $a = 3\frac{1}{2}$ cm; $a' = 14$ cm, $b' = 10$ cm

- a) izračunaj neznane stranice
- b) izračunaj podobnostni koeficient
- c) zapiši razmerje obsegov
- č) zapiši razmerje plosčin

4 Kako visok mora biti prometni znak, da se oblika ne bo spremenila?



5 Kako široko čašo ima 16,2 cm visok kozarec, ki je podoben 5,4 cm visokemu kozarcu s širino čaše 3,5 cm?

6 Nariši pravokotnik s podatki $a = 5$ cm in $b = 3$ cm ter ga grafično dvakrat povečaj.

7 Pravokotnik s podatki $a = 7$ cm in $b = 4,5$ cm grafično zmanjšaj za polovico.

8 Nariši poljuben petkotnik. Izberi točko S , ki je središče podobnostne preslikave, in petkotnik dvakrat povečaj. Nato izberi novo točko M ter povečan petkotnik zmanjšaj za polovico. Primerjaj dolžine daljic na prvi in na zadnji sliki. Kaj ugotoviš? Razloži.

9 Ustrezno izberi merilo in nariši načrt: (Vriši tudi omare.)

- a) matematične učilnice.
 - b) domačega prostora, kjer se učiš.
- Razloži, zakaj si izbral takšno merilo.
(Načrt lahko narišeš tudi z uporabo ustreznega računalniškega programa.)

8 PODOBNI TRIKOTNIKI

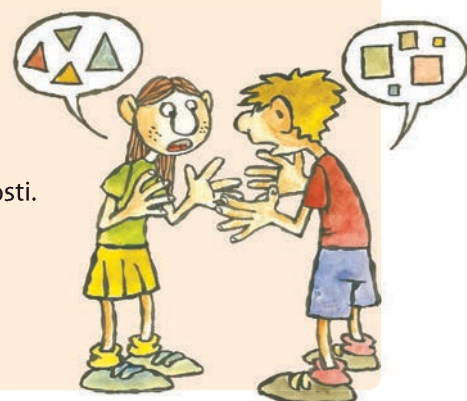
Izvedel boš:

- kdaj sta dva trikotnika podobna,
- kaj dokazuje Talesov izrek,
- kako daljico razdelimo na n enakih delov,
- kako narišemo podoben trikotnik,
- v kakšnem razmerju sta obsega in ploščini podobnih trikotnikov.

Špela in Rok sta se po uri matematike pogovarjala o podobnosti. Rok je trdil: »Vsi kvadrati so podobni.« Špela pa je trdila: »Vsi trikotniki so podobni.«

RAZMISLI

Katera izjava ni pravilna? Zakaj?



Razišči, katera izjava je napačna in zakaj.
DZ – naloga 3.8

Geometrijska lika sta podobna, če imata skladne istoležne kote in so dolžine vseh istoležnih stranic v istem razmerju.

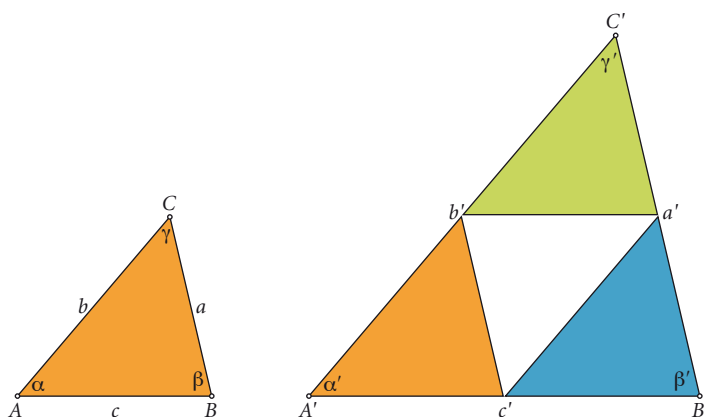
Vsi kvadrati imajo vse kote skladne (90°). Če je ena stranica kvadrata dvakrat daljša, so vse stranice kvadrata dvakrat daljše, saj ima kvadrat vse stranice enako dolge. Dva kvadrata sta torej vedno podobna.

Rokova izjava je pravilna.

Za dva trikotnika ni nujno, da se ujemata v kotih, pa tudi razmerje dolžin prirejenih istoležnih stranic ni nujno isto. Dva poljubna trikotnika torej nista nujno podobna. Špelina izjava je bila napačna.

Kdaj pa sta trikotnika podobna?

Trikotnika sta podobna, če imata dolžine istoležnih stranic v enakem razmerju. Če je ena stranica podobnega trikotnika dvakrat daljša od istoležne stranice danega trikotnika, sta tudi preostali istoležni stranici podobnega trikotnika dvakrat daljši od stranic danega trikotnika.



$$a' : a = b' : b = c' : c$$
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\gamma = \gamma'$$



PODOBNOST TRIKOTNIKOV

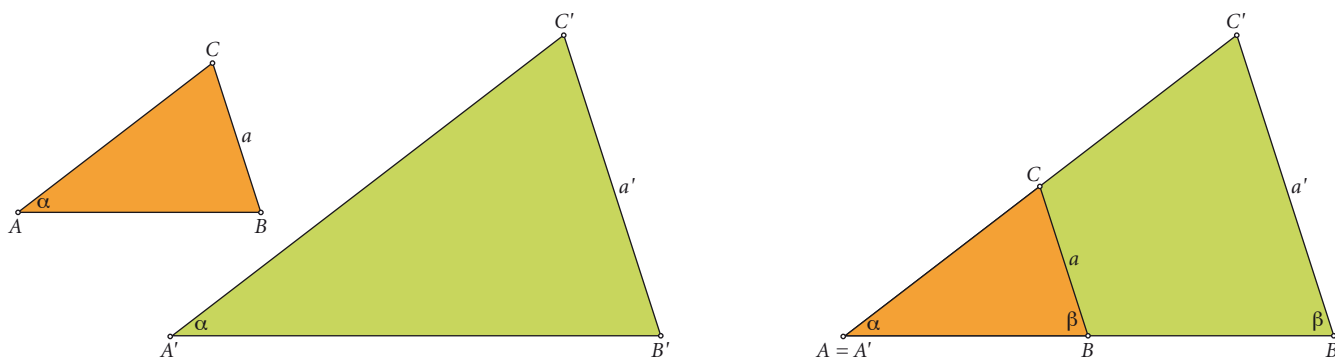
Trikotnika sta podobna:

1. Če imata skladna dva kota (potem se ujemata tudi v tretjem kotu).
2. Če imata dolžine istoležnih stranic v enakem razmerju.

$$a' : a = b' : b = c' : c = k$$
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

$$a' = k \cdot a; b' = k \cdot b; c' = k \cdot c$$

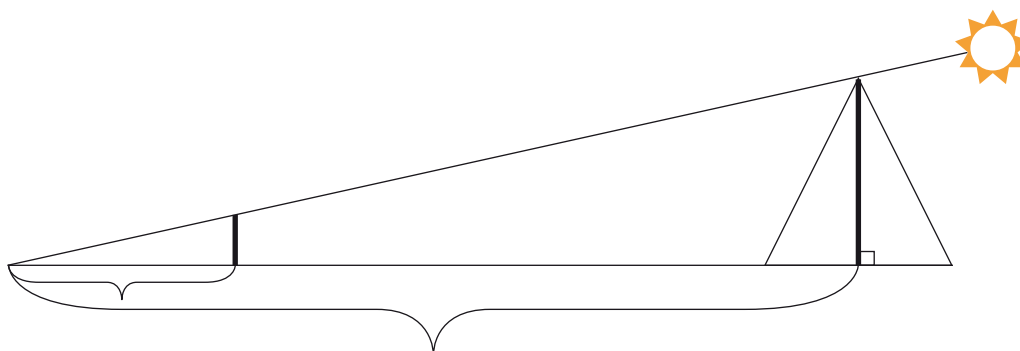
k je koeficient podobnosti.



Če podobna trikotnika prestavimo tako, da imata skupno eno oglišče in eno stranico na skupni nosilki, imata tudi drugo stranico na skupni nosilki, tretji stranici pa sta med seboj **vzporedni** (istoležni koti so skladni). Pogosto podobne trikotnike, zaradi boljše predstave, prestavimo v takšno lego.

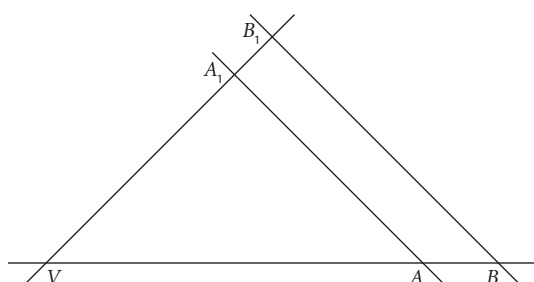
Talesov izrek

Špela je opazovala sence dreves na šolskem dvorišču. Sence so bile različno dolge in Špela je ugotovila, da imajo višja drevesa daljšo senco. Razmišljala je, kako bi določila višino drevesa, ki si ga je izbrala. Rok jo je spomnil, da so pri zgodovini omenili, kako je grški matematik Tales okrog leta 500 pred našim štetjem s pomočjo senc izračunal višino Keopsove piramide v Egiptu.



TALESOV IZREK

Če par premic, ki se sekata v eni točki, sekamo s parom vzporednih premic, je razmerje odsekov na eni premici enako razmerju istoležnih odsekov na drugi premici.



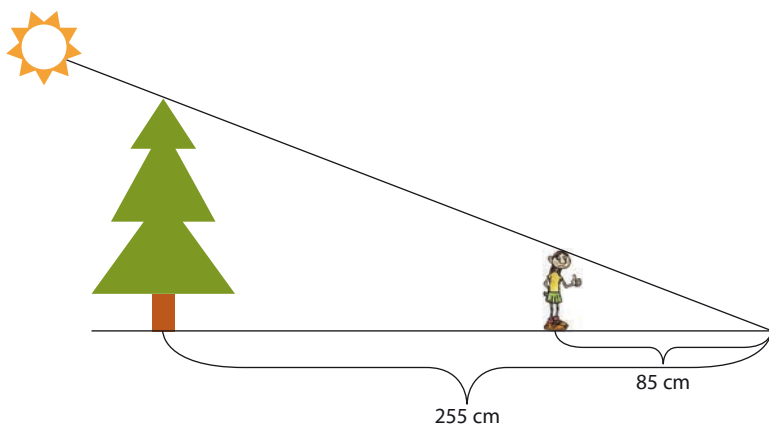
$$|VA| : |VB| = |VA_1| : |VB_1|$$

$$|VA| : |AB| = |VA_1| : |A_1B_1|$$

pa tudi

$$|VA| : |VB| = |AA_1| : |BB_1|$$

Špela je izmerila dolžino svoje sence in dolžino sence drevesa, ki ga je izbrala. Njena senca je bila dolga 85 cm, senca drevesa pa 255 cm. Vedela je, da je visoka 162 cm. Upoštevala je pravilo, ki ga je uporabil Tales in se po njem imenuje **Talesov izrek** ter izračunala višino drevesa.



$$85 : 255 = 162 : v_d$$

$$85 \cdot v_d = 255 \cdot 162$$

$$85 \cdot v_d = 41\,310$$

$$v_d = 41\,310 : 85$$

$$v_d = 486 \text{ cm}$$

(v_d je višina drevesa)

Špela je ugotovila, da je drevo visoko 486 cm oziroma 4,86 m.

Delitev daljice na enake dele

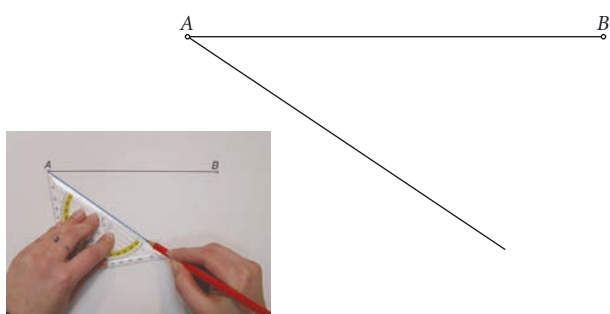
S spoznanji o podobnih trikotnikih si pomagamo tudi pri deljenju daljice na enake dele.



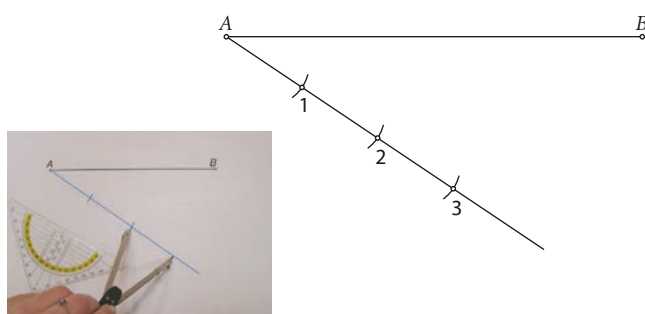
S pomočjo navodil razdeli daljico na enake dele.
DZ – naloga 3.9

Na spodnjih slikah je prikazano deljenje daljice na tri enake dele, enak postopek pa lahko uporabimo za deljenje daljice na poljubno število enakih delov.

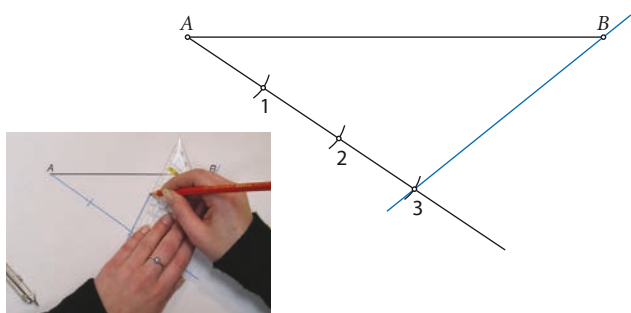
1 korak: Daljici narišemo pomožni poltrak.



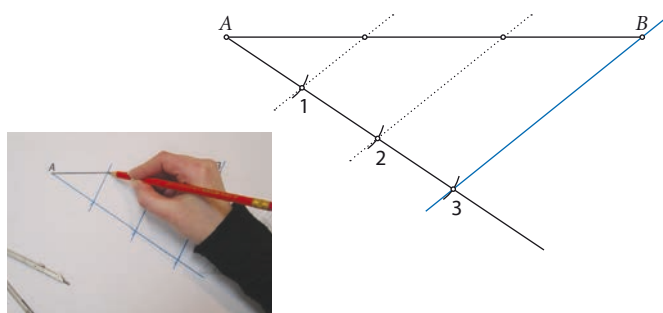
2 korak: S šestilom na poltrak nanesemo enake dele.



3 korak: Končno točko na poltraku povežemo s končno točko daljice.



4 korak: Skozi vmesne točke narišemo vzporednice k premici skozi končni točki.



Obseg in ploščina podobnih trikotnikov



Razišči, v kakšnem razmerju sta obsega in ploščini podobnih trikotnikov.
DZ – naloga 3.10

Trikotnika sta podobna, če imata dolžine istoležnih stranic v enakem razmerju. Če je ena stranica podobnega trikotnika trikrat večja od stranice danega trikotnika, sta tudi preostali stranici podobnega trikotnika trikrat večji od istoležnih stranic danega trikotnika. Iz tega lahko sklepamo, da je tudi obseg trikrat večji.

($a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$ in $c' = k \cdot c$, ker je $o' = a' + b' + c' = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c = k \cdot (a + b + c) = k \cdot o$)

Ploščino trikotnika izračunamo po obrazcu $p = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Če je ena stranica podobnega trikotnika trikrat večja od stranice danega trikotnika, je tudi pripadajoča višina trikrat večja. Torej je $p' = \frac{a' \cdot v_{a'}}{2} = \frac{k \cdot a \cdot k \cdot v_a}{2} = \frac{k^2 \cdot a \cdot v_a}{2} = k^2 \cdot p$.



OBSEG IN PLOŠČINA PODOBNIH TRIKOTNIKOV

Če so istoležne stranice podobnih trikotnikov v razmerju $1 : k$, sta tudi obsega podobnih trikotnikov v tem razmerju. Ploščini teh trikotnikov sta v razmerju $1 : k^2$.

$$a' = k \cdot a; b' = k \cdot b; c' = k \cdot c; \rightarrow o' = k \cdot o; p' = k^2 \cdot p$$

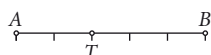


REŠENI PRIMERI

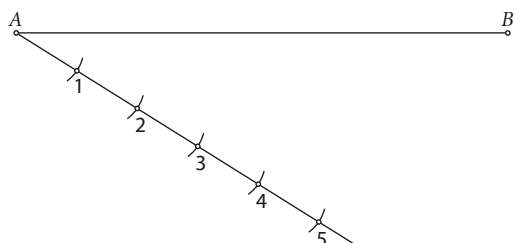
1 Daljico AB razdeli v razmerju 2 : 3.



Rešitev:

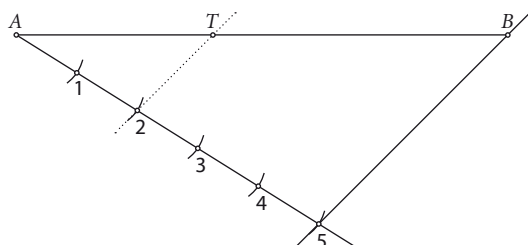


Na daljici AB moramo poiskati točko T tako, da bo $|AT| : |TB| = 2 : 3$.
Od A do T bosta 2 enaka dela, od T do B pa bodo trije enaki deli.
Daljica AB bo tako razdeljena na 5 enakih delov, zato jo s pomočjo poltraka razdelimo na 5 enakih delov.

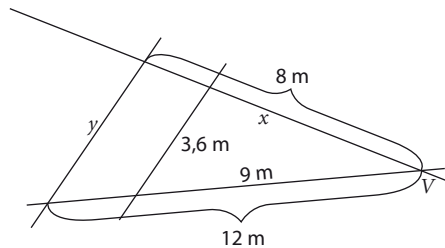


Potek načrtovanja:

1. Narišemo pomožni poltrak pod poljubnim kotom.
2. Na poltrak nanese 5 enakih delov.
3. Točko 5 povežem s točko B .
4. V točki 2 narišem vzporednico z daljico $5B$.
5. Na daljici AB dobim točko T , ki deli daljico v razmerju $2 : 3$.



2 Določi dolžino neznane stranice.

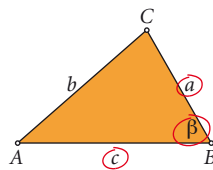
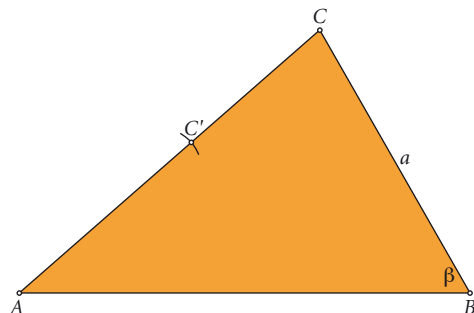


Rešitev: Upoštevamo pravilo Talesovega izreka in zapišemo obe sorazmerji ter ju rešimo:

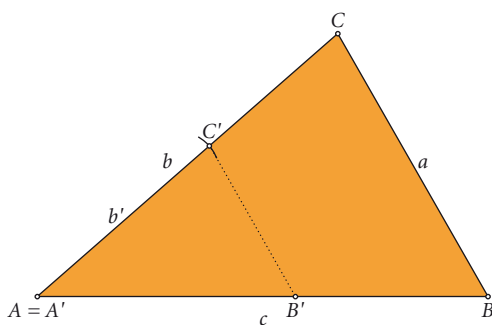
$$\begin{array}{ll} 9 : 12 = x : 8 & \text{in} \quad 9 : 12 = 3,6 : y \\ 12 \cdot x = 9 \cdot 8 & 9 \cdot y = 12 \cdot 3,6 \\ 12 \cdot x = 72 & 9 \cdot y = 43,2 \\ x = 72 : 12 & y = 43,2 : 9 \\ x = 6 & y = 4,8 \end{array}$$

Dolžina stranice x je 6 m, dolžina stranice y pa 4,8 m.

3 Trikotniku s podatki $c = 6$ cm, $a = 4$ cm in $\beta = 60^\circ$ nariši podoben trikotnik s stranico $b' = 3$ cm.



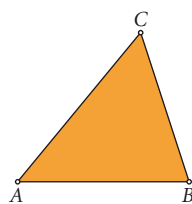
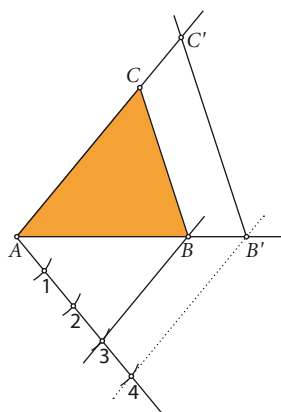
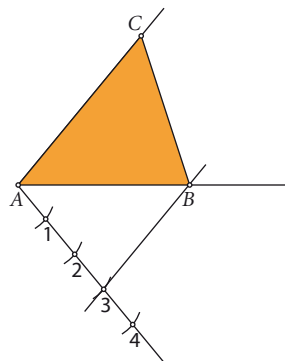
Rešitev: Trikotniku narišemo podoben trikotnik.



Potek načrtovanja:

1. Najprej narišemo trikotnik z danimi podatki.
2. Iz oglišča A na nosilki stranice b odmerimo dolžino stranice b' .
3. Označimo točko C' .
4. Ker so istoležne stranice pri podobnih trikotnikih med seboj vzporedne, v točki C' narišemo vzporednico s stranico a .
5. V presečišču vzporednice in daljice AB dobimo točko B' .

4. **Trikotnik ABC povečaj v razmerju 3 : 4.**



Rešitev: Trikotnik moramo povečati tako, da bodo dolžine posameznih enakoležnih stranic v danem razmerju 3 : 4, ter upoštevamo, da so istoležne stranice med seboj vzporedne. Pomagamo si s pomožnim poltrakom, tako kot pri delitvi daljice.

Potek načrtovanja:

1. Narišemo pomožni poltrak.
2. Poltrak razdelimo na 4 enake dele.
3. Ogljišče B povežemo s točko 3 (predstavlja tri enake dele).
4. V točki 4 narišemo vzporednico k daljici 3B.
5. Na nosilki stranice AB dobimo točko B'.
6. Skozi točko B' narišemo vzporednico k daljici BC.
7. Podaljšamo nosilko daljice AC in označimo točko C'.

5. **Stranice trikotnika merijo $a = 5$ cm, $b = 7$ cm in $c = 10$ cm, obseg podobnega trikotnika pa meri 110 cm. Izračunaj dolžine stranic podobnega trikotnika.**

Rešitev:

1. način: Najprej izračunamo obseg danega trikotnika.

$$\begin{aligned} o &= a + b + c \\ o &= 5 + 7 + 10 \\ o &= 22 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vemo, da so istoležne stranice v podobnih trikotnikih v enakem razmerju kot obsega. Torej lahko izračunamo stranice podobnega trikotnika.

$a' : a = o' : o$	$b' : b = o' : o$	$c' : c = o' : o$
$a' : 5 = 110 : 22$	$b' : 7 = 110 : 22$	$c' : 10 = 110 : 22$
$22 \cdot a' = 5 \cdot 110$	$22 \cdot b' = 7 \cdot 110$	$22 \cdot c' = 10 \cdot 110$
$22a' = 550$	$22b' = 770$	$22c' = 1100$
$a' = 550 : 22$	$b' = 770 : 22$	$c' = 1100 : 22$
$a' = 25 \text{ cm}$	$b' = 35 \text{ cm}$	$c' = 50 \text{ cm}$

2. način: Iz zapisa $o' = k \cdot o$ izračunamo koeficient podobnosti k ; $k = \frac{o'}{o} = \frac{110}{22} = 5$. Od tod izračunamo stranice.

$$\begin{aligned} a' &= k \cdot a = 25 \text{ cm} & b' &= k \cdot b = 35 \text{ cm} & c' &= k \cdot c = 50 \text{ cm} \end{aligned}$$

Odgovor: Stranice podobnega trikotnika merijo $a' = 25$ cm, $b' = 35$ cm in $c' = 50$ cm.

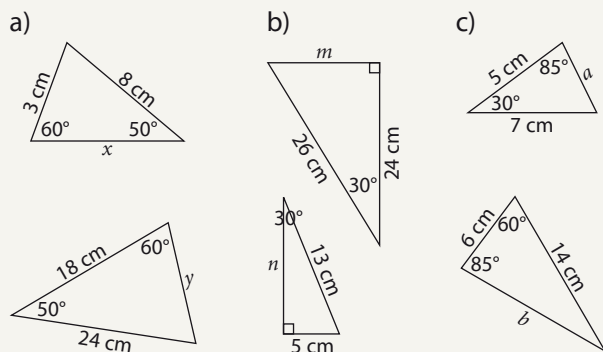


NALOGE ZA VAJO

- 1 Daljico $|AB| = 7$ cm razdeli na enake dele.
a) 5 delov b) 3 dele c) 7 delov č) 6 delov

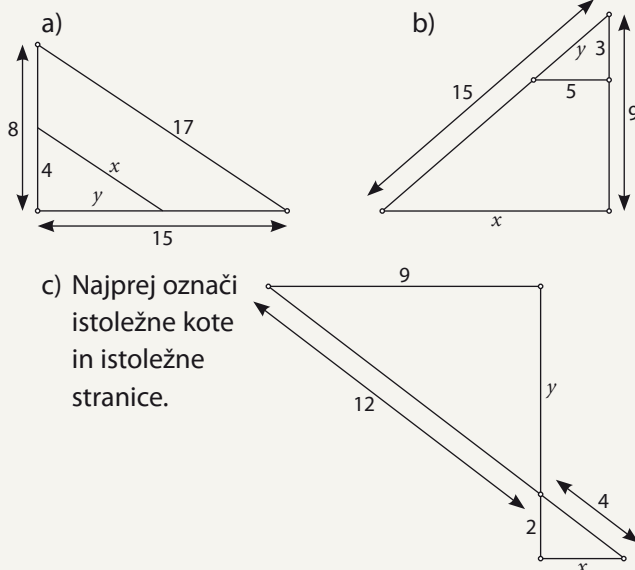
- 2 Na daljici $|CD| = 5$ cm nariši točko T tako, da razdeli daljico v izbranem razmerju.
a) 2 : 3 b) 1 : 2 c) 4 : 3 č) 5 : 1

- 3 Ugotovi, ali so narisani trikotniki podobni. Če so, izračunaj neznane stranice.



- 4 Na daljici $|EF| = 8$ cm nariši točko T tako, da bodo veljale naslednje zveze.
- a) $|ET| : |TF| = 3 : 4$ b) $|EF| : |ET| = 5 : 3$
c) $|ET| = \frac{1}{2}|EF|$ č) $|EF| = \frac{3}{2}|ET|$
d) $|TF| : |EF| = 1 : 4$ e) $|TF| = \frac{1}{3}|EF|$

- 5 Izračunaj neznane dolžine. Podatki so dani v dolžinskih enotah.



- 6 Ugotovi, kateri trikotniki so podobni. Trikotnik ABC ima stranice a , b in c , trikotnik $A'B'C'$ pa stranice a' , b' in c' . Vsi podatki so v cm.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	3	7	12	8	4,2	24,6
b	4	9	8	12	6,4	33,8
c	5	14	14	15	7,8	36,4
a'	9	21	6	20	12,6	12,3
b'	12	27	4	30	19,2	16,4
c'	15	32	7	37,5	23,4	18,2

- 7 Nariši trikotnik s podatki $c = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 50^\circ$.
a) Povečaj ga v razmerju 2 : 3.
b) Pomanjšaj ga v razmerju 5 : 4.
- 8 Trikotniku s podatki $c = 7,4$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 50^\circ$ nariši podoben trikotnik s stranico $c' = 4,8$ cm.
- 9 Dan je trikotnik $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\beta = 80^\circ$. Nariši podoben trikotnik s stranico $c' = 7$ cm.
- 10 Trikotniku s podatki $c = 5$ cm, $\alpha = 75^\circ$, $b = 3$ cm nariši podoben trikotnik z $v_c' = 4$ cm.
- 11 Trikotniku s podatki $c = 6$ cm, $v_c = 4$ cm, $\alpha = 70^\circ$ nariši podoben trikotnik s $t_c' = 3$ cm.
- 12 Stranice trikotnika merijo $a = 8$ cm, $b = 11$ cm in $c = 15$ cm. Najkrajša stranica podobnega trikotnika meri 24 cm. Izračunaj dolžine stranic in obseg podobnega trikotnika.
- 13 Stranice trikotnika merijo $a = 4,8$ cm, $b = 6,2$ cm in $c = 8,4$ cm, najdaljša stranica podobnega trikotnika pa meri 4,2 cm. Izračunaj dolžine stranic in obseg podobnega trikotnika.
- 14 Stranice trikotnika merijo $a = 6$ cm, $b = 9$ cm in $c = 11$ cm, obseg podobnega trikotnika pa meri 65 cm. Izračunaj dolžine stranic podobnega trikotnika.

- 15 Stranice trikotnika merijo $a = 8$ cm, $b = 10,2$ cm in $c = 13,8$ cm, najkrajša stranica podobnega trikotnika pa je enaka obsegu danega trikotnika. Izračunaj obseg podobnega trikotnika.

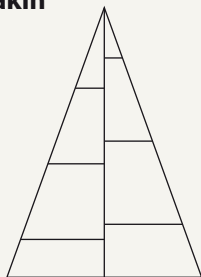
- 16 Kako visoka je stolpnica, ki ima 16 m dolgo senco, če ima Špela, ki je visoka 162 cm, 80 cm dolgo senco? Obe dolžini senc merimo sočasno.

ZMOREM TUDI TO

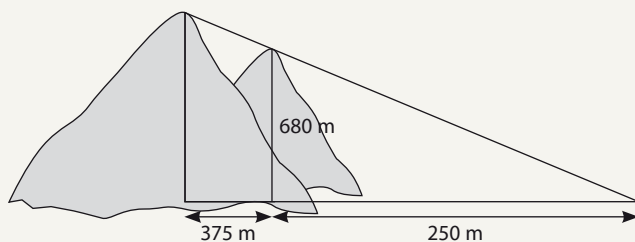


- 17 Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči, kako se pri podobnih likih (trikotnik, štirikotnik ...) spreminjajo dolžine stranic, velikosti notranjih kotov, ter obsegi in ploščine podobnih likov, če koeficient podobnosti povečuješ s korakom 1.

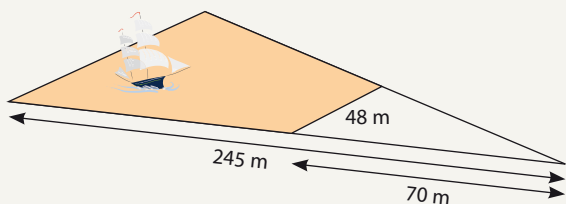
- 18 Rok ima omaro s knjižnimi policami kot jih kaže slika. Visoka je 2 m, na tleh pa je dolga 180 cm. Na levi strani so police nameščene na vsakih 50 cm, na desni strani pa vsakih 60 cm. Koliko metrov polic ima Rok?



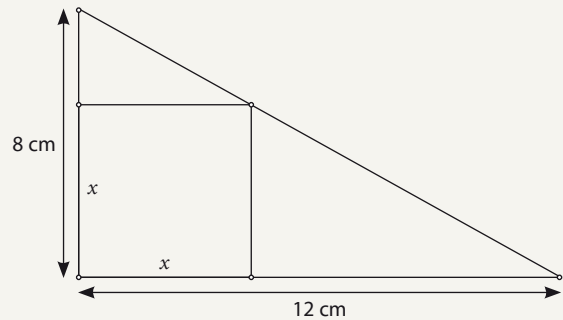
- 19 Izračunaj, kako visoka je gora, ki jo Rok opazuje.



- 20 Izračunaj, kako širok je vhod v zaliv.

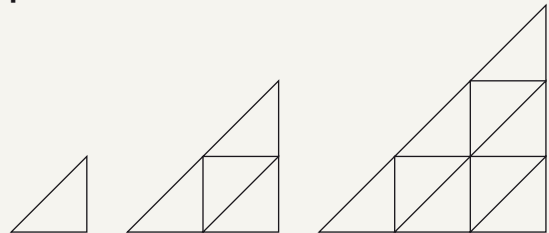


- 21 Izračunaj dolžino stranice največjega kvadrata, ki ga lahko vrišemo pravokotnemu trikotniku tako, da bo eno oglišče na hipotenuzi. Izračunaj tudi njegov obseg in ploščino in zapiši razmerje med obsegom trikotnika in kvadrata.



- 22 Izračunaj obseg in ploščino pravokotnega trikotnika, ki je podoben trikotniku s katetama 6 in 8 cm če veš, da meri njegova hipotenuza 20 cm. Zapiši razmerje med obsegoma in med ploščinama obeh trikotnikov.

- 23 V vzorcu si liki sledijo tako, da so vsi med seboj podobni.



Razišči, koliko manjših trikotnikov je potrebnih za peti lik, koliko za enajsti lik in koliko za n -ti lik.

- 24 Dan je vzorec, ki ga sestavljajo podobni trikotniki. Stranice prvega lika merijo 4, 6 in 9 cm. V vsakem naslednjem liku je dolžina najkrajše stranice dvakratnik dolžine stranice iz prejšnjega lika. Izračunaj obsege prvih treh likov, ter obsega 6. in 9. lika. Zapiši, koliko meri obseg n -tega lika.

2T **1** Dolžina mize je 120 cm, širina pa 80 cm. Zapiši razmerje med dolžino in širino in ga poenostavi.

2 Izračunaj neznani člen sorazmerja.

2T a) $x : 20 = 3 : 10$

2T b) $y : 3 = \frac{6}{5}$

2T c) $\frac{7}{6} : \frac{7}{15} = a : \frac{2}{5}$

3T **3** Z računom preveri, ali sta razmerji 7 : 4 in 8 : 5 enaki.

4T **4** Stenska ura je v 7 dneh zaostala 21 minut.

a) Koliko ta ura zaostane na dan?

b) Koliko zaostane v 30 dneh?

5 V kurilnici imamo polno 2500-litrsko cisterno kurilnega olja.

2T a) Za koliko dni bo zadoščala zaloga olja v cisterni, če porabimo na dan 20 litrov olja?

2T b) Koliko olja porabimo od 1. oktobra do vključno 31. marca, če je poraba 15 litrov kurilnega olja na dan in leto ni prestopno?

5T **6** Obseg trikotnika meri 48 cm, stranice pa so v razmerju 3 : 4 : 5.

a) Izračunaj dolžine stranic tega trikotnika.

b) Z računom preveri, ali je trikotnik pravokoten.

2T **7** a) Daljico AB razdeli na 5 enakih delov.

2T b) Na daljici AB določi točko T tako, da bo $|AT| : |TB| = 4 : 1$.



6T **8** Dane so daljice $|AB| = 8$ cm, $|CD| = 12$ cm in $|EF| = 3$ cm. Zapiši razmerja in jih poenostavi.

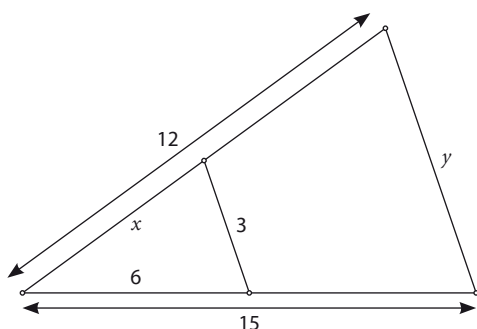
a) $|CD| : |EF|$

b) $|AB| : |CD|$

c) $|EF| : |AB|$

6T

9 Izračunaj neznane količine. Podatki so podani v metrih.



5T

10 Trikotniku s podatki $c = 5$ cm, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 50^\circ$ nariši podoben trikotnik z $a' = 4$ cm.

5T

11 Stranice trikotnika merijo $a = 12$ cm, $b = 15$ cm in $c = 18$ cm. Najdaljša stranica podobnega trikotnika pa je enaka petini obsega danega trikotnika. Izračunaj stranice podobnega trikotnika in njegov obseg.

Možnih je 50 točk.



Špela **na poti k vrhu** (38–44).



Špela **dodatno trenira** (25–29).



Špela **blesti** (45–50).



Špela **na dobri poti** (30–37).



Špela **išče pomoč** (manj kot 25 točk).

ROK IN ŠPELA

4. DEL



NEKOČ IN DANES

Beseda prizma izhaja iz grške besede »prizein«, ki pomeni žagati. Ime piramida so grški matematiki prevzeli od egipčanskih. Pojavlja se že v Rhindtovem papirusu. Eno od najbolj znanih čudes sveta je tudi **Keopsova piramida** v Egiptu, ki je visoka 147 m, osnovni rob pa meri 230 m.



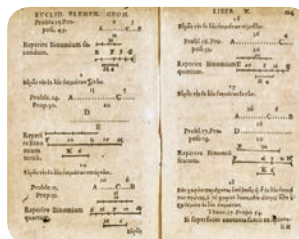
Pitagorejci so pravilne poliedre – telesa, ki imajo vse mejne ploskve skladne in kjer se v vsakem oglišču stika enako število robov (najstarejši ohranjeni izhajajo iz neolitske dobe in so stari okrog 4000 let) – povezovali z nas-tankom sveta: iz **kocke** naj bi nastala Zemlja, iz **piramide** ogenj, iz **oktaedra** zrak, iz **ikozaedra** voda in **dodekaedra** sfera vesolja.

Evklid je v znamenitih **Elementih** zasnoval svojo geometrijo na 23 definicijah osnovnih pojmov.

Točko, premico in ravnino je definiral:

- **Točka** je tisto, kar nima delov.
- **Črta** je dolžina brez širine.
- **Ploskev** je tisto, kar ima širino in dolžino.

Evklidov sistem geometrije je ostal nespremenjen do leta 1899, ko je izšla knjiga Osnove geometrije nemškega matematika **Davida Hilberta**, ki je Evklidov model posodobil in izboljšal.



GEOMETRIJSKA TELESA

1 ODNOSI MED GEOMETRIJSKIMI
ELEMENTI V PROSTORU

2 GEOMETRIJSKA TELESA

3 PRIZMA

4 VALJ

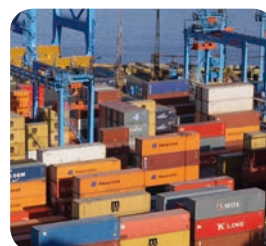
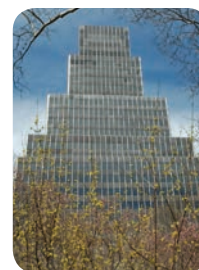
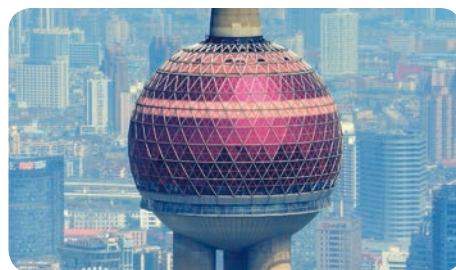
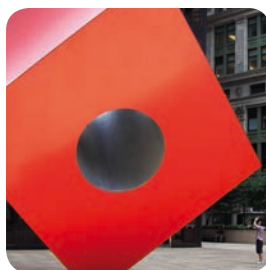
5 PIRAMIDA

6 STOŽEC

7 KROGLA

8 VRTENINE

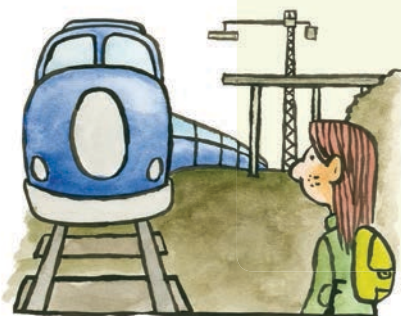
ŠPELA SE PREIZKUSI



1 ODNOSI MED GEOMETRIJSKIMI ELEMENTI V PROSTORU

Izvedel boš:

- o odnosih med geometrijskimi elementi (točkami, premicami in ravninami) v prostoru,
- kako uporabimo Pitagorov izrek v prostoru.



Špela je z zanimanjem opazovala gradnjo nove ceste v bližini svojega doma, še posebej zato, ker je šlo za nadvoz: cesto so speljali pod železniško progo. Razmišljala je, ali bi lahko cesto in železniško progo speljali tudi kako drugače.

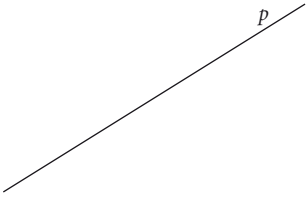
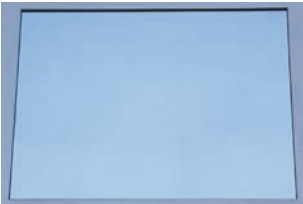
RAZMISLI

Na koliko načinov lahko speljemo cesto in železniško progo? Ali v objektih prepoznaš modele za točke, premice in ravnine?

Ravno cesto in železniško progo si lahko predstavljamo kot dve premici. Cesta in proga se lahko sekata, kar predstavlja prehod ceste čez progo. Druga možnost je nadvoz ali podvoz, ki je boljša rešitev, saj se v tem primeru cesta in železnica ne sekata, temveč potekata na različnih nivojih.

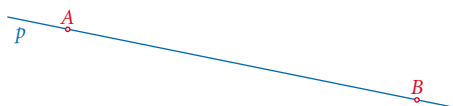
Objekte, kot so pokrajina, cesta in avtomobil, lahko uporabimo kot približne modele za ravnino, premico in točko, vendar z nekaterimi pomembnimi omejitvami.

V nadaljevanju tega poglavja bomo podrobneje obravnavali geometrijska telesa, zato nas bodo ob točkah in premicah bolj podrobno zanimala tudi ravnine. Poglejmo, kako jih bomo risali in označevali.

	točka	premica	ravnina
oznake	$A, B, C, D, E \dots$	$p, r, s, t, u, v \dots$	$\mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{U} \dots$
opis lastnosti	je »nekaj«, kar nima razsežnosti	je na obe strani neomejena ravna črta	je v vseh smereh neomejena ravna ploskev
matematična risba in oznaka			
model v naravi (približek)	»mušji kakec« na šipi 	ravna letvica na šipi 	šipa 

Kako je določena premica?

Skozi **dve različni točki** lahko narišemo **eno samo premico**.



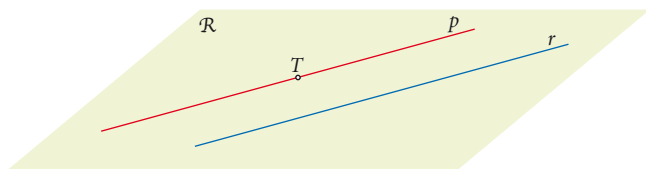
Zapis: **Premica p** ali **premica (A, B)** .

Kako je določena ravnina?

Skozi **tri nekolinearne točke** lahko narišemo **eno samo ravnino**.



Zapis: **Ravnina $\mathcal{R}$** ali **ravnina ABC** .



V ravnini lahko skozi izbrano točko narišemo **eno samo vzporednico** k **dani premici**.



KOLINEARNE TOČKE so točke, ki ležijo na isti premici.



NEKOLINEARNE TOČKE so točke, ki ne ležijo na isti premici.



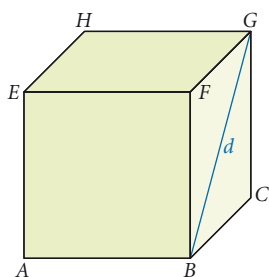
KOMPLANARNE TOČKE so točke, ki ležijo na isti ravnini.

Geometrija, ki je v skladu s to trditvijo, se imenuje Evklidova geometrija.

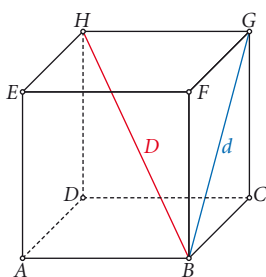
V nadaljevanju nas bodo zanimali odnosi med točkami, premicami in ravninami v prostoru.

Dobri modeli za točke so konice žebličkov ali svinčnikov. Premice lahko predstavimo s tankimi palicami ali vrvi. Za ravnino uporabimo list papirja ali stekleno šipo.

Odnose med točkami, premicami in ravninami lahko nazorno prikažemo v geometrijskih telesih, na primer v kocki. Zelo uporaben je žični model kocke, saj omogoča večjo preglednost in vidnost, medtem ko v papirnatem modelu vsi robovi niso vidni.



model kocke iz papirja



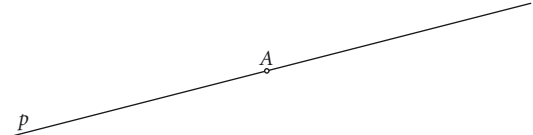
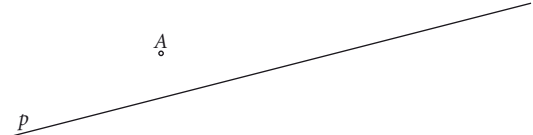
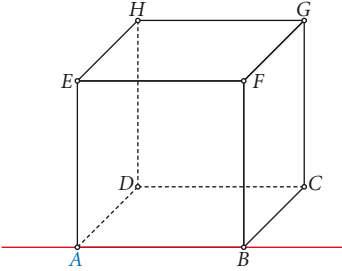
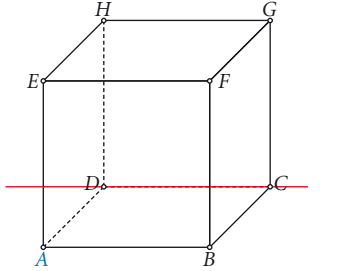
model kocke iz žice



Odnose med geometrijskimi elementi boš raziskal sam.
DZ – naloga 4.1

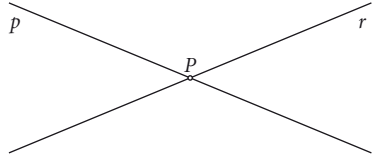
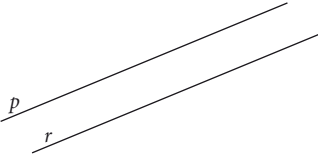
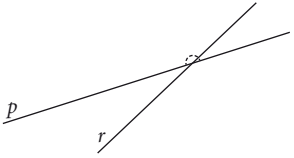
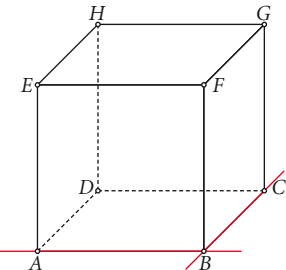
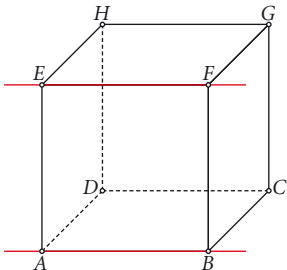
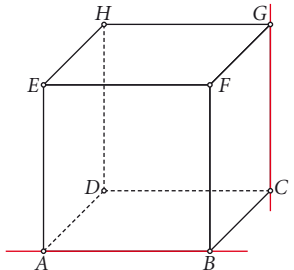
Točka in premica

Točka in premica v prostoru sta lahko v enem od teh dveh odnosov:

1 Točka A leži na premici p .	2 Točka A ne leži na premici p .
$A \in p$ 	$A \notin p$ 
 Točka A leži na premici (A, B).	 Točka A ne leži na premici (C, D).

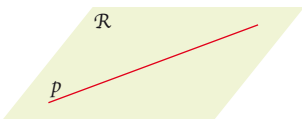
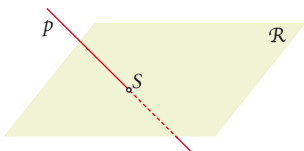
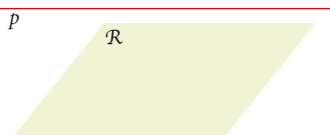
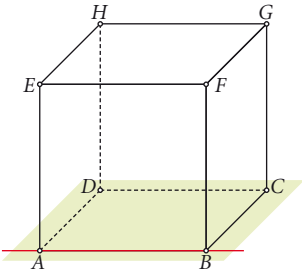
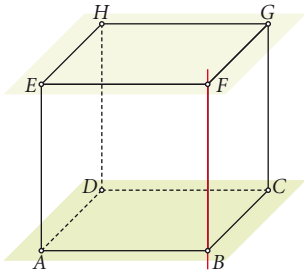
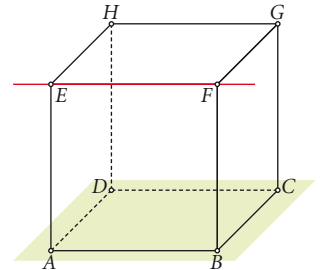
Dve premici

Dve premici v prostoru sta lahko v enem od teh odnosov:

1 Premici p in r se sekata v točki P .	2 Premici p in r sta vzporedni .	3 Premici p in r sta mimobežni .
$p \cap r = \{P\}$ 	$p \parallel r; p \cap r = \emptyset$ 	$p \cap r = \emptyset$ 
 Premici (A, B) in (B, C) se sekata v točki B.	 Premici (A, B) in (E, F) sta vzporedni.	 Premici (A, B) in (C, G) sta mimobežni.

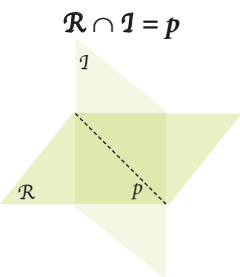
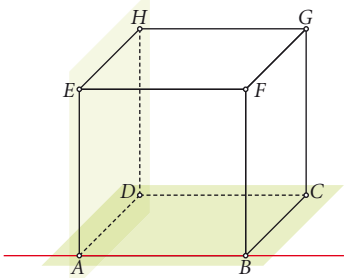
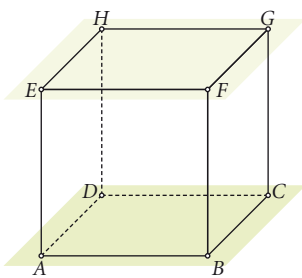
Premica in ravnina

Premica in ravnina v prostoru sta lahko v enem od teh odnosov:

1 Premica p leži v ravnini $\mathcal{R}$.	2 Premica p seka ravnino $\mathcal{R}$.	3 Premica p je vzporedna z ravnino $\mathcal{R}$.
$p \subset \mathcal{R}$ 	$p \cap \mathcal{R} = \{S\}$  Ravnina in premica imata skupno točko S .	$p \parallel \mathcal{R}$ 
 Premica (A, B) leži v ravnini ABC.	 Premica (B, F) seka ravnino ABC v točki B.	 Premica (E, F) je vzporedna z ravnino ABC.

Dve ravnini

Dve ravnini v prostoru sta lahko v enem od teh dveh odnosov:

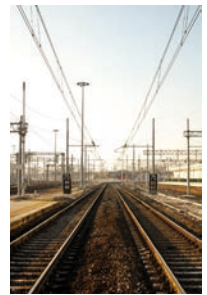
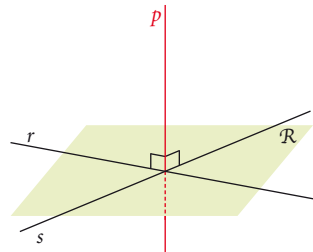
1 Ravnina $\mathcal{R}$ in ravnina $\mathcal{I}$ se sekata .	2 Ravnina $\mathcal{R}$ in ravnina $\mathcal{I}$ sta vzporedni .
$\mathcal{R} \cap \mathcal{I} = p$  Ravnini imata skupno premico p .	$\mathcal{R} \parallel \mathcal{I}$ 
 Ravnini ABC in ADH se sekata. Imata skupno premico (A, D).	 Ravnini ABC in EFG sta vzporedni.

Pravokotnost v prostoru

V vsakdanjem življenju se pogosto srečamo z zahtevo, ko moramo neki predmet postaviti pravokotno na ravnino: npr. postaviti električni ali telefonski steber pravokotno na podlago. Obstaja več načinov, kako to naredimo.

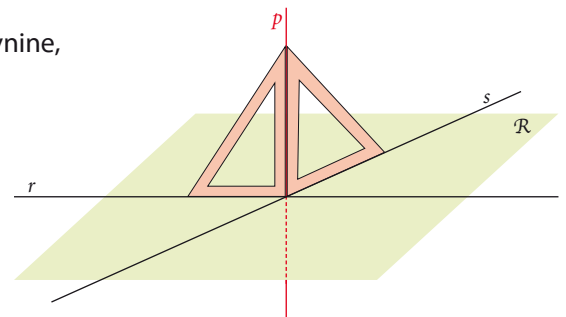
Premica p je pravokotna na ravnino $\mathcal{R}$,
če je pravokotna na vsako premico, ki leži v tej ravnini:

če je $p \perp r$ in $p \perp s$ in $r, s \subset \mathcal{R}$,
potem je $p \perp \mathcal{R}$



Izkaže se, da je dovolj, če je premica pravokotna **na dve premici** te ravnine, saj je s tremi nekolinearnimi točkami ravnina popolnoma določena.

Praktično lahko določimo pravokotno premico na ravnino tako, da v izbrani točki ravnine (npr. miza, tla) postavimo k premici p dva pravokotna trikotnika – dobimo pravokotnico p na ravnino $\mathcal{R}$.



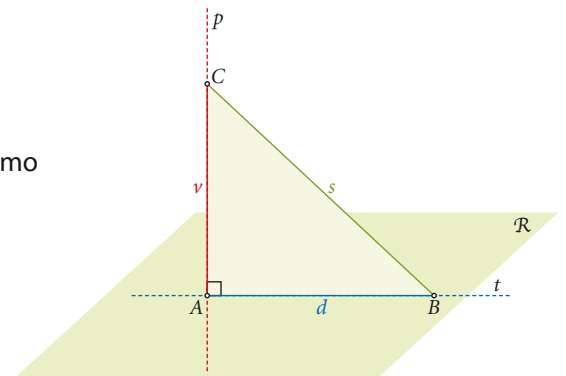
Kako računamo razdalje v prostoru

V ravnini $\mathcal{R}$ je dana premica AB , izven ravnine pa točka C , tako da je $(A, C) \perp \mathcal{R}$. Narišimo sliko in v nastalem pravokotnem trikotniku uvedimo naslednje oznake:

$|AB| = d$ – dolžina daljice v ravnini

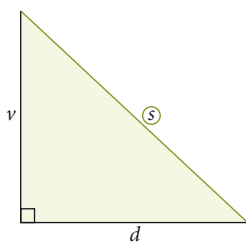
$|BC| = s$ – dolžina poševnice

$|AC| = v$ – pravokotna razdalja točke C od ravnine

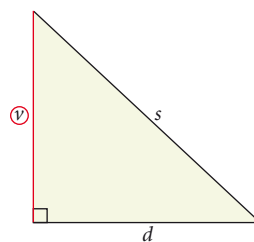


Pri reševanju geometrijskih nalog moramo pogosto izračunati neznano stranico v pravokotnem trikotniku, če poznamo preostali dve.

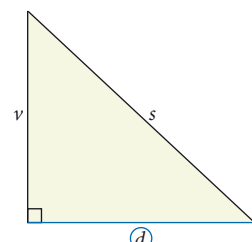
Podobne naloge smo reševali že v 8. razredu pri obravnavi Pitagorovega izreka, kjer smo računali bodisi hipotenuzo bodisi eno od obeh katet.



$$s^2 = v^2 + d^2$$



$$v^2 = s^2 - d^2$$



$$d^2 = s^2 - v^2$$

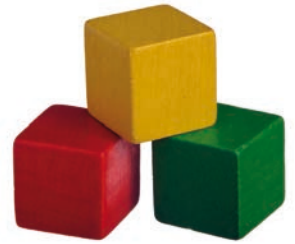


REŠENI PRIMERI

- 1 V kocki določi odnose med geometrijskimi elementi in jih, če je mogoče, zapiši z ustreznimi matematičnimi simboli. V modelu kocke z barvo označi zapisane geometrijske elemente.

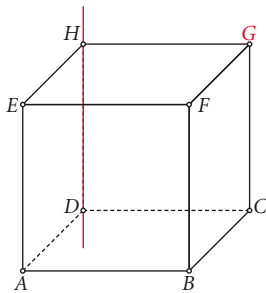
Namig: Pomagaj si z žičnim modelom kocke in nariši skico.

- a) točka G in premica (D, H)
- b) premica (E, F) in premica (B, F)
- c) premica (B, C) in premica (E, H)
- č) premica (A, D) in ravnina BCF
- d) ravnina BGH in ravnina DCG



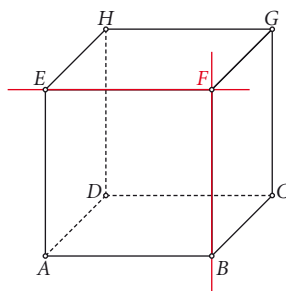
Rešitev:

- a) točka G in premica (D, H)



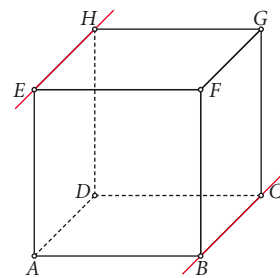
Točka G ne leži na premici (D, H) :
 $G \notin (D, H)$.

- b) premica (E, F) in premica (B, F)



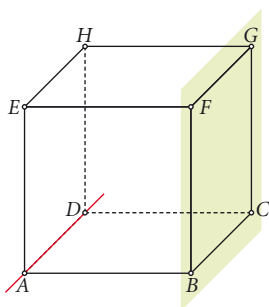
Premici (E, F) in (B, F) se sekata v točki F
 $(E, F) \cap (B, F) = \{F\}$.

- c) premica (B, C) in premica (E, H)



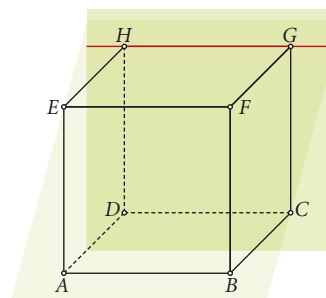
Premici (B, C) in (E, H) sta vzporedni
 $(B, C) \parallel (E, H)$.

- č) premica AD in ravnina BCF



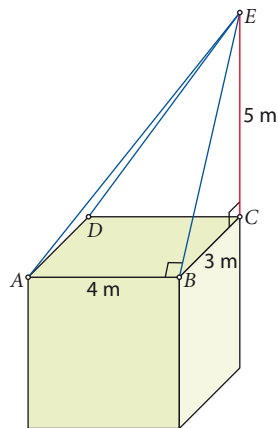
Premica (A, D) je vzporedna z ravnino BCF .

- d) ravnina BGH in ravnina DCG



Ravnini BGH in DCG se sekata; imata skupno premico (G, H) .

- ② Na vrhu stolpa je pravokotno na ravnino stolpa postavljena antena, ki je pritrjena s tremi jeklenimi palicami. Izračunaj skupno dolžino jeklenih palic, ki držijo anteno.

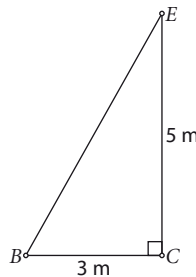


Rešitev:

Na sliki označimo oglišča stolpa A , B , C in D kot ravninske točke, vrh antene po točko E zunaj ravnine. Do rešitve pridemo s pomočjo treh pravokotnih trikotnikov:

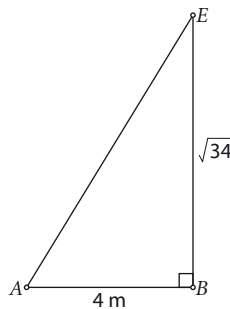
$\triangle BCE$ (v njem sta znani dve stranici in zato začnemo nalogo reševati v tem trikotniku):

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= |BC|^2 + |CE|^2 \\ |BE|^2 &= 3^2 + 5^2 \\ |BE|^2 &= 9 + 25 \\ |BE|^2 &= 34 \\ |BE| &= \sqrt{34} \text{ m} \end{aligned}$$



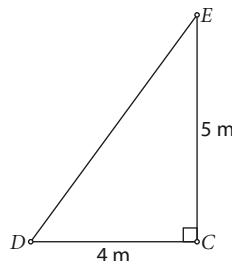
$\triangle ABE$ (poznamo dolžino stranice $|AB|$, dolžino stranice $|BE|$ pa smo izračunali pred tem).

$$\begin{aligned} |AE|^2 &= |AB|^2 + |BE|^2 \\ |AE|^2 &= 4^2 + (\sqrt{34})^2 \\ |AE|^2 &= 16 + 34 \\ |AE|^2 &= 50 \\ |AE| &= \sqrt{50} \text{ m} = 5\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$



$\triangle DCE$:

$$\begin{aligned} |DE|^2 &= |DC|^2 + |CE|^2 \\ |DE|^2 &= 4^2 + 5^2 \\ |DE|^2 &= 16 + 25 \\ |DE|^2 &= 41 \\ |DE| &= \sqrt{41} \text{ m} \end{aligned}$$



Odgovor: Skupna dolžina palic meri $(\sqrt{34} + \sqrt{50} + \sqrt{41}) \text{ m} \doteq 5,83 \text{ m} + 7,07 \text{ m} + 6,40 \text{ m} \doteq 19,3 \text{ m}$

3 Na ravnini $\mathcal{R}$ ležijo točke A, B in C , zunaj ravnine pa točka D , tako da velja:

$(A, B) \perp (B, C)$, $(C, D) \perp \mathcal{R}$, ter $|AC| = 13 \text{ cm}$, $|AB| = 5 \text{ cm}$ in $|DC| = 16 \text{ cm}$.

a) Nariši sliko, ki ponazarja zapisane odnose, in na njej označi znane razdalje.

b) Izračunaj $|BD|$.

Rešitev:

a) Potek načrtovanja:

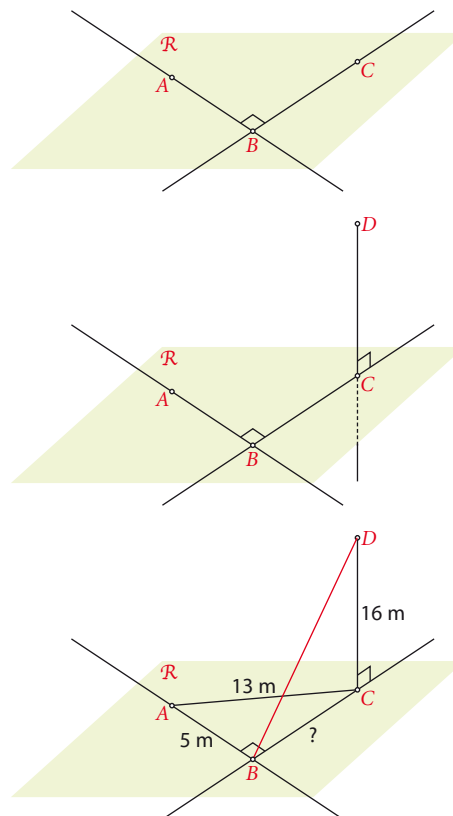
1. Narišemo ravnino $\mathcal{R}$ in na njej točke A, B in C tako, da bo veljalo $(A, B) \perp (B, C)$.

2. Točka D leži zunaj ravnine tako, da je $CD \perp \mathcal{R}$.

Skozi točko C narišemo pravokotnico na ravnino $\mathcal{R}$ oziroma na premico (B, C) .

3. Povežemo še točki B in D ter A in C .

Na sliki označimo znane razdalje.



b) Iz podatkov na sliki razberemo, da moramo najprej izračunati razdaljo $|BC|$ v ravnini $\mathcal{R}$.

Iz pravokotnega trikotnika ABC sledi:

$$|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2$$

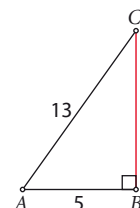
$$|BC|^2 = 13^2 - 5^2$$

$$|BC|^2 = 169 - 25$$

$$|BC|^2 = 144$$

$$|BC| = \sqrt{144}$$

$$|BC| = 12 \text{ cm}$$



Iz pravokotnega trikotnika BCD izračunamo dolžina daljice $|BD|$:

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2$$

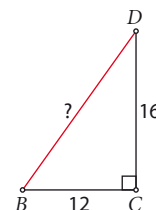
$$|BD|^2 = 12^2 + 16^2$$

$$|BD|^2 = 144 + 256$$

$$|BD|^2 = 400$$

$$|BD| = \sqrt{400}$$

$$|BD| = 20 \text{ cm}$$

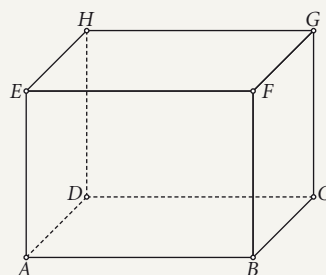


Odgovor: Razdalja $|BD|$ meri 20 cm.

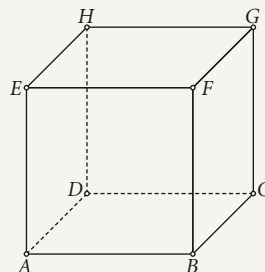


- 1 V svoji okolici poišči primere za model točke, premice in ravnine. Zapiši jih in razmisli o pomanjkljivostih. Razmisli o odnosih med temi elementi in opiši primer za vzporedni premici ter vzporedni ravnini.
- 2 Na primeru zavese, ki visi na obročkih, pojasni model točke, premice in ravnine. Nariši skico. Model ustrezno komentiraj oziroma pojasni, zakaj ni idealen.
- 3 Koliko premic lahko narišemo skozi eno točko, skozi dve točki in skozi tri točke? Pojasni in nariši.
- 4 V ravnini je dana premica p in točka T , ki ne leži na premici.
 - a) Nariši sliko.
 - b) Zapiši odnos med točko in premico z uporabo matematičnih simbolov.
 - c) Koliko pravokotnic lahko narišeš iz točke T na premico p ?
 - č) Izmeri razdaljo točke T od premice p .
- 5 Premici se ujemata v dveh skupnih točkah. Kaj lahko poveš o takih premicah?
- 6 V najmanj koliko točkah se morata ujemati dve ravnini, da bosta identični?
- 7 Koliko ravnin lahko narišemo skozi eno točko, skozi dve točki in skozi tri točke?
- 8 Dana je kocka $ABCDEFGH$. S pomočjo žičnega modela ali skice pojasni, v kakšnem odnosu sta:
 - a) točka C in premica (A, E) ?
 - b) točka G in ravnina ABE ?
 - c) premici (A, B) in (D, H) ?
 - č) premici (B, D) in (F, H) ?
 - d) premici (A, C) in (E, C) ?
 - e) premica (A, B) in ravnina FGH ?
 - f) premica (C, E) in ravnina ABG ?
 - g) ravnini ABF in CDH ?Vse primere označi na modelu kocke v zvezku.

- 9 Dopolni izjave za spodnji model kvadra tako, da poiščeš ustrezno točko, premico ali ravnino. Če je več rešitev, zapiši eno od teh.
 - a) Točka ___ ne leži na premici (A, D) .
 - b) Točka B leži v ravnini ___
 - c) Premici ___ in (C, F) sta vzporedni.
 - č) Premici (D, C) in ___ sta mimobežni.
 - d) Ravnini ___ in ADH sta vzporedni.
 - e) Premica (A, F) in ravnina ___ nimata skupne točke.
 - f) Premica ___ leži v ravnini ABG .
 - g) Ravnini ABH in ___ imata skupno premico (G, H) .



- 10 Dana je kocka $ABCDEFGH$. Popravi poševno zapisane izraze tako, da bodo trditve pravilne.
 - a) Premici (B, D) in (F, H) sta **mimobežnici**.
 - b) Premica (E, G) **seka** ravnino ABD .
 - c) Točka C **leži** v ravnini DBF .
 - č) Ravnini CDH in ACG sta **vzporedni**.
 - d) Premici (A, D) in (F, G) sta **sečnici**.
 - e) Točke C, F, G so **kolinearne**.
 - f) Premici (A, G) in (C, E) sta **vzporedni**.
 - g) Razdalja DH je **poševnica** ravnine ABC .
 - h) V trikotniku ACE je razdalja $|AE|$ **hipotenuza**.
 - i) Trikotnik ACH je **pravokoten**.
 - j) Štirikotnik $ACGE$ je **kvadrat**.



11 Nariši ustrezno sliko.

- a) Premici p in r se sekata v točki A .
- b) V ravnini $\mathcal{R}$ ležijo točke A, B, C in D .
 A, B, C so kolinearne, D pa je nekolinearna.
- c) Premica p seka ravnino $\mathcal{P}$ v točki S .
- č) Ravnini $\mathcal{P}$ in $\mathcal{R}$ nimata skupne točke.

12 V kvadru $ABCDEFGH$ merijo robovi $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 24$ cm in $|CG| = 26$ cm.

- a) Nariši model in na njem označi dane podatke.
- b) Izračunaj razdaljo $|AC|$.
- c) Izračunaj razdaljo $|AG|$.
- č) Izračunaj ploščino štirikotnika $ACGE$.

13 Dan je pravokotnik $KLMN$ s stranicama $|KL| = 6$ cm in $|LM| = 8$ cm. V oglišču M narišemo pravokotnico na ravnino, v kateri leži pravokotnik, in na njej označimo točko O tako, da velja $|LO| = 17$ cm.

- a) Izračunaj razdaljo točke O od ravnine pravokotnika.
- b) Izračunaj dolžino najdaljše poševnice na sliki.
- c) Izračunaj ploščino trikotnika LMO .

14 V ravnini nariši nekolinearne točke A, B in C , tako da bo veljalo: $AB \perp BC$, $|AB| = 8$ cm in $|BC| = 15$ cm. V točki A nariši pravokotnico na ravnino trikotnika in na njej označi točko D tako, da velja $|AD| = 6$ cm.

- a) Izračunaj razdaljo $|BD|$.
- b) Izračunaj razdaljo $|CD|$.
- c) Izračunaj ploščino trikotnika ACD .

ZMOREM TUDI TO

15 Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico a . V presečišču diagonal kvadrata, ki ga označi s točko S , postavi pravokotnico na ravnino, v kateri leži kvadrat. Na pravokotnici označi točko E tako, da je $|SE| = 3a$.

- a) Nariši skico in jo označi.
- b) Razdaljo $|AE|$ izrazi s pomočjo parametra a .
- c) Ploščino trikotnika ACE izrazi s pomočjo parametra a .

16 V kocki $ABCDEFGH$ meri rob $2x$.

- a) Izrazi razdaljo $|AC|$ s pomočjo parametra x .
- b) Izrazi razdaljo $|AG|$ s pomočjo parametra x .
- c) S pomočjo parametra x izrazi ploščino trikotnika ACH .
- č) S pomočjo parametra x izrazi ploščino štirikotnika $BDHF$.
- d) Koliko znaša x , če je ploščina trikotnika ACH enaka $162\sqrt{3}$ cm².

17 Dan je pravokotnik $ABCD$ s stranicama $|AB| = 4a$ in $|BC| = 3a$. Iz točke D narišemo pravokotnico na diagonalo AC in presečišče pravokotnice z diagonalo označimo s točko E . Izven ravnine pravokotnika je dana točka F , tako da je premica EF pravokotna na ravnino pravokotnika in je $|EF| = 2,4 a$.

- a) Izračunaj razdaljo $|AF|$.
- b) Izračunaj ploščino trikotnika AEF .

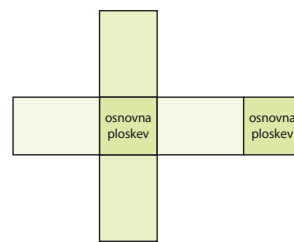
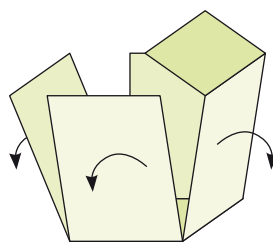
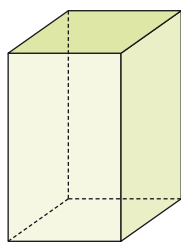


2 GEOMETRIJSKA TELESA

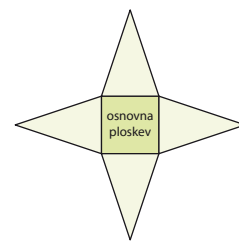
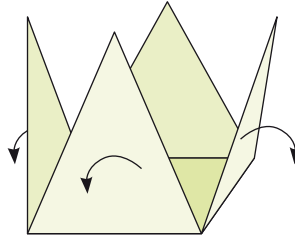
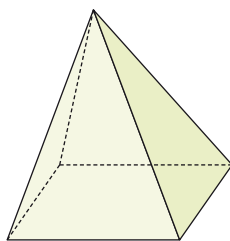
Geometrijska telesa so lahko oglata ali okrogla oziroma pokončna ali poševna. V nadaljevanju bomo obravnavali le pokončna telesa (poševna telesa so v preglednici prikazana le zato, da vidimo, v čem se razlikujejo od pokončnih).

UGLATA TELESA imajo vse ploskve ravne.

POKONČNA PRIZMA ima dve enaki osnovni ploskvi (n -kotnika), plašč pa tvori n pravokotnikov.

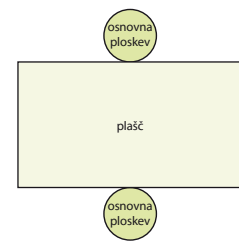
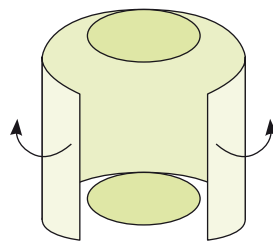
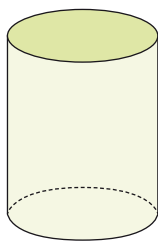


POKONČNA PIRAMIDA ima eno osnovno ploskev (n -kotnik), plašč pa tvori n enakokrakih trikotnikov.

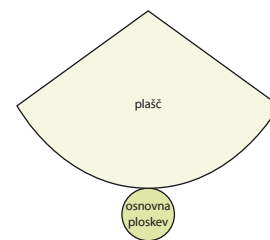
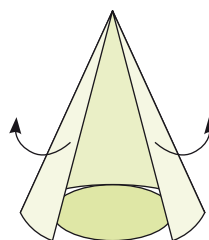
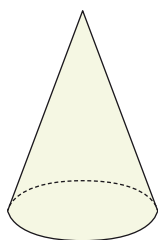


OKROGLA TELESA imajo vsaj eno ploskev krivo.

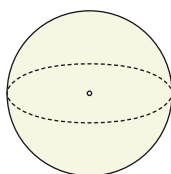
POKONČNI VALJ ima dve osnovni ploskvi (kroga), plašč pa tvori pravokotnik – če ga razgrnemo.



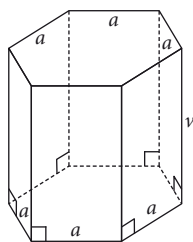
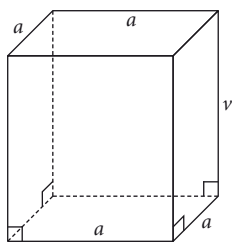
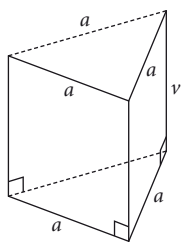
POKONČNI STOŽEC ima eno osnovno ploskev (krog), plašč pa tvori krožni izsek – če ga razgrnemo.



KROGLA je obdana s krivo ploskvijo (sfero), na kateri so vse točke enako oddaljene od središča.

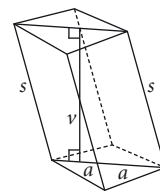


Vsi stranski robovi so enako dolgi in pravokotni na osnovno ploskev.

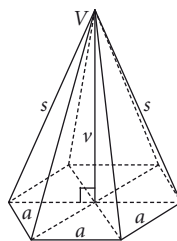
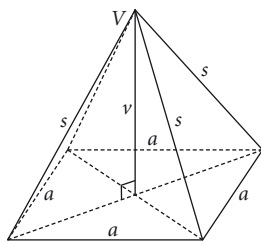
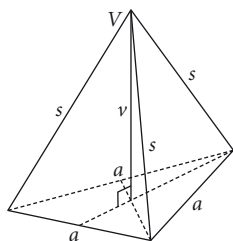


POŠEVNA PRIZMA

Stranski robovi niso pravokotni na osnovno ploskev.

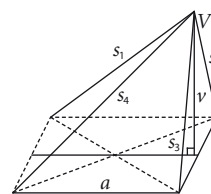


Vsi stranski robovi so enako dolgi.

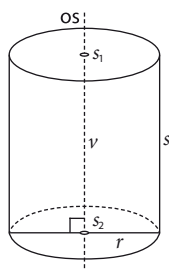


POŠEVNA PIRAMIDA

Stranski robovi niso enako dolgi.

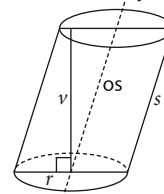


Vse stranice valja so enake višini valja.
Os je pravokotna na osnovno ploskev.

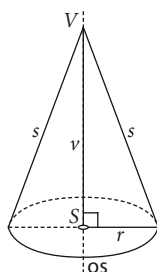


POŠEVNI VALJ

Stranice valja so daljše od višine valja.

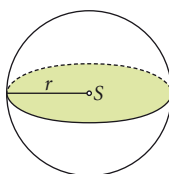
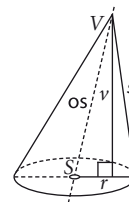


Vse stranice stožca so enako dolge.
Os je pravokotna na osnovno ploskev.



POŠEVNI STOŽEC

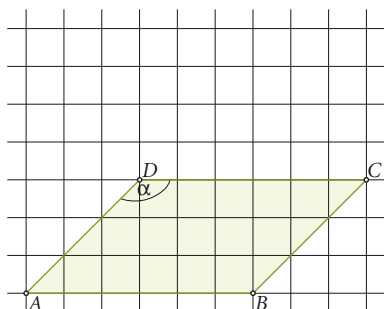
Stranice stožca niso enako dolge.



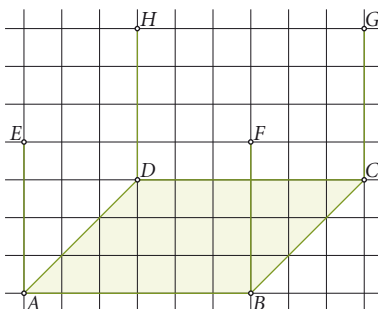
Risanje geometrijskih teles

Geometrijsko telo v poševni projekciji narišemo po korakih: 1. korak: Osnovno ploskev narišemo pod danim kotom α (običajno je to 135°). Poševne daljice zmanjšamo za dani faktor (običajno za polovico) 2. korak: Skozi oglišča osnovne ploskve narišemo stranske robove in na njih odmerimo višino telesa 3. korak: Nazadnje narišemo še zgornjo osnovno ploskev in izvlečemo vidne (polna črta) in nevidne robove (črtkana črta) 4. korak: Risanje je enostavnejše, če uporabimo karirast papir (npr. $5 \times 5 \text{ mm}$).

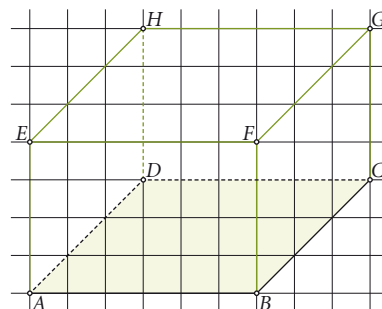
1 poševna projekcija spodnje osnovne ploskve



2 stranski robovi



3 zgornja osnovna ploskev



Za risanje geometrijskih teles lahko uporabljamo tudi različne računalniške programe. Med njimi je tudi Cabri, ki omogoča konstrukcije enostavnih in zahtevnejših geometrijskih teles. Z njim lahko merimo dolžine daljic, velikosti kotov ter površine in prostornine teles.

Prednost risanja geometrijskih teles s pomočjo računalniških programov v primerjavi z prostoročnim risanjem je v tem, da lahko s pomočjo ustreznih orodij v programu spreminjamo lego narisanege telesa oziroma zorni kot pod katerim gledamo telo. Na ta način dobimo boljšo predstavbo o narisnem geometrijskem telesu.



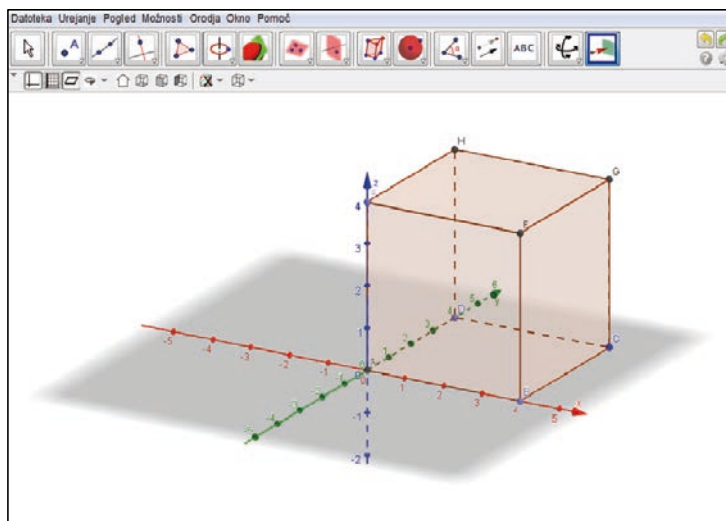
REŠENI PRIMERI

1 S pomočjo računalniškega programa »GeoGebra« nariši kocko z robom 4 cm.

Rešitev:

V podmeniju »ORODJA« izberemo »POGLED 3D«, ki nam prikaže pravokotni koordinatni sistem v prostoru.

Osnovna ploskev pravilne 4-strane prizme je kvadrat, zato s klikom na ikono za risanje večkotnikov »MNOGOKOTNIK«, v ravnini, ki jo določata osi x in y , narišemo kvadrat s stranico 4 cm. Nato kliknemo na ikono »PRIZMA«, na osi »z« narišemo višino 4 cm in program izriše kocko, ki je poseben primer prizme (enakorobna 4-strana prizma). Na izrisani sliki so označena tudi vsa oglišča.



Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo drugih primernih računalniških programov.

3 PRIZMA

Izvedel boš:

- kaj je prizma in katere vrste prizem poznamo,
- kako izračunamo površino in prostornino prizme.

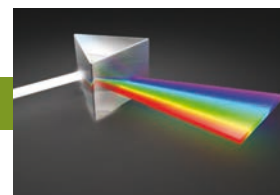
Špela je pri fiziki izvedela, da se svetloba pri prehodu skozi prizmo zaradi njene posebne oblike razkloni v mavrične barve.

RAZMISLI

Kakšna je »posebna oblika« prizme?

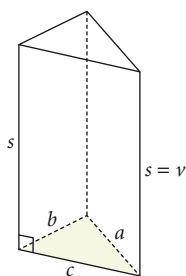


Pokončna prizma je oglato geometrijsko telo, ki ima **dve skladni vzporedni osnovni ploskvi** (poljubna n -kotnika), plašč pa sestavlja **n pravokotnikov**. Če je osnovna ploskev pravilni n -kotnik (npr. enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni šestkotnik ...), pravimo, da je prizma **pravilna**.



TRISTRANA PRIZMA

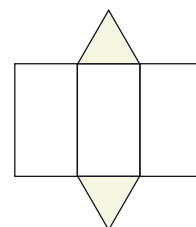
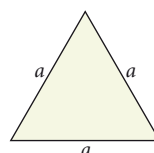
Osnovna ploskev je poljuben trikotnik.



PRAVILNE PRIZME



Osnovna ploskev je enakostranični trikotnik.

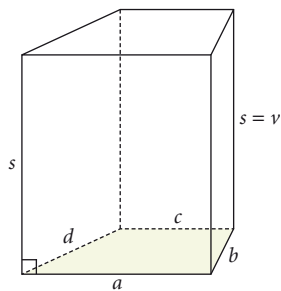


pravilna tristrana prizma

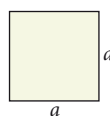
* Poseben primer pravilne tristrane prizme je ENAKOROBNA TRISTRANA PRIZMA ($a = v$).

ŠTIRISTRANA PRIZMA

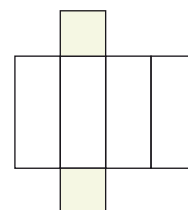
Osnovna ploskev je poljuben štirikotnik.



Osnovna ploskev je kvadrat.



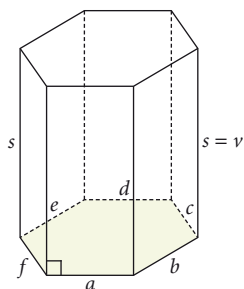
pravilna štiristrana prizma



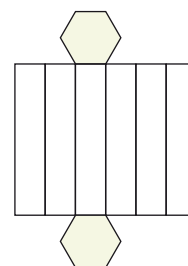
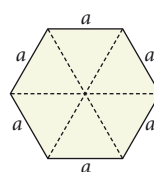
* Poseben primer pravilne štiristrane prizme je ENAKOROBNA ŠTIRISTRANA PRIZMA ($a = v$) ali KOCKA.

ŠESTSTRANA PRIZMA

Osnovna ploskev je poljuben šestkotnik.



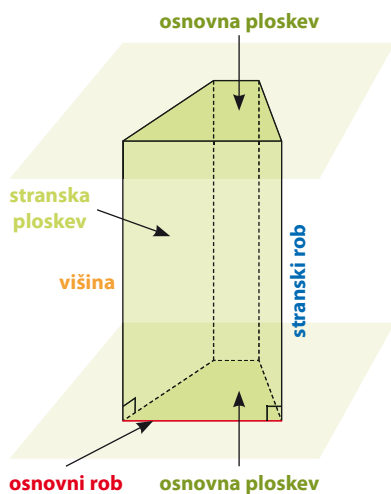
Osnovna ploskev je pravilni šestkotnik.



pravilna šeststrana prizma

V osnovni šoli bomo obravnavali le **pokončne prizme**.

Osnovni pojmi v prizmi



OSNOVNI PLOSKVI (O) prizme sta skladna n -kotnika, ki ležita na vzporednih ravninah.

OSNOVNI ROBOVI (a) so stranice n -kotnika, ki predstavlja osnovno ploskev prizme.

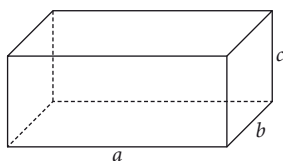
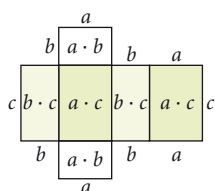
STRANSKE PLOSKVE so pravokotniki.

VIŠINA PRIZME (v) je razdalja med vzporednima ravninama osnovnih ploskev.

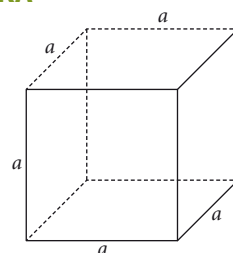
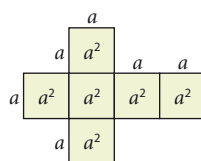
STRANSKI ROB (s) je rob, kjer se stikata dve sosednji stranski ploskvi. Vsi stranski robovi prizem so skladni.

O geometrijskih telesih, njihovi površini in prostornini smo govorili že v 8. razredu, ko smo spoznali dve takšni telesi: **KVADER** in **KOCKO**. To znanje nam bo koristilo tudi pri obravnavi novih geometrijskih teles.

KVADER



KOCKA



Površina prizme

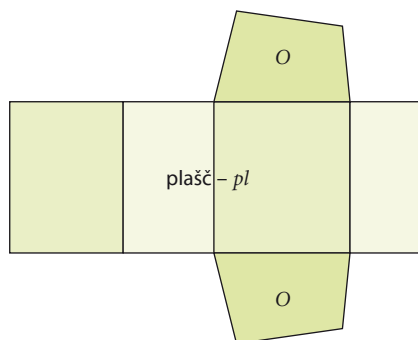
Površina poljubnega geometrijskega telesa je vsota ploščin vseh geometrijskih likov, ki sestavljajo njegovo mrežo. Iz mreže prizme je razvidno, da je površina prizme sestavljena iz **dveh osnovnih ploskev O** , ki sta poljubna med seboj enaka n -kotnika, in iz **n pravokotnikov**, ki obdajajo osnovno ploskev in skupaj tvorijo **plašč prizme pl** .

Površina n -strane prizme je enaka vsoti ploščin obeh osnovnih ploskev in ploščine plašča sestavljenega iz n pravokotnikov.



POVRŠINA PRIZME

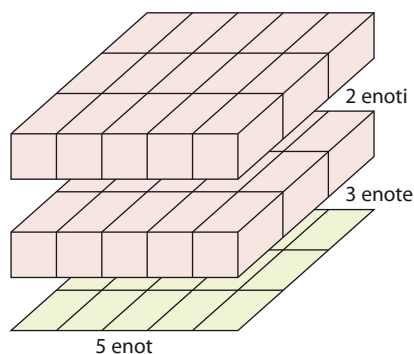
$$P = 2O + pl$$



Prostornina prizme

Prostornina kvadra z robovi a , b in c je:

$$V = a \cdot b \cdot c$$



$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ V &= 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ V &= 30 \text{ enot}^3 \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} V &= O \cdot v \\ V &= 15 \cdot 2 \\ V &= 30 \text{ enot}^3 \end{aligned}$$

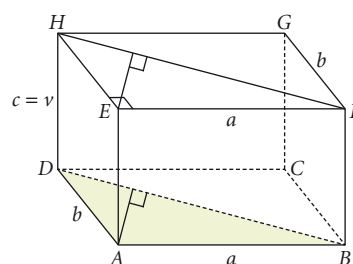
Ker je $a \cdot b$ ploščina osnovne ploskve ($p = a \cdot b$), rob c ($c = v$) pa je višina, lahko obrazec za računanje prostornine kvadra zapišemo tudi kot produkt ploščine osnovne ploskve (O) in višine (v):

$$V = O \cdot v$$

Kvader lahko z ravnino, ki gre skozi telesno diagonalno, razdelimo v dve 3-strani prizmi z enako prostornino. Prostornina vsake od obeh prizem (V_p) je enaka polovici prostornine kvadra (V_k):

$$V_p = \frac{V_k}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot c$$

$$V_p = O \cdot v$$



Izhaja, da je tudi v 3-strani prizmi prostornina enaka produktu ploščine osnovne ploskve (O) in višine (v).

Ker lahko vsako prizmo razdelimo na 3-strane prizme, ki imajo za osnovno ploskev trikotnik, lahko to ugotovitev posplošimo za poljubno prizmo.

Prostornina prizme je enaka produktu ploščine osnovne ploskve in višine.



PROSTORNINA PRIZME

$$V = O \cdot v$$



Ugotovi, kako izračunamo površino in prostornino različnih pravih prizem.
DZ – naloga 4.2

Enakorobe prizme

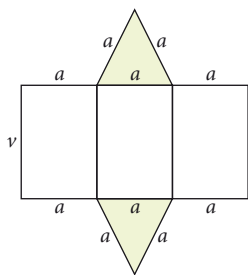
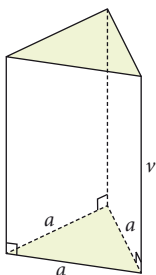
Enakorobe prizme so prizme, ki imajo vse robove (osnovne in stranske) enako dolge.

Enakoroba tristrana prizma	Enakoroba štiristrana prizma	Enakoroba šeststrana prizma
	kocka	

Pravilne prizme

Za vsako pravilno prizmo iz kartona izdelaj model (mrežo) tako, da boš lahko sestavil prizmo in raziskal, kako izračunamo P in V .

Pravilna 3-strana prizma ima za osnovno ploskev **enakostranični trikotnik**, plašč pa tvorijo trije skladni pravokotniki.



PRAVILNA 3-STRANA PRIZMA

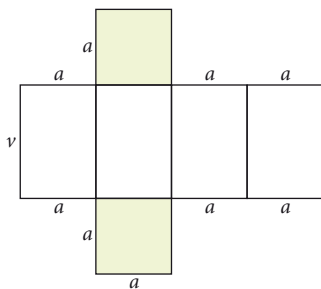
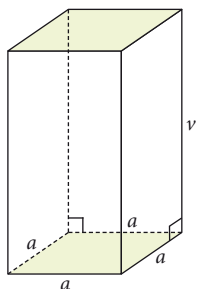
$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$pl = 3av$$

$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}v$$

Pravilna 4-strana prizma ima za osnovno ploskev **kvadrat**, plašč pa tvorijo štirje skladni pravokotniki.



PRAVILNA 4-STRANA PRIZMA

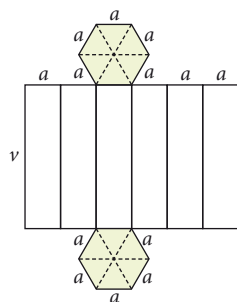
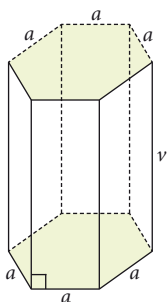
$$O = a^2$$

$$pl = 4av$$

$$P = 2a^2 + 4av$$

$$V = a^2v$$

Pravilna 6-strana prizma ima za osnovno ploskev **pravilni šestkotnik**, plašč pa tvori šest skladnih pravokotnikov.



PRAVILNA 6-STRANA PRIZMA

$$O = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$pl = 6av$$

$$P = 2 \cdot 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6av$$

$$V = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}v$$



REŠEVANJE GEOMETRIJSKIH NALOG

1. Narišemo skico telesa ali mrežo telesa – odvisno od naloge in podatkov.
2. Izpišemo dane podatke in količine, ki jih računamo.
3. Na modelu ali mreži označimo dane in iskane količine.
4. Zapišemo ustrezne obrazce, ki veljajo za dano telo.
5. Izračunamo iskane količine in napišemo odgovor.



REŠENI PRIMERI

1 Slika prikazuje lesen tram.

- a) Obliko katerega geometrijskega telesa ima tram?
- b) Izračunaj velikost osnovne ploskve trama.
- c) Koliko m^3 lesa je v tramu?
- č) Koliko tehta tram, če je gostota lesa 600 kg/m^3 ?

Rešitev:

Podatki:

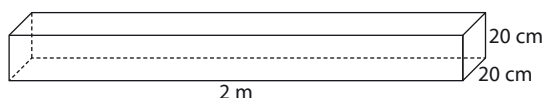
$$a = 20 \text{ cm}$$

$$v = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$$

$$O =$$

$$V =$$

$$m =$$



POZOR!

Če podatki niso v istih enotah, jih najprej pretvorimo.

a) Tram ima obliko pravilne 4-strane prizme, saj je osnovna ploskev kvadrat.

b) Osnova ploskev je kvadrat: $O = a^2$

$$O = 20^2$$

$$O = 400 \text{ cm}^2$$

c) Prostornino prizme izračunamo po obrazcu: $V = O \cdot v$. Vse mere pretvorimo v isto enoto: cm, dm ali m.

$$V = 400 \text{ cm}^2 \cdot 200 \text{ cm}$$

$$V = 80000 \text{ cm}^3$$

$$V = 0,08 \text{ m}^3$$

Odgovor: V tramu je $0,08 \text{ m}^3$ lesa.

č) Maso trama izračunamo s pomočjo znane gostote s sklepanjem: podatek o gostoti lesa, ki je 600 kg/m^3 , pove, da en kubični meter lesa tehta 600 kg. Upoštevamo premo sorazmerje, kar pomeni, da gostoto lesa pomnožimo s prostornino trama in dobimo:

$$m = 600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,08 \text{ m}^3$$

$$m = 48 \text{ kg}$$

Odgovor: Masa trama je 48 kg.



- 2 Koliko papirja potrebujemo za izdelavo kartonske škatlice za čokolado, katere mreža je prikazana na sliki v merilu 1 : 3? Rezultat zaokrožimo na dve decimalni mesti.

Rešitev: Škatlica ima obliko pravilne 3-strane prizme.
Izmerimo osnovni rob in višino, pri čemer upoštevamo merilo.

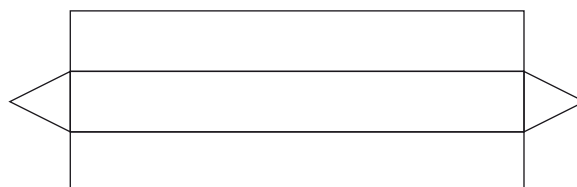
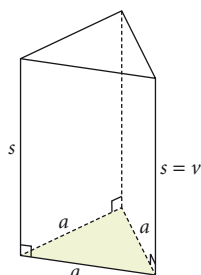
Računamo površino prizme, saj naloga sprašuje po količini papirja.

Podatki:

$$a = 3 \text{ cm}$$

$$v = 19 \text{ cm}$$

$$P =$$



Za računanje površine potrebujemo obrazec za ploščino enakostraničnega trikotnika, ki predstavlja osnovno ploskev. Plašč tvorijo trije skladni pravokotniki.

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$O = \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$$

$$O = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$O = 2,25 \cdot 1,73$$

$$O = 3,89 \text{ cm}^2$$

$$pl = 3av$$

$$pl = 3 \cdot 3 \cdot 19$$

$$pl = 171 \text{ cm}^2$$

$$P = 2O + pl$$

$$P = 2 \cdot 3,89 + 171$$

$$P = 7,78 + 171$$

$$P = 178,78 \text{ cm}^2$$



POMNI

Pri računanju s koreni, ki so iracionalna števila, bomo upoštevali natančnost na dve decimalki:
 $\sqrt{2} \doteq 1,41$; $\sqrt{3} \doteq 1,73 \dots$

Odgovor: Za izdelavo škatlice bi potrebovali najmanj $178,78 \text{ cm}^2$ kartona (v resnici ga potrebujemo nekaj več, saj so na določenih mestih zaradi lepljenja potrebni dodatki).

- 3 Plašč pravilne 6-strane prizme meri 288 cm^2 , osnovna ploskev pa $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Koliko meri prostornina prizme?

Rešitev:

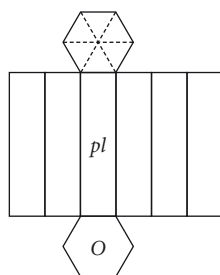
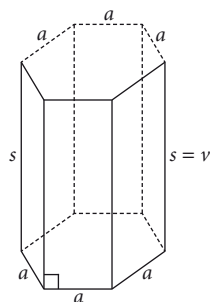
S pomočjo osnovne ploskve izračunamo osnovni rob tako, da iz obrazca za ploščino pravilnega 6-kotnika (sestavlja ga šest enakostraničnih trikotnikov) izrazimo stranico a :

Podatki:

$$pl = 288 \text{ cm}^2$$

$$O = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V =$$



$$O = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$4O = 6a^2\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{4O}{6\sqrt{3}}$$

$$a^2 = \frac{96\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4 \text{ cm}$$



Iz plašča izrazimo višino prizme:

$$pl = 6av$$

$$v = \frac{pl}{6a}$$

$$v = \frac{288}{24}$$

$$v = 12 \text{ cm}$$

Odgovor: Prostornina prizme meri $288\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

S pomočjo znanega osnovnega roba in višine lahko nazadnje izračunamo prostornino prizme:

$$V = Ov$$

$$V = \frac{6a^2\sqrt{3}v}{4}$$

$$V = \frac{6 \cdot 4^2\sqrt{3} \cdot 12}{4}$$

$$V = 288\sqrt{3} \text{ cm}^3$$



POMNI

Če naloga ne zahteva drugače, lahko rezultat zapišemo kot mnogokratnik kvadratnega korena. S tem se izognemo množenju z decimalnim številom, takšen rezultat pa bi bil nenatančen (zaokrožen).

- 4 Osnovna ploskev 3-strane prizme je pravokotni trikotnik s katetama 5 cm in 12 cm. Višina prizme je 2-kratnik dolžine hipotenuze osnovne ploskve. Izračunaj prostornino prizme.

Podatki:

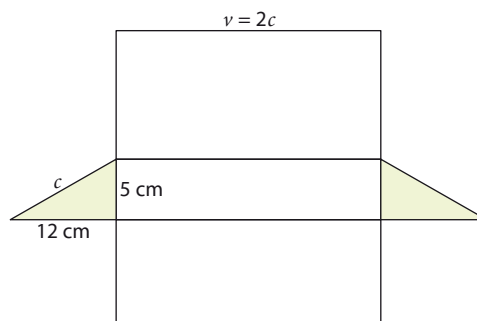
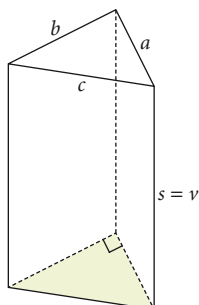
$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 12 \text{ cm}$$

$$v = 2c$$

$$c =$$

$$V =$$



Rešitev:

1. Osnovna ploskev prizme je pravokotni trikotnik. Njeno velikost zato izračunamo kot polovični produkt obeh katet:

$$O = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$O = \frac{5 \cdot 12}{2}$$

$$O = 30 \text{ cm}^2$$

3. Nato izračunamo višino prizme, ki je 2-kratnik hipotenuze:

$$v = 2c$$

$$v = 2 \cdot 13$$

$$v = 26 \text{ cm}$$

2. S pomočjo znanih katet izračunamo hipotenuzo (Pitagorov izrek):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 5^2 + 12^2$$

$$c^2 = 25 + 144$$

$$c^2 = 169$$

$$c = \sqrt{169}$$

$$c = 13 \text{ cm}$$

4. Na koncu izračunamo prostornino prizme:

$$V = O \cdot v$$

$$V = 30 \cdot 26$$

$$V = 780 \text{ cm}^3$$



Odgovor: Prostornina prizme meri 780 cm^3 .

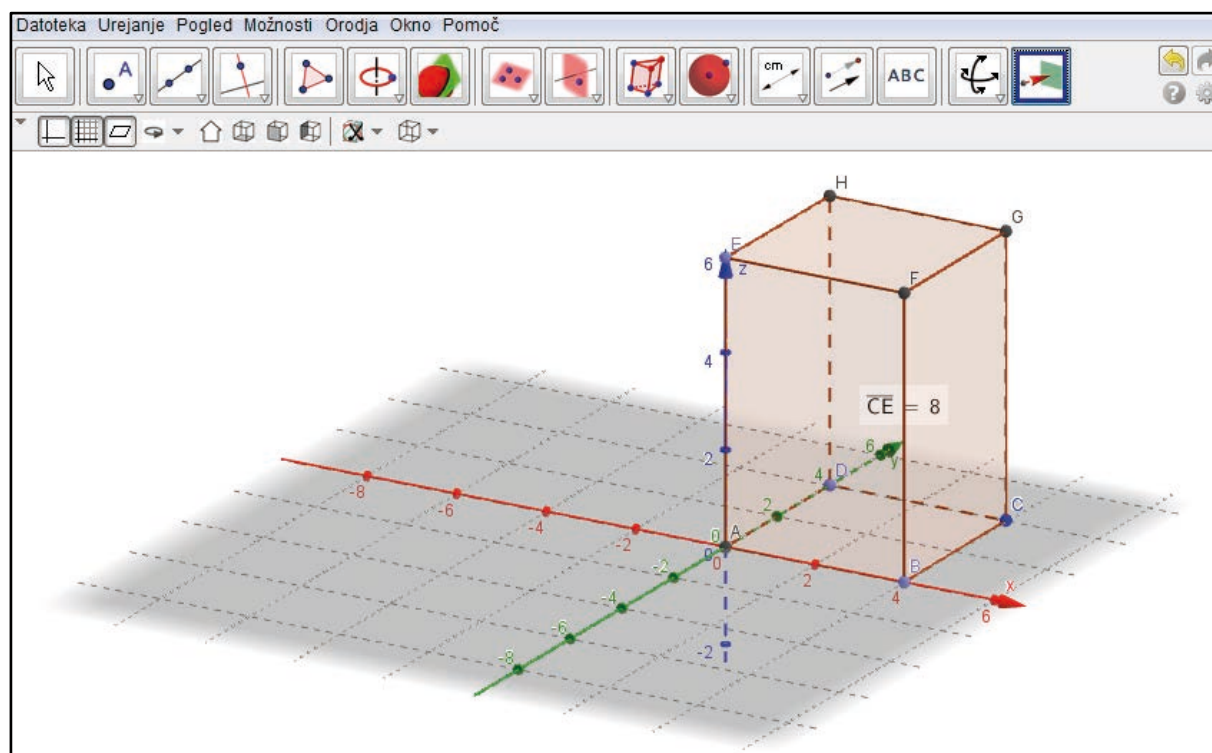
- 5 S pomočjo programa »GeoGebra« nariši pravilno 4-strano prizmo z osnovnim robom 4 cm in višino 6 cm. Narisano prizmo si oglej iz vseh strani tako, da uporabiš orodja za vrtenje oziroma obračanje prizme. Z izbiro ustrezne ikone izračunaj dolžino telesne diagonale in prostornino prizme.

Rešitev:

V podmeniju »ORODJA« izberemo »POGLED 3D«, ki nam prikaže pravokotni koordinatni sistem v prostoru. Osnovna ploskev pravilne 4-strane prizme je kvadrat, zato s klikom na ikono za risanje večkotnikov »MNOGOKOTNIK«, v ravnini, ki jo določata osi x in y , narišemo kvadrat s stranico 4 cm. Nato kliknemo na ikono »PRIZMA«, na osi »z« narišemo višino 4 cm in program izriše pravilno 4-strano prizmo. Na izrisani sliki so označena tudi vsa oglišča.

S pomočjo ikone »ZAVRTI 3D POGLED« si lahko ogledamo prizmo iz vseh strani, saj jo lahko poljubno obračamo.

Dolžino telesne diagonale izračunamo s pomočjo ukaza »RAZDALJA« in to tako, da označimo začetno ter končno točko ustrezne diagonale. Diagonala meri 8,2 cm ali približno 8 cm, če v programu nastavimo zaozroževanje na cela števila. Prostornino prizme izračunamo s pomočjo ikone »VOLUME« in s klikom na prizmo program izračuna prostornino, ki meri 96 cm^3 .

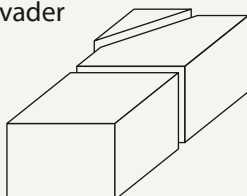


Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo drugih primernih računalniških programov.

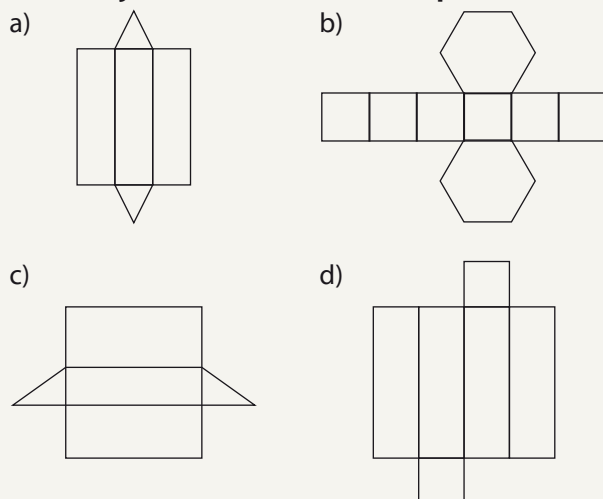


Z uporabo ustreznega računalniškega programa lahko preveriš izračunane rezultate. Program omogoča izris telesa in njegove mreže ter izračun površine in prostornine teles.

- 1 a) Od kod izvira beseda prizma in kaj pomeni?
b) Koliko prizem nastane, če kvader razrežemo, kot kaže slika?
c) Kakšne prizme nastanejo?



- 2 Poimenuj telesa, katerih mreže so prikazane.



- 3 Koliko cm žice je potrebne za izdelavo žičnega modela z osnovnim robom 6 cm in višino 20 cm, če je prizma:

- a) pravilna 3-strana
b) pravilna 4-strana
c) pravilna 6-strana

- 4 Izpolni preglednico.

	3-strana prizma		
število oglišč		10	
število robov			18
število ploskev			

- 5 Ugotovi, ali je trditev pravilna ali nepravilna.

- a) Stranska ploskev pokončne 3-strane prizme je trikotnik.
b) Višina stranske ploskve pokončne prizme je enaka višini prizme.
c) 7-strana prizma ima 21 robov.

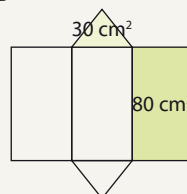
- č) Pravilna 4-strana prizma ima za osnovno ploskev romb.
d) Kocka je enakoroba štiristrana prizma.
e) Stranski rob prizme je vedno daljši od osnovnega roba prizme.

- 6 Odgovori.

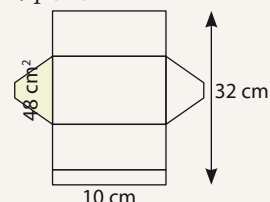
- a) Kaj je osnovna ploskev pravilne 3-strane prizme? Kaj pa pri pravilni 4-strani prizmi?
b) Kaj so stranske ploskve vseh prizem?
c) Kaj je višina prizme?
d) Kako izračunamo ploščino plašča prizme?
e) Kaj pomenita oznaki P in V in v katerih enotah ju izražamo?
f) Ali je stranski rob prizme enak višini prizme? Pojasni!
g) Ali je poljubni kvader pravilna 4-strana prizma? Pojasni!
h) Ali je kocka prizma? Pojasni!

- 7 Poimenuj prizme in s pomočjo podatkov na mreži izračunaj zahtevane količine.

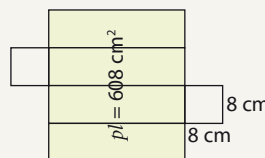
- a) p_l, P



- b) p_l, P, V



- c) O, P, V



- 8 Koliko meri plašč pravilne 3-strane prizme z osnovnim robom 6 cm in višino 10 cm?

- 9 a) Koliko meri plašč 20 cm visoke 3-strane prizme z robovi $a = 6$ cm, $b = 7$ cm in $c = 4$ cm.
b) Zakaj ne moremo izračunati P in V te prizme?

- 10 V pravilni 4-strani prizmi je dolžina osnovnega roba 4 cm, višina pa je 3-krat daljša.

- a) Koliko pločvine potrebujemo za njeno izdelavo?
b) Koliko litrov vode bi zadržala taka posoda?

- 11 Dolžina osnovnega roba prizme meri 2 cm, višina pa je 5 cm. Nariši njeno mrežo, če je prizma:

- a) pravilna 3-strana
b) pravilna 4-strana
c) pravilna 6-strana

- 12 Osnovni rob enakorobe 4-strane prizme meri 2 cm.

a) Nariši mrežo prizme.
b) Izračunaj njeno površino in prostornino.
c) Ali ima ta prizma še kakšno drugo ime?

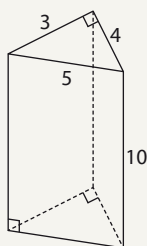
- 13 Osnovna ploskev prizme meri 25 cm^2 .

a) Koliko meri prostornina, če je visoka 12 cm?
b) Ali lahko izračunaš površino prizme?

- 14 Osnovna ploskev prizme meri 40 cm^2 , plašč pa je 3-krat večji. Koliko meri površina prizme?

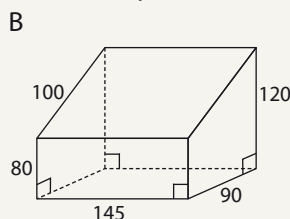
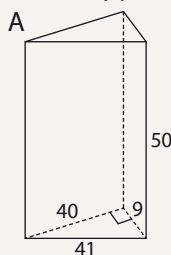
- 15 Izberi trditev, pri kateri se vse količine ujemajo z ustreznimi količinami prizme na sliki.

a) $O = 12$, $pl = 50$, $P = 120$
b) $O = 5$, $pl = 120$, $P = 100$
c) $O = 6$, $pl = 60$, $P = 132$
č) $O = 6$, $pl = 120$, $P = 132$



- 16 S pomočjo podatkov na sliki (mere so v cm):

a) skiciraj mreži obeh prizem in označi dolžine vseh robov
b) izračunaj površino in prostornino prizem

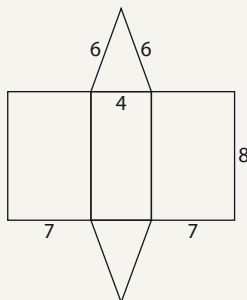


- 17 V pravilni 3-strani prizmi meri $O = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

a) Koliko meri površina, če znaša višina 18 cm?
b) Kolikšna je prostornina te prizme?

- 18 Površina pravilne 4-strane prizme z osnovnim robom 12 cm meri 1248 cm^2 . Izračunaj prostornino prizme.

- 19 Ali lahko iz narisane mreže sestaviš prizmo? Odgovor utemelji. Če ne, popravi podatke tako, da jo boš lahko sestavil.



- 20 Koliko cm^2 lepenke rabimo za izdelavo kockaste posode brez pokrova z dolžino 10 cm? Rezultat zapiši še v dm^2 .

- 21 Plašč pravilne 4-strane prizme meri 240 cm^2 , prizma pa je visoka 8 cm.

a) Kolikšna je prostornina te prizme?
b) Koliko meri površina?

- 22 Površina enakorobe štiristrane prizme meri 600 cm^2 . Kolikšna je njena prostornina?

- 23 8 m široko cestišče asfaltirajo. Debelina asfaltnega sloja je 2,5 cm.

a) Koliko m^3 asfalta bodo potrebovali za 10 km dolg odsek ceste?
b) Koliko hektarov zemljišča pokrije cesta?

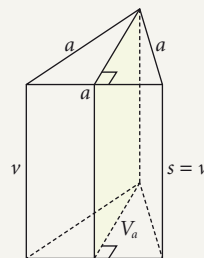
- 24 12 cm dolg in 5 cm visok pravokotnik predstavlja razgrnjen plašč pravilne 6-strane prizme. Izračunaj velikost osnovne ploskve te prizme in njeno prostornino.

- 25 Plašč 9 cm visoke pravilne 3-strane prizme meri 108 cm^2 . Izračunaj površino in prostornino te prizme.

- 26 V enakorobi 3-strani prizmi meri plašč 432 cm^2 . Izračunaj rob prizme ter njeno površino in prostornino.

- 27 V enakorobi 6-strani prizmi meri prostornina $6144\sqrt{3} \text{ cm}^3$. Kolikšna je njena površina?

- 28 Osnovna ploskev pravilne 3-strane prizme meri $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$, pravokotni presek prizme (slika), ki ga tvorita višina osnovne ploskve in stranski rob, pa meri 80 cm^2 . Izračunaj površino prizme.



- 29 Rob enakorobe prizme meri $2x \text{ cm}$. Izrazi površino in prostornino prizme, če veš, da je prizma:
a) 3-strana b) 4-strana c) 6-strana

- 30 Osnovna ploskev 4-strane prizme je romb z diagonalama 18 cm in 24 cm, višina prizme pa meri 12 cm. Izračunaj površino in prostornino prizme.

- 31 Osnovna ploskev prizme je enakokraki trapez s stranicami $a = 54 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $c = 30 \text{ cm}$ in $d = 15 \text{ cm}$. Višina prizme je enaka diagonali osnovne ploskve. Izračunaj površino in prostornino prizme.

- 32 Dani sta enakorobi 3-strana in 4-strana prizma. V kolikšnem razmerju sta prostornini?

- 33 Površina pravilne 4-strane prizme meri 312 dm^2 . Razmerje med površino osnovne ploskve in plaščem je $3 : 10$. Koliko meri prostornina prizme?

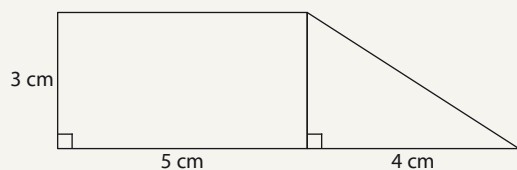
- 34 Pravilna 6-strana in pravilna 3-strana prizma imata enaki dolžini osnovnega roba in enako višino. Izberi pravilno razmerje prostornin obeh prizem.

a) $2 : 1$ b) $3 : 1$ c) $4 : 1$ č) $6 : 1$

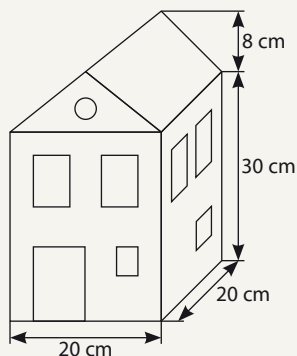
- 35 Robovi kvadra so v razmerju $2 : 4 : 5$. Prostornina kvadra je 1080 cm^3 . Koliko meri površina kvadra?

- 36 Na sliki je narisana tloris 2 m globokega bazena.

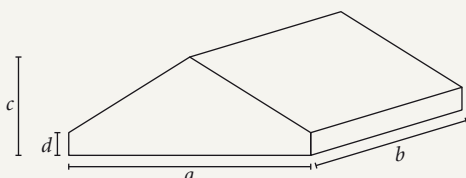
- a) Koliko litrov vode moramo natočiti v bazen, da bo višina vode v njem $1,5 \text{ m}$?
b) Koliko m^2 ploščic potrebujemo za obložitev sten?



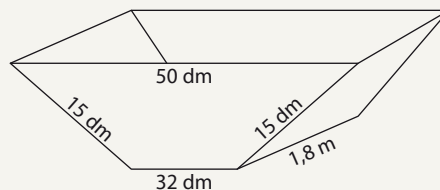
- 37 Kolikšna je prostornina lesene makete otroške hiške, ki je prikazana na sliki? Hiška je v celoti zapolnjena z lesom (okna in vrata so narisana).



- 38 Izračunaj površino šotorskega platna, ki ga potrebuješ za izdelavo šotora na sliki. $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 1,5 \text{ m}$ in $d = 4 \text{ dm}$.



- 39 Koliko m^3 prostornine ima zabojnik, ki je prikazan na sliki, če veš, da je širok $1,8 \text{ metra}$ in ima za osnovno ploskev enakokraki trapez z robovi: 50 dm , 15 dm , 32 dm in 15 dm .



- 40 Gostota zlata je $19,3 \text{ kg/dm}^3$. Izračunaj, koliko bi tehtala $0,5 \text{ m}$ dolga zlata palica, ki ima obliko 4-strane prizme, katere osnovna ploskev je enakokraki trapez s stranicami $a = 24 \text{ cm}$, $b = d = 10 \text{ cm}$ in $c = 12 \text{ cm}$.



- 41 Z uporabo ustreznega računalniškega programa opazuj različne modele n -stranih pokončnih prizem tako, da spreminjaš število oglišč osnovne ploskve od $n = 3$ do $n = 8$.



Pri vsaki prizmi spreminjaj tudi velikost osnovne ploskve in višino. Pri opazovanju si pomagaj z ustreznim ukazom, ki omogoča vrtenje prizem tako, da jih boš videl pod različnimi zornimi koti.

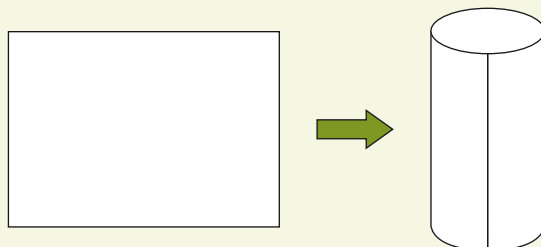
4 VALJ

Izvedel boš:

- kaj je valj in osnovne pojme o njem,
- kako izračunamo površino in prostornino valja.



Rok in Špela sta pri pouku tehnike izdelovala papirnato maketo Aljaževega stolpa. Špela se je odločila izdelati spodnji del, zato je pravokotni list lepenke zvila v tulec in zalepila nasprotna, krajša robova. Na ta način je dobila cev valjaste oblike.



RAZMISLI

Kaj ji še manjka, če bi želela cev zapreti in izdelati škatlico?

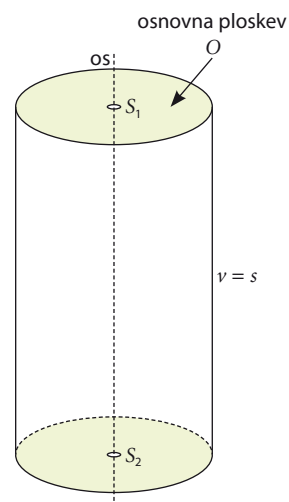
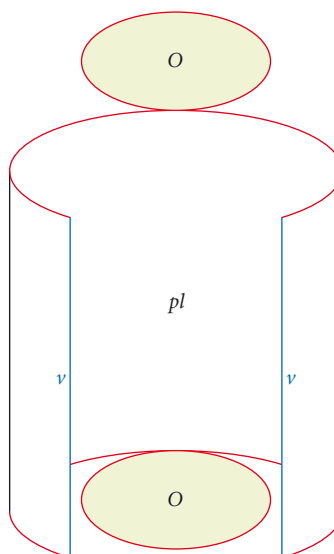
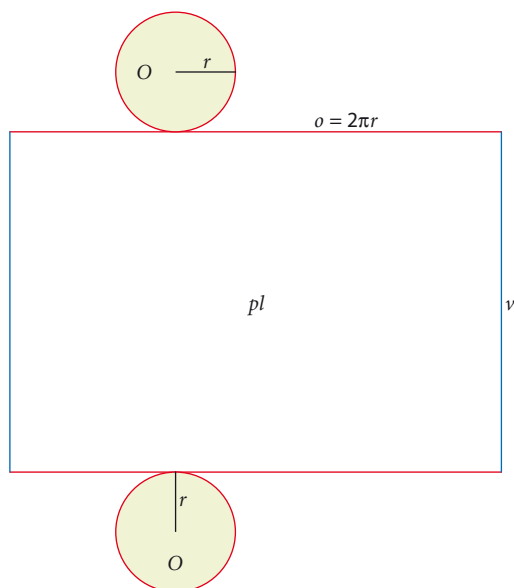


Odgovor na zastavljeni vprašanji boš poiskal sam.
DZ – naloga 4.3

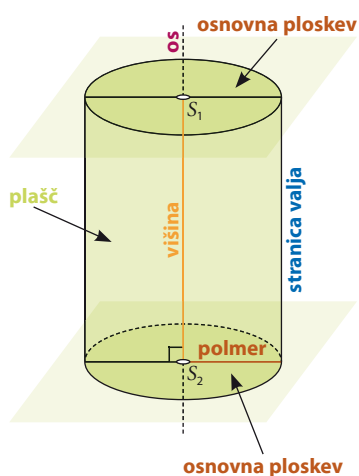


Špela mora izdelati oba pokrovčka, ki sta seveda kroga. Obseg kroga mora biti enak dolžini stranice pravokotnega lista papirja. Tako je dobila geometrijsko telo, ki ga imenujemo **valj**.

Valj je okroglo geometrijsko telo, ki ga omejujeta dva skladna in vzporedna kroga (osnovni ploskvi) ter ena kriva ploskev (plašč).



Osnovni pojmi v valju



OSNOVNI PLOSKVI (O) valja sta kroga, ki ležita na vzporednih ravninah.

POLMER OSNOVNE PLOSKVE (r) – polmer valja

SREDIŠČI OSNOVNIH PLOSKEV (S₁, S₂)

PLAŠČ (pl) valja je pravokotnik.

STRANICA VALJA (s) je najkrajša daljica na plašču, ki povezuje osnovni ploskvi.

OSNI PRESEK je presek valja z ravnino, ki gre skozi obe središči (pravokotnik).

OS je premica, ki poteka skozi središči osnovnih ploskev.

VIŠINA VALJA (v) je razdalja med vzporednima ravninama osnovnih ploskev

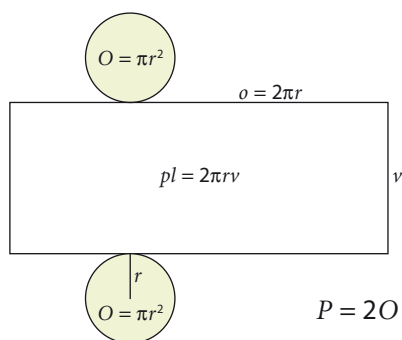
Izdelaj model valja (mrežo) in razišči kako bi, tako kot pri prizmah, zapisali obrazca za računanje površine in prostornine valja.



Odgovor na zastavljeni vprašanji boš poiskal sam.
DZ – naloga 4.4

Površina valja

je vsota ploščin vseh geometrijskih likov, ki sestavljajo mrežo valja: dva kroga (O) in pravokotnik, ki predstavlja plašč (pl).



$$P = 2O + pl$$

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

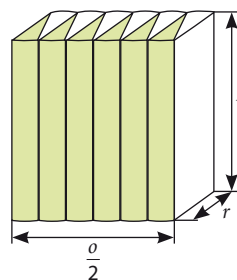
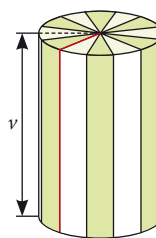
$$P = 2\pi r(r + v)$$

Prostornina valja

je produkt velikosti osnovne ploskve (O) in višine (v):

$$V = O \cdot v$$

$$V = \pi r^2 v$$



$$a = \frac{o}{2}$$

$$b = r$$

$$c = v$$

Do formule $V = \pi r^2 v$ pridemo tudi tako, da valj preoblikujemo v kvader, kot prikazuje slika:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = \frac{o}{2} \cdot r \cdot v = \frac{2\pi r}{2} \cdot r \cdot v$$

$$V = \pi r^2 v$$



POVRŠINA VALJA

$$P = 2O + pl$$

$$P = 2\pi r(r + v)$$



PROSTORNINA VALJA

$$V = O \cdot v$$

$$V = \pi r^2 v$$



REŠENI PRIMERI

- 1 a) Kolikšna je notranja površina steklene čaše v obliki valja, če je notranji premer osnovne ploskve 10 cm, njena višina pa je 18 cm?
b) Koliko litrov vode potrebujemo, da jo napolnimo do vrha?
Oba rezultata zaokrožimo na dve decimalni mesti.



Rešitev:

V primeru naloge a računamo površino valja brez ene osnovne ploskve (čaša nima pokrova), v primeru b pa nas zanima prostornina valja.

Podatki:

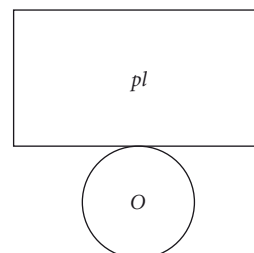
$$r = 5 \text{ cm}$$

$$v = 18 \text{ cm}$$

$$P =$$

$$V =$$

Skica:



$$a) P = O + pl$$

$$P = \pi r^2 + 2\pi r v$$

$$P = \pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 18$$

$$P = 25\pi + 180\pi$$

$$P = 205\pi \text{ cm}^2$$

$$P \doteq 643,7 \text{ cm}^2$$

$$P \doteq 6,44 \text{ dm}^2$$

$$b) V = Ov$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$V = \pi \cdot 25 \cdot 18$$

$$V = 450\pi \text{ cm}^3$$

$$V \doteq 1413 \text{ cm}^3$$

$$V \doteq 1,413 \text{ dm}^3$$

$$V \doteq 1,41 \text{ litra}$$



POMNI

Za število π , ki je iracionalno število, pogosto uporabimo približek 3,14.

Odgovor: Notranja površina steklene čaše je $6,44 \text{ dm}^2$, prostornina pa 1,41 litra.

- 2 Polmer osnovne ploskve valja meri 8 cm. Plašč valja je 4-krat večji od osnovne ploskve. Kolikšna je prostornina tega valja? Rezultat izrazi s številom π .

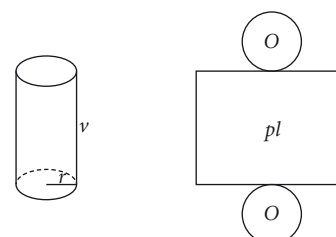
Rešitev: Podatki:

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$pl = 4O$$

$$V =$$

Skica:



Edini podatek s številčno vrednostjo je polmer osnovne ploskve, podana pa je tudi zveza med velikostjo plašča in velikostjo osnovne ploskve, iz katere izračunamo višino valja:

$$pl = 4O$$

$$2\pi r v = 4\pi r^2$$

$$v = 2r$$

$$v = 16 \text{ cm}$$

$$V = Ov$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$V = \pi \cdot 8^2 \cdot 16$$

$$V = 1024\pi \text{ cm}^3$$

Odgovor: Prostornina valja meri $1024\pi \text{ cm}^3$.



- 3 Osni presek enakostraničnega valja meri 144 cm^2 . Izračunaj prostornino in površino valja. Rezultat izrazi s številom π .

Rešitev: Podatki:

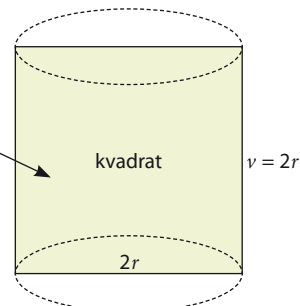
$$\begin{aligned} p_o &= 144 \text{ cm}^2 \\ P &= \\ V &= \end{aligned}$$

Ker je valj enakostraničen, je osni presek valja kvadrat: $v = 2r$.

$$\begin{aligned} p_o &= 2r \cdot v & 144 &= 4r^2 \\ p_o &= 2r \cdot 2r & r^2 &= 144 : 4 \\ p_o &= 4r^2 & r &= \sqrt{36} \\ & & r &= 6 \text{ cm} \\ & & V &= Ov \\ & & V &= \pi r^2 2r \\ & & V &= \pi \cdot 36 \cdot 12 \\ & & V &= 432\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Skica:

p_o – ploščina osnega preseka



$$\begin{aligned} P &= 2O + pl \\ P &= 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) \\ P &= 6\pi r^2 \\ P &= 6\pi \cdot 36 \\ P &= 216\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



POMNI

Valj je enakostraničen, če je njegov osni presek kvadrat:
 $2r = v$

Odgovor: Prostornina valja meri $432\pi \text{ cm}^3$.
Površina pa $216\pi \text{ cm}^2$.

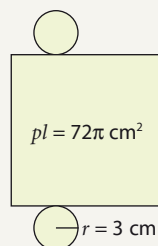


NALOGE ZA VAJO

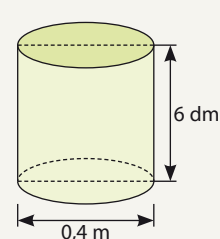
- Skiciraj in zapiši imena vsaj petih različnih predmetov iz vsakdanjega življenja, ki imajo obliko valja.
- Katere izjave so pravilne?
 - Mrežo pokončnega valja sestavljata dva kroga in pravokotnik.
 - Valj je prizma, saj ima dve skladni vzporedni osnovni ploskvi.
 - Višina pokončnega valja je enaka stranici valja.
 - Ena od stranic pravokotnika, ki je plašč valja, je enaka obsegu kroga, ki je osnovna ploskev.
 - Osni presek pokončnega valja je kvadrat.
 - Prostornina valja je produkt ploščine osnovne ploskve in višine valja.
- Največ koliko litrov vode lahko nalijemo v pokončen valjast bazen s premerom dna 3 m in višino 1,8 metra?

- 4 Izračunaj.

a) površino valja



b) prostornino valja



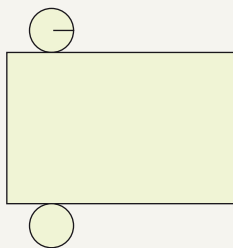
- Izračunaj površino in prostornino valja, če je polmer osnovne ploskve 6 cm in njegova višina 9 cm.
- Osnovna ploskev valja meri $36\pi \text{ cm}^2$. Plašč valja je 2-krat večji.
 - Izračunaj površino valja.
 - Izračunaj prostornino valja.
- Najmanj koliko pločevine bi potrebovali za izdelavo lonca z višino 4 dm in premerom 0,5 m?



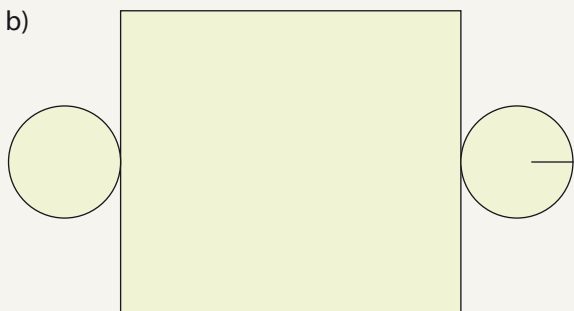
Z uporabo ustreznega računalniškega programa lahko preveriš izračunane rezultate. Program omogoča izris telesa in njegove mreže ter izračun površine in prostornine teles.

- 8 Koliko kubičnih metrov lesa je v 3 m dolgem deblu, če je njegov premer 1,8 m?
- 9 Nariši mrežo valja, če veš, da je polmer osnovne ploskve 2 cm in višina valja 5 cm.
- 10 Izračunaj površino valja, če meri njegova prostornina $2160\pi \text{ cm}^3$ in premer osnovne ploskve 24 cm.
- 11 Prostornina valja meri $4320\pi \text{ cm}^3$. Izračunaj njegovo površino, če je višina valja 3 dm.
- 12 Prepričaj se, ali je mreža valja pravilno izrezana. Opiši postopek reševanja.

a)



b)



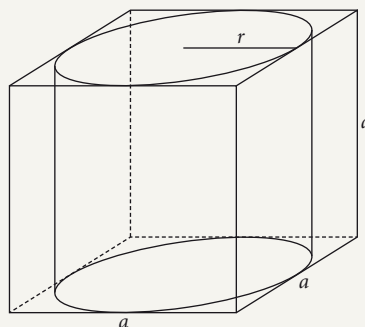
- 13 Cisterna za dovoz bencina ima obliko valja. Izračunaj premer cisterne, če je dolžina cisterne 3 metre in polna vsebuje 50000 litrov bencina.
- 14 V tabeli izračunaj manjkajoče količine za posamezne valje.

	osnovna ploskev	plašč	višina	površina	prostornina
valj A	$25\pi \text{ cm}^2$		8 cm		
valj B	$100\pi \text{ cm}^2$	$300\pi \text{ cm}^2$			
valj C		$192\pi \text{ cm}^2$	12 cm		
valj D	$256\pi \text{ cm}^2$			$1056\pi \text{ cm}^2$	

- 15 Koliko tehta jekleni »valj« delovnega stroja (valjar), če je širok 2 m, njegov premer pa je 1 m? Podatek o gostoti jekla boš poiskal v ustrezni literaturi.

ZMOREM TUDI TO

- 16 Iz kosa lesa, ki ima obliko pravilne 4-strane prizme z osnovnim robom 20 cm in višino 0,5 metra, izstružimo največji možni valj. Koliko odstotkov lesa odpade?
- 17 Osni presek enakostraničnega valja meri 900 cm^2 . Izračunaj površino in prostornino tega valja.
- 18 Iz kocke izrežemo največji možni valj. Površino in prostornino valja izrazi s stranico kocke.



- 19 Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči, kako se spremeni prostornina poljubnega valja:

- a) če višino valja povečaš za n -krat. Ugotovitev utemelji.
- b) če polmer osnovne ploskve povečaš za n -krat. Ugotovitev utemelji.

- 20 Koliko različnih plaščev valja lahko oblikuješ iz lista papirja A4 (210 mm x 297 mm)? Za vsak primer nariši sliko in označi polmer ter višino. Primerjaj prostornine. Pomagaj si z ustreznim računalniškim programom.



5 PIRAMIDA

Izvedel boš:

- kaj je piramida in katere vrste piramid poznamo,
- kako izračunamo površino in prostornino piramide.

Rok je Špeli kupil dišečo svečo v obliki piramide. Odločil se je, da jo sam zavije v darilni papir, a pri tem naletel na težave.

RAZMISLI

Kakšno obliko mora imeti ovojni papir za takšno svečo?

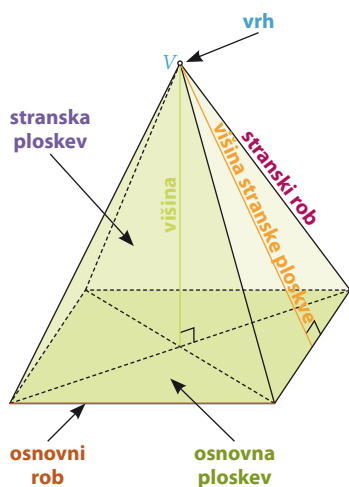


Piramida je oglato geometrijsko telo, ki ima **eno osnovno ploskev** (poljubni n -kotnik), plašč pa sestavlja **n skladnih enakokrakih trikotnikov**. **Pravilna** piramida ima za osnovo ploskev pravilni n -kotnik.

3-STRANA	PRAVILNA PIRAMIDA		
Osnovna ploskev je poljubni trikotnik.		Osnovna ploskev je enakostranični trikotnik.	mreža pravilne 3-strane piramide
* Poseben primer pravilne tristrane piramide je ENAKOROBNA TRISTRANA PIRAMIDA – TETRAEDER ali ČETVEREC ($a = s$).			
4-STRANA			
Osnovna ploskev je poljuben štirikotnik.		Osnovna ploskev je kvadrat.	mreža pravilne 4-strane piramide
6-STRANA			
Osnovna ploskev je poljuben šestkotnik.		Osnovna ploskev je pravilni šestkotnik.	mreža pravilne 6-strane piramide

V osnovni šoli bomo obravnavali le pokončne piramide.

Osnovni pojmi v piramidi



OSNOVNA PLOSKEV je n -kotnik.

OSNOVNI ROB (a) je stranica n -kotnika, ki je osnovna ploskev.

VRH (V) je skupna točka vseh stranskih robov.

VIŠINA (v) je pravokotna razdalja med vrhom in ravnino osnovne ploskve.

STRANSKE PLOSKEVE so trikotniki.

STRANSKI ROB (s) je daljica, ki povezuje oglišče osnovne ploskve z vrhom piramide.

VIŠINA STRANSKE PLOSKEVE (v_1) je višina stranske ploskve.



Površino pravilne 4-strane piramide boš ugotovil sam.
Če želiš, lahko izpelješ še obrazce za pravilno 3- in 6-strano piramido.
DZ – naloga 4.5 – 4.7

Pomagaj si tako, da izdeláš model (mrežo) ustrezne piramide.

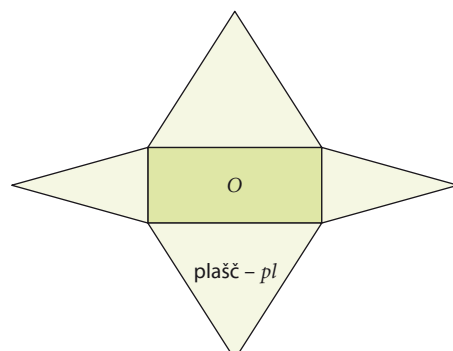
Površina piramide

Površina piramide je vsota ploščin geometrijskih likov, ki tvorijo njeno mrežo: ploščine osnovne ploskve (O), ki je lahko poljuben n -kotnik, in ploščin enakokrakih trikotnikov, ki tvorijo **plašč piramide** (pl).



POVRŠINA PIRAMIDE

$$P = O + pl$$



Prostornina piramide

Izhajamo iz prostornine prizme, ki jo že znamo izračunati. Primerjajmo prostornino prizme z osnovno ploskvijo O in višino v s prostornino piramide, ki ima enako osnovno ploskev O in višino v kot prizma.

Razišči, kolikokrat je prostornina prizme večja od prostornine piramide.

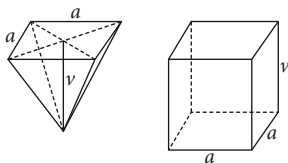
Do odgovora lahko pridemo tudi z meritvijo z ustreznimi merilnimi posodami. Potrebujemo posodo v obliki prizme in posodo v obliki piramide: imeti morata enako osnovno ploskev (enako dno) in enako višino.



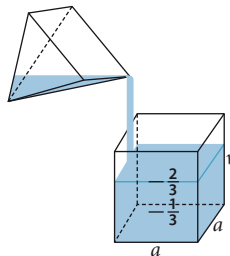
S pomočjo merilnih posod preveri, v kakšnem razmerju sta prostornini.

DZ – naloga 4.8

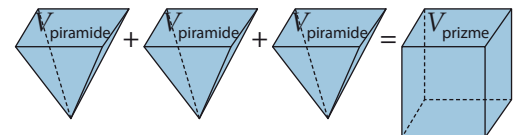
- 1 Vzemimo pokončno prizmo in pokončno piramido, ki se ujemata v **osnovni ploskvi** (O) in **višini** (v).



- 2 Prelivajmo vodo iz piramide v prizmo.



- 3 Ugotovimo, da je prostornina prizme enaka **trem** prostorninam piramide.



$$V_{\text{prizme}} = 3 \cdot V_{\text{piramide}}$$

$$V_{\text{piramide}} = \frac{V_{\text{prizme}}}{3}$$



PROSTORNINA PIRAMIDE

$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$

1. piramida



2. piramida



3. piramida



Prostornina piramide je enaka tretjini prostornine prizme, ki ima enako veliko osnovno ploskev in enako višino kot piramida.

Enakorobe piramide

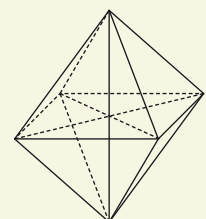
Enakorobe piramide imajo vse robove (osnovne in stranske) enako dolge.

Enakoroba 3-strana piramida	Enakoroba 4-strana piramida
tetraeder ali pravilni četverec	



POMNI

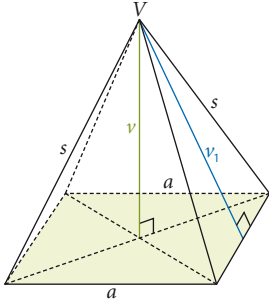
Pravilni osmerek ali **oktaeder** dobimo, če zlepimo dve enaki enakorobi 4-strani piramidi, tako da se osnovni ploskvi stikata.



Pravilna štiristrana piramida

Pravilna 4-strana piramida ima za osnovno ploskev **kvadrat**, plašč pa sestavljajo **štirje enakokraki trikotniki**.

- ploščina osnovne ploskve: $O = a^2$
- ploščina enakokrakega trikotnika v plašču: $p = \frac{av_1}{2}$



POVRŠINA IN PROSTORNINA PRAVILNE ŠTIRISTRANE PIRAMIDE

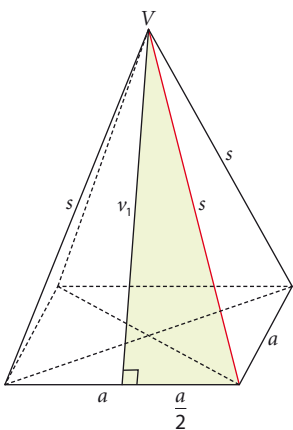
$$P = O + pl \qquad V = \frac{O \cdot v}{3}$$

$$P = a^2 + 4 \frac{av_1}{2} \qquad V = \frac{a^2 \cdot v}{3}$$

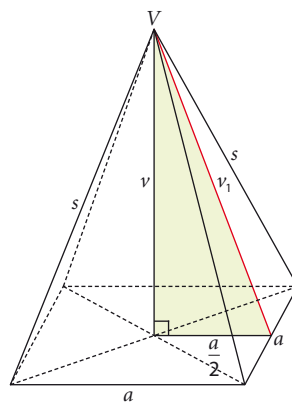
Pravilna 3-strana piramida $n = 3$	Pravilna 4-strana piramida $n = 4$	Pravilna 6-strana piramida $n = 6$
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av_1}{2}$	$P = a^2 + \frac{4av_1}{2}$	$P = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6av_1}{2}$
$V = \frac{a^2\sqrt{3}v}{12}$	$V = \frac{a^2v}{3}$	$V = \frac{a^2\sqrt{3}v}{2}$

Uporaba Pitagorovega izreka v pravilni 4-strani piramidi

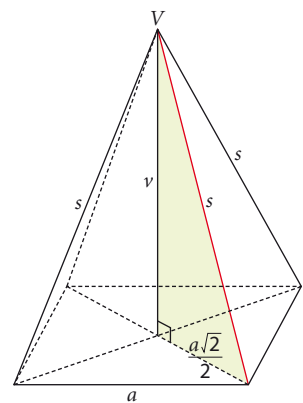
V pravilni 4-strani piramidi pri reševanju nalog pogosto potrebujemo razdalje, ki jih najdemo v različnih pravokotnih trikotnikih v piramidi, bodisi v notranjosti piramide, bodisi v plašču. Seveda pri tem uporabimo Pitagorov izrek, odvisno od stranice, ki jo računamo. Pomembno je, da si pravokotni trikotnik nazorno predstavljamo in ga v modelu pravilno označimo.



$$s^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



$$s^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$



REŠENI PRIMERI

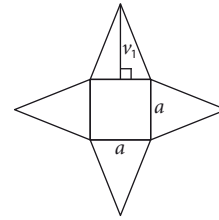
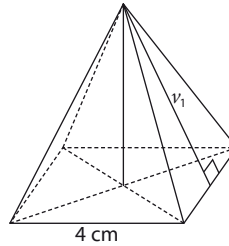
- 1 Osnovni rob pravilne 4-strane piramide meri 4 cm, višina stranske ploskve pa 5 cm. Koliko meri površina piramide?

Rešitev:

$$a = 4 \text{ cm}$$

$$v_1 = 5 \text{ cm}$$

$$P =$$



Osnovna ploskev piramide je kvadrat, kar pomeni, da je velikost osnovne ploskve:

$$O = a^2$$

$$O = 4^2$$

$$O = 16 \text{ cm}^2$$

Plašč piramide je sestavljen iz štirih enakokrakih trikotnikov:

$$pl = 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}$$

$$pl = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$pl = 40 \text{ cm}^2$$

Iz znane osnovne ploskve in plašča izračunamo površino:

$$P = O + pl$$

$$P = 16 + 40$$

$$P = 56 \text{ cm}^2$$



Odgovor: Površina piramide je 56 cm^2 .

- 2 Dana je mreža pravilne 4-strane piramide. Mere so označene na sliki in so podane v cm.

a) Izračunaj površino piramide.

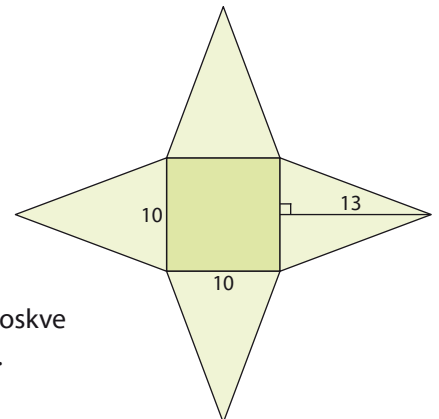
b) Izračunaj prostornino piramide.

Rešitev: Podatki: $a = 10 \text{ cm}$

$$v_1 = 13 \text{ cm}$$

$$P =$$

$$V =$$



a) Iz skice preberemo, da meri osnovni rob piramide 10 cm, višina stranske ploskve pa 13 cm. Izračunamo lahko osnovno ploskev in plašč ter nato še površino.

$$O = a^2$$

$$pl = \frac{4av_1}{2}$$

$$P = O + pl$$

$$O = 10^2$$

$$pl = \frac{4 \cdot 10 \cdot 13}{2}$$

$$P = 100 + 260$$

$$O = 100 \text{ cm}^2$$

$$pl = 260 \text{ cm}^2$$

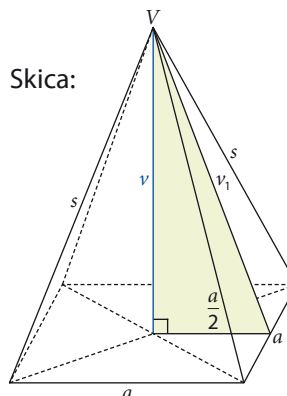
$$P = 360 \text{ cm}^2$$

- b) Za izračun prostornine potrebujemo višino piramide, ki jo izračunamo s Pitagorovim izrekom.
Za boljšo predstavbo si narišemo ustrezno skico:

$$\begin{aligned}v^2 &= v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\v^2 &= 13^2 - 5^2 \\v^2 &= 169 - 25 \\v^2 &= 144 \\v &= \sqrt{144} \\v &= 12 \text{ cm}\end{aligned}$$

Prostornina piramide je:

$$\begin{aligned}V &= \frac{O \cdot v}{3} \\V &= \frac{100 \cdot 12}{3} \\V &= 400 \text{ cm}^3\end{aligned}$$



Odgovor: Površina piramide je 360 cm^2 , prostornina pa 400 cm^3 .

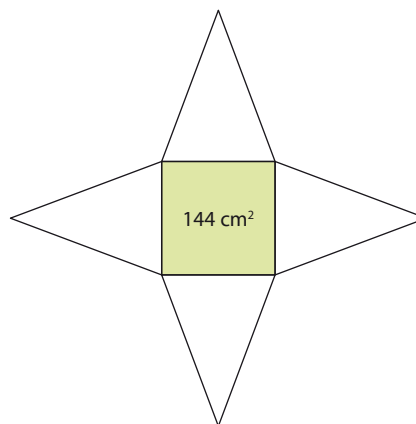
- ③ Površina pravilne 4-strane piramide meri 384 cm^2 , osnovna ploskev pa 144 cm^2 .
Koliko litrov meri prostornina te piramide?

Rešitev: Podatki:

$$\begin{aligned}P &= 384 \text{ cm}^2 \\O &= 144 \text{ cm}^2 \\V &= \end{aligned}$$

Ker poznamo ploščino osnovne ploskve, lahko iz površine piramide ($P = O + pl$) izračunamo plašč piramide:

$$\begin{aligned}P &= O + pl \\O + pl &= P \\pl &= P - O \\pl &= 384 - 144 \\pl &= 240 \text{ cm}^2\end{aligned}$$



Iz obrazca za plašč piramide: $pl = \frac{4av_1}{2}$ izrazimo in nato izračunamo stransko višino, seveda pa moramo iz znane osnovne ploskve še prej izračunati osnovni rob:

$$\begin{aligned}O &= a^2 & pl &= \frac{4av_1}{2} \\a^2 &= O & \frac{4av_1}{2} &= pl \\a^2 &= 144 & 4av_1 &= 2pl \\a &= \sqrt{144} & v_1 &= \frac{2pl}{4a} \\a &= 12 \text{ cm} & v_1 &= \frac{2 \cdot 240}{4 \cdot 12} \\ & & v_1 &= 10 \text{ cm}\end{aligned}$$

Za izračun prostornine potrebujemo še višino piramide, ki jo izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka (narišemo skico):

$$v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = 10^2 - 6^2$$

$$v^2 = 100 - 36$$

$$v^2 = 64$$

$$v = \sqrt{64}$$

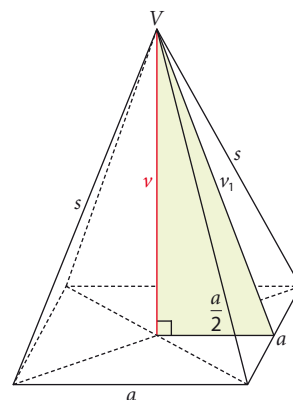
$$v = 8 \text{ cm}$$

$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$

$$V = \frac{144 \cdot 8}{3}$$

$$V = 384 \text{ cm}^3$$

$$V = 0,384 \text{ litra}$$



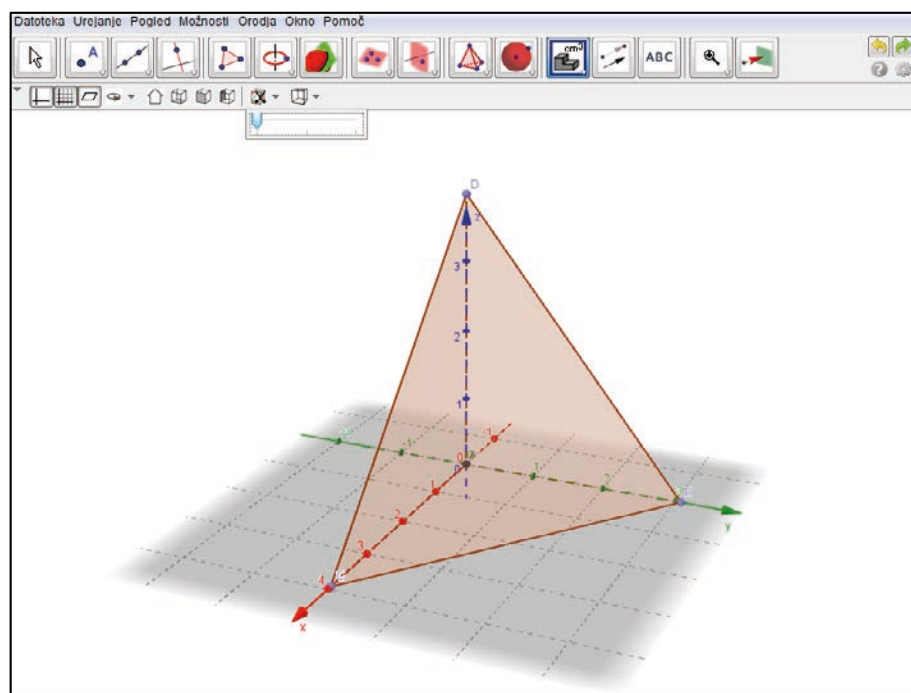
Odgovor: Prostornina piramide meri 0,384 l.

- 4 S pomočjo programa »GeoGebra« nariši tristrano piramido, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik s katetama 3 cm in 4 cm, višina piramide pa poteka iz oglišča osnovne ploskve s pravim kotom in meri 4 cm. Narisano piramido si ogled iz vseh strani tako, da uporabiš orodja za vrtenje oziroma obračanje piramide. Z izbiro ustrezne ikone oziroma ukaza izračunaj prostornino piramide.

Rešitev:

V podmeniju »ORODJA« izberemo »POGLED 3D«, ki nam prikaže pravokotni koordinatni sistem v prostoru. S klikom na ikono za risanje večkotnikov »MNOGOKOTNIK«, v ravnini, ki jo določata osi x in y narišemo pravokotni trikotnik s katetama 3 cm in 4 cm, s pravim kotom v koordinatnem izhodišču. Nato kliknemo na ikono »PIRAMIDA«, na osi z narišemo višino 4 cm in program izriše tristrano piramido z označenimi oglišči. S pomočjo ikone »ZAVRTI 3D POGLED« si lahko ogledamo piramido iz vseh strani, saj jo lahko poljubno obračamo oziroma vrtimo.

Prostornino piramide izračunamo s pomočjo ikone »VOLUME« in s klikom na piramido program izračuna prostornino, ki meri 8 cm³.

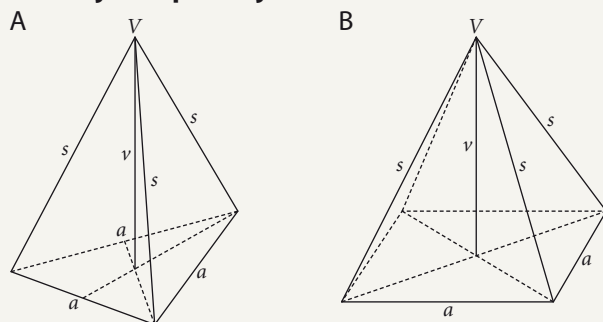


Nalogo lahko rešimo tudi z uporabo drugih primernih računalniških programov.



Z uporabo ustreznega računalniškega programa lahko preveriš izračunane rezultate. Program omogoča izris telesa in njegove mreže ter izračun površine in prostornine teles.

1 Zapiši ime narisane piramide in odgovori na zastavljena vprašanja.



- Koliko robov ima piramida?
- Koliko je vseh mejnih ploskev?
- Kateri lik je osnovna ploskev piramide?
- Koliko in kateri liki sestavljajo plašč piramide?

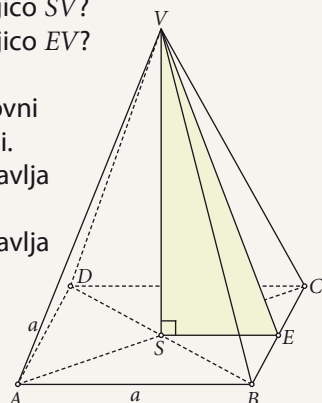
2 Odgovori na vprašanja.

- Koliko osnovnih ploskev ima piramida in koliko prizma?
- Kdaj je piramida pravilna?
- Kaj je plašč piramide?
- Kaj je višina piramide?
- Ali so v piramidi stranski robovi vedno skladni? Pojasni.
- Ali je stranska višina v piramidi vedno daljša od višine? Pojasni.
- Kaj je četverec?
- Ali obstaja enakoroba 6-strana piramida? Pojasni.

3 Ploščina osnovne ploskve neke piramide meri 20 cm^2 , njen plašč pa je 3-krat večji. Koliko meri površina te piramide?

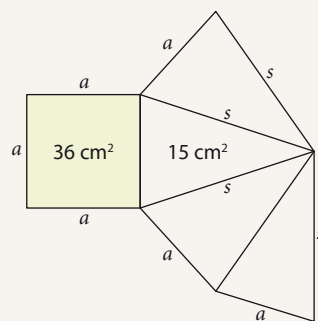
4 S pomočjo naranenega modela odgovori na vprašanja.

- Ali je prikazana piramida pravilna? Pojasni.
- Kako imenujemo daljico SV ?
- Kako imenujemo daljico EV ?
- Kaj je daljica AC ?
- Ali je daljica CV osnovni rob piramide? Pojasni.
- Kaj v piramidi predstavlja štirikotnik $ABCD$?
- Kaj v piramidi predstavlja trikotnik BCV ?
- Iz naranenega pravokotnega trikotnika izrazi $|SV|$.

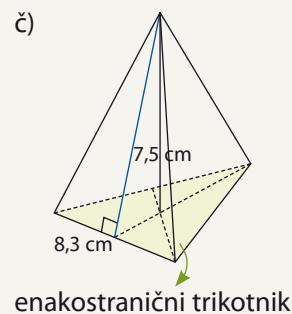
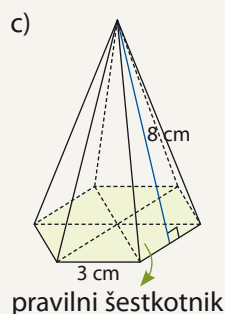
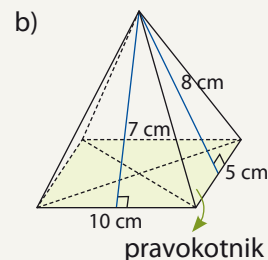
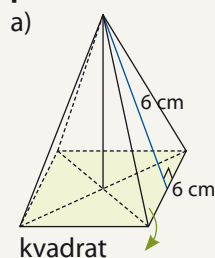


- 5** a) Kako imenujemo piramido z mrežo prikazano na sliki? Iz katerih likov je sestavljena?

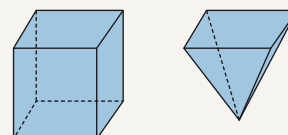
- Koliko meri površina?
- Kolikšen je osnovni rob?
- Kolikšna je prostornina?



6 Poimenuj piramide na sliki in za vsako izračunaj površino.



7 Kaj lahko poveš o skupnih merah posod na sliki, če prizma drži 12 litrov vode in piramida 4 litre?



8 V pravilni 4-strani piramidi meri osnovni rob 18 cm , stranska višina pa 15 cm .

- Izračunaj površino piramide.
- Izračunaj višino piramide.
- Izračunaj prostornino piramide.
- Izračunaj stranski rob piramide.

9 V tabeli izračunaj manjkajoče količine za posamezne piramide.

	osnovna ploskev	plašč	višina	površina	prostornina
piramida A	60 cm ²	120 cm ²	8 cm		
piramida B	256 cm ²	320 cm ²			512 cm ³
piramida C	484 cm ²		16 cm	3124 cm ²	

10 Plašč pravilne 4-strane piramide meri 120 cm², stranska višina pa 10 cm.

- Koliko meri prostornina piramide?
- Izračunaj, najmanj koliko žice bi potreboval za izdelavo žičnega modela te piramide.

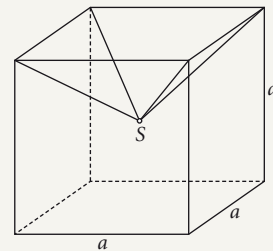
11 Šotor ima obliko pravilne 6-strane piramide. Najmanj koliko platna bi potrebovali za izdelavo sten tega šotor, če je obseg osnovne ploskve šotor 18 m, višina šotor pa je 4 m?



ZMOREM TUDI TO

12 Pravilna 3-strana piramida ima prostornino $18\sqrt{3}$ cm³. Višina piramide je enaka dolžini osnovnega roba. Izračunaj površino piramide.

13 Iz kocke izdolbejo piramido, kot kaže slika. Piramida ima svoj vrh v presečišču telesnih diagonal kocke (S). Izrazi z osnovnim robom a površino in prostornino tako nastalega telesa.



14 Površina četrca je $64\sqrt{3}$ cm². Koliko znaša njegova višina?

15 Z uporabo ustreznega računalniškega programa opazuj različne modele n -stranih pokončnih piramid tako, da spreminjaš število oglišč osnovne ploskve od $n = 3$ do $n = 8$. Pri vsaki piramidi spreminjaj tudi velikost osnovne ploskve in višino. Pri opazovanju si pomagaj z ustreznim ukazom, ki omogoča vrtenje piramid tako, da jih boš videl pod različnimi zornimi koti.



6 STOŽEC

Izvedel boš:

- kaj je stožec in kateri so osnovni pojmi v stožcu,
- kaj je osni presek stožca,
- kaj je enakostranični stožec,
- kako izračunamo površino in prostornino stožca.



Rok in Špela sta nadaljevala izdelavo makete Aljaževega stolpa. Špela je že izdelala valj, Rok pa se je znašel pred zahtevno nalogo, kako izdelati »koničasto« streho stolpa. Izrezal je krog, na katerem bo stala streha, in ta je enako velik kot krog pri valju, toda zdaj je moral izdelati še plašč strehe. Spomnil se je, da so pri tehniki za takšno obliko, kot jo ima streha stolpa, uporabljali izraz stožčasta oblika.

RAZMISLI

Kakšno obliko ima razgrnjeni plašč »koničaste« strehe stolpa? Kako naj ugotovi pravilne mere, da bosta lahko sestavila model?



Odgovor na zastavljeni vprašanji boš poiskal sam.
DZ – naloga 4.9

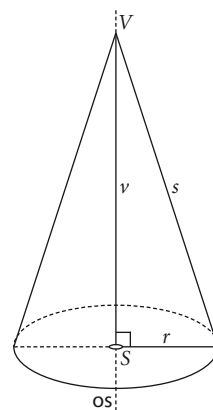
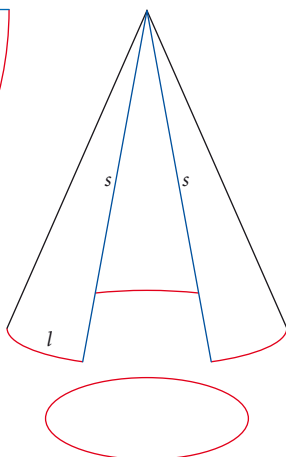
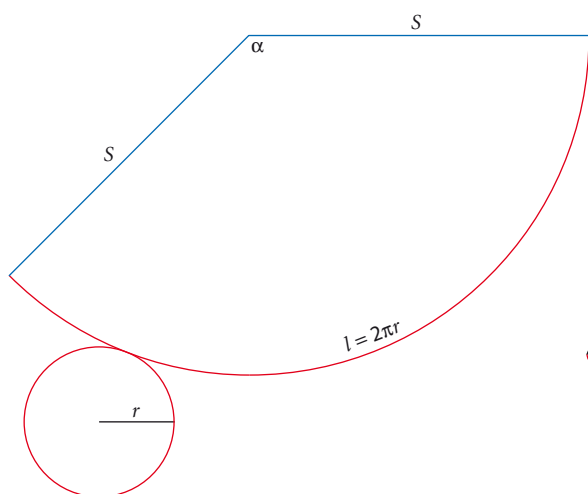
Stožec je geometrijsko telo, ki je omejeno s krogom (osnovna ploskev) in krivo ploskvijo, ki je krožni izsek (plašč).

Razgrnjeni plašč ima obliko krožnega izseka. Dolžina krožnega loka v izseku mora biti enaka obsegu kroga, ki predstavlja osnovno ploskev:

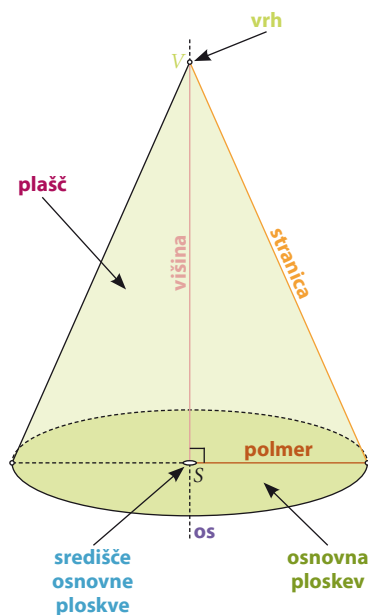
$$\text{lok izseka} = \frac{\pi s \alpha}{180^\circ} = \text{obseg osnovne ploskve}$$

Lok krožnega izseka zvijemo tako, da se krajišči stakneta.

Za izdelavo plašča stožca (streha Aljaževega stolpa) potrebujemo dva podatka: polmer (ali premer) osnovne ploskve in višino (ali stranski rob).



Osnovni pojmi v stožcu



OSNOVNA PLOSKEV (O) stožca je krog.

POLMER STOŽCA (r) je polmer osnovne ploskve.

SREDIŠČE OSNOVNE PLOSKEVE (S)

VRH (V) leži natanko nad središčem osnovne ploskve.

OS je premica, ki poteka skozi vrh stožca (V) in središče osnovne ploskve (S).

PLAŠČ (pl) stožca je krožni izsek.

STRANICA STOŽCA (s) je daljica na plašču, ki povezuje vrh stožca s poljubno točko na krožnici.

VIŠINA (v) je razdalja med vrhom (V) in osnovno ploskvijo.

OSNI PRESEK STOŽCA je enakokraki ali enakostraničen trikotnik.

Razišči, kako bi zapisali obrazca za računanje površine in prostornine stožca.



Odgovor na zastavljeni vprašanji boš poiskal sam.
DZ – naloga 4.10

Pomagaj si tako, da izdelash model (mrežo) stožca.



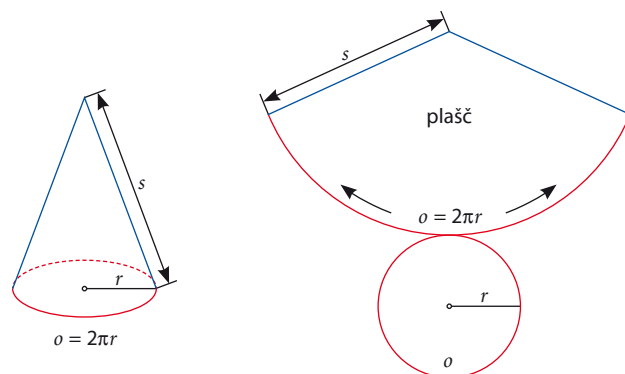
Površina stožca

Površino stožca izračunamo kot vsoto ploščine osnovne ploskve in ploščine plašča.

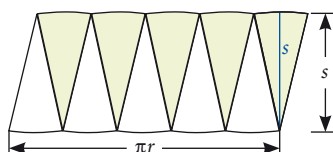
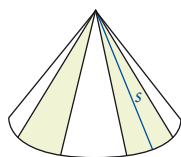
$$P = O + pl$$

Površina stožca je vsota ploščine kroga (osnovna ploskev) in ploščine krožnega izseka (plašč).

$$P = \pi r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$



Krožni izsek, ki tvori plašč stožca, razdelimo na manjše skladne izseke in jih sestavimo v »paralelogram« z dolžino πr ($\frac{1}{2}$ obsega kroga) in višino s:



$$\begin{aligned} pl_{\text{izseka}} &= \pi r \cdot s \\ P &= \pi r^2 + \pi r s \\ P &= \pi r(r + s) \end{aligned}$$



POVRŠINA STOŽCA

$$\begin{aligned} P &= O + pl \\ P &= \pi r^2 + \pi r s \end{aligned}$$

Prostornina stožca

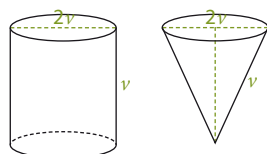
Prostornino stožca lahko določimo s primerjavo s prostornino valja, podobno kot smo to naredili za piramido s pomočjo prizme.



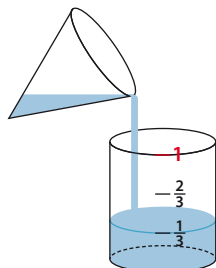
Po navodilu izvedi eksperiment.
DZ – naloga 4.11

Eksperiment za merjenje prostornine stožca s pomočjo prostornine valja:

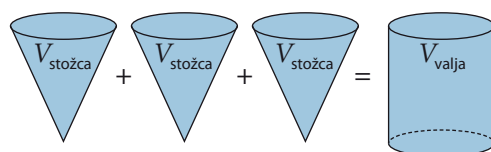
- 1 Vzemimo pokončen valj in pokončen stožec, ki se ujemata v **osnovni ploskvi (O)** in **višini (v)**.



- 2 Prelivajmo vodo iz stožca v valj.



- 3 Ugotovimo, da je prostornina valja enaka **trem** prostorninam stožca.



$$V_{\text{valja}} = 3 \cdot V_{\text{stožca}}$$

$$V_{\text{stožca}} = \frac{1}{3} V_{\text{valja}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$



PROSTORNINA STOŽCA

$$V = \frac{O \cdot v}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 v}{3}$$

1. stožec



2. stožec



3. stožec



Prostornina stožca je enaka tretjini prostornine valja, ki ima enako veliko osnovno ploskev in enako višino kot stožec.



REŠENI PRIMERI

- 1 Premer stožca meri 10 cm, višina pa 12 cm. Izračunaj prostornino in površino stožca.

Rešitev:

- a) Izpišemo podatke in narišemo model stožca. Iz podatkov razberemo, da je polmer stožca 5 cm.

$$v = 12 \text{ cm}$$

$$2r = 10 \text{ cm}$$

$$V =$$

$$P =$$

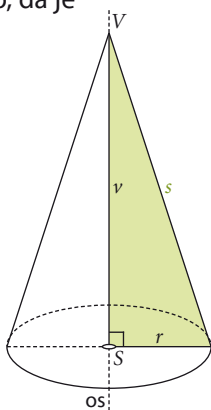
Prostornina stožca:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3}$$

$$V = 100\pi \text{ cm}^3$$



- b) V obrazcu za izračun površine $P = \pi r^2 + \pi rs$ potrebujemo tudi stranski rob stožca, ki ga izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka:

$$s^2 = v^2 + r^2$$

$$s^2 = 12^2 + 5^2$$

$$s^2 = 144 + 25$$

$$s^2 = 169$$

$$s = \sqrt{169}$$

$$s = 13 \text{ cm}$$

Izračunamo še površino stožca:

$$P = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 13$$

$$P = 25\pi + 65\pi$$

$$P = 90\pi \text{ cm}^2$$



Odgovor: Prostornina stožca je $100\pi \text{ cm}^3$, površina pa $90\pi \text{ cm}^2$.

- ② Kozarec s prostornino 3 dl ima obliko stožca z notranjim premerom 8 cm. Kolikšna je višina stožčastega dela kozarca?

Rešitev:

Prostornino stožca izrazimo v cm^3 : $3 \text{ dl} = 0,3 \text{ l} = 300 \text{ cm}^3$.

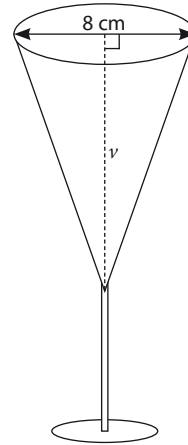
$$V = 300 \text{ cm}^3$$

$$2r = 8 \text{ cm}$$

$$v =$$

Višino stožca lahko izračunamo iz obrazca za prostornino, od koder jo izrazimo s preoblikovanjem:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^2 \cdot v}{3} & v &= \frac{3 \cdot 300}{3,14 \cdot 4^2} \\ \frac{\pi r^2 \cdot v}{3} &= V & v &= \frac{900}{3,14 \cdot 16} \\ \pi r^2 v &= 3V & v &= 17,91 \text{ cm} \\ v &= \frac{3V}{\pi r^2} & v &\doteq 18 \text{ cm} \end{aligned}$$



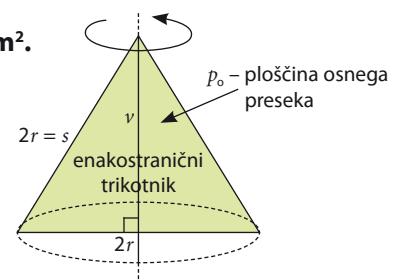
Odgovor: Višina stožčastega dela kozarca je približno 18 cm.

- ③ V enakostraničnem stožcu je velikost osnega preseka stožca $1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Izračunaj prostornino tega stožca.

Rešitev: Izpišemo podatke in narišemo model stožca.

$$p_o = 1600\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$V =$$



Za izračun prostornine potrebujemo polmer in višino, ki ju bomo izračunali s pomočjo dane ploščine osnega preseka. V modelu stožca označimo osni presek, ki je v tem primeru enakostranični trikotnik ($2r = s$).

$$p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{obrazec za ploščino enakostraničnega trikotnika}$$

Ker je stranica enakostraničnega trikotnika v stožcu $a = 2r$, sledi:

$$p = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$p = r^2\sqrt{3}$$

Iz obrazca izrazimo polmer stožca in ga izračunamo:

$$r^2\sqrt{3} = p_o$$

$$r^2 = \frac{p_o}{\sqrt{3}}$$

$$r^2 = \frac{1600\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$r^2 = 1600$$

$$r = \sqrt{1600}$$

$$r = 40 \text{ cm}$$



Ker je stožec enakostranični, je dolžina stranskega roba ($2r = s$) 80 cm.

Z uporabo Pitagorovega izreka lahko izračunamo še višino stožca:

$$v^2 = s^2 - r^2$$

$$v^2 = 80^2 - 40^2$$

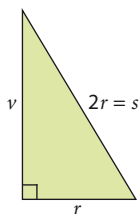
$$v^2 = 6400 - 1600$$

$$v^2 = 4800$$

$$v = \sqrt{4800}$$

$$v = \sqrt{1600 \cdot 3}$$

$$v = 40\sqrt{3} \text{ cm}$$



Na koncu izračunamo še prostornino stožca.

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 40\sqrt{3}}{3}$$

$$V = \frac{64000\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3.$$



Odgovor: Prostornina stožca meri $\frac{64000\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$.



NALOGE ZA VAJO



Z uporabo ustreznega računalniškega programa lahko preveriš izračunane rezultate. Program omogoča izris telesa in njegove mreže ter izračun površine in prostornine teles.

1 Katere izjave so pravilne?

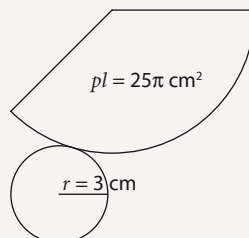
- Stranica stožca je razdalja med vrhom in točko na krožnici, ki obdaja osnovno ploskev.
- Plašč stožca je krožni izsek.
- Razdalja med vrhom in ravnino osnovne ploskve je stranica stožca.
- Enakostranični stožec ima polmer enak stranici stožca.
- V pokončnem stožcu je osni presek stožca enakostranični trikotnik.
- V stožcu je višina vedno krajša od stranice.

2 V tabeli izračunaj manjkajoče količine za posamezne stožce.

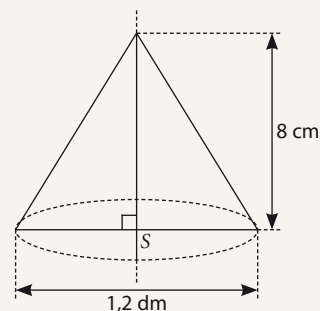
	osnovna ploskev	plašč	višina	površina	prostornina
stožec A	60 cm ²	240 cm ²	17 cm		
stožec B		145π cm ²	12 cm	226π cm ²	
stožec C	49π cm ²			224π cm ²	192π cm ³
stožec D	254 cm ²	1159π cm ²			3387 cm ³

3 Izračunaj:

a) površino stožca



b) prostornino stožca

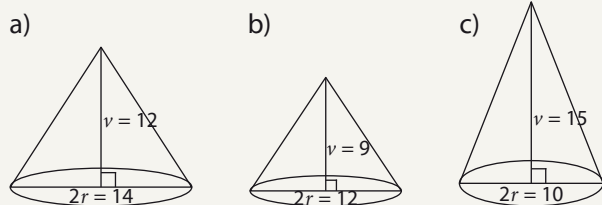


4 Izdelati želimo stožčasto papirnato kapo s polmerom 14 cm in stranico 40 cm. Koliko cm² (dm²) papirja potrebujemo za izdelavo takšne kape? (Za π vzemi približek $\frac{22}{7}$.)

- 5 Koliko papirja bi potreboval za izdelavo posameznega stožca?

a) $s = 5$ cm, $r = 3$ cm b) $s = 6,5$ cm, $r = 5$ cm
c) $s = 8$ cm, $2r = 5$ cm č) $s = 5,5$ cm, $2r = 6$ cm

- 6 Izračunaj, kateri stožec ima največjo prostornino. Vse mere so v dm.



- 7 Dan je pokončen stožec s polmerom osnovne ploskve 7 cm in stranico 24 cm.

a) Koliko meri površina tega stožca?
b) Koliko meri prostornina stožca?

- 8 Premer osnovne ploskve pokončnega stožca meri 30 cm, plašč pa je enak dvema osnovnima ploskvama.

a) Koliko meri površina stožca?
b) Izračunaj stranski rob stožca.

- 9 Kozarec za šampanjec ima obliko stožca s polmerom 4 cm in globino 12 cm. Koliko dl šampanjca lahko nalijemo vanj, če ga napolnimo do vrha?

- 10 Osnovna ploskev stožca meri 4π cm², višina stožca pa je 3-krat večja od polmera osnovne ploskve. Koliko meri površina stožca?

- 11 V pokončnem stožcu s polmerom 10 cm je plašč 2-krat večji od osnovne ploskve. Koliko meri stranica stožca?

- 12 Plašč pokončnega stožca meri 3600π cm² in je štirikrat večji od osnovne ploskve.

a) Koliko meri osnovna ploskev stožca?
b) Določi polmer osnovne ploskve.
c) Izračunaj stranico stožca.
č) Koliko meri površina stožca?
d) Koliko meri prostornina stožca?

- 13 Stožčasta posoda ima prostornino 6,28 litra in na zgornjem robu premer 10 cm. Kako visoka je ta posoda?

- 14 Pokončni stožec in valj imata enaki osnovni ploskvi in plašča. Zapiši razmerje med stranico valja in stranico stožca.

- 15 Iz kartona izrežemo krog z obsegom 50,24 cm. Koliko papirja potrebujemo, da na krog postavimo plašč stožca tako, da bo stožec visok 17 cm?

- 16 Osnovna ploskev pokončnega stožca meri 81π cm², ploščina osnega preseka pa 54 cm². Kolikšna je površina stožca?

- 17 a) Kolikokrat se poveča prostornina stožca, če višino stožca 5-krat povečamo?
b) Kolikokrat se poveča prostornina stožca, če polmer stožca 5-krat povečamo?

- 18 Površina pokončnega stožca meri 96π cm², polmer osnovne ploskve pa 6 cm. Koliko meri prostornina tega stožca?

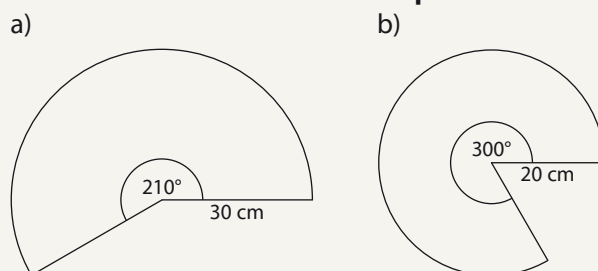
ZMOREM TUDI TO

- 19 Iz kocke z robom 12 cm izstružimo največji možni stožec. Izračunaj prostornino stožca.

- 20 Iz enakostraničnega valja so izstružili stožec z enako osnovno ploskvijo in višino. Prostornina valja in prostornina stožca sta v razmerju (izberi pravilni odgovor):

a) 2 : 1 b) 3 : 1 c) 6 : 1 č) $6 : \sqrt{3}$

- 21 Slika prikazuje plašča dveh stožcev. Kateri stožec ima večjo površino in za koliko? V kolikšnem merilu sta narisana plašča?



- 22 Stožec, katerega višina je 3-krat daljša od polmera osnovne ploskve, ima prostornino 125π cm³. Izračunaj osni presek stožca.

- 23 Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči, kako se spremeni prostornina poljubnega stožca:

a) če višino prizme povečaš n -krat. Ugotovitev utemelji.
b) če polmer osnovne ploskve povečaš n -krat. Ugotovitev utemelji.



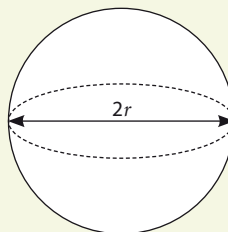
7 KROGLA

Izvedel boš:

- kaj je krogla,
- kako izračunamo površino in prostornino krogle.

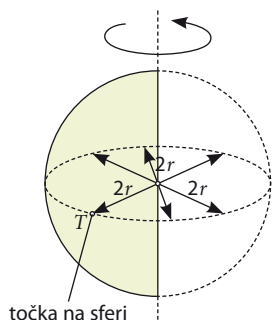


Rok je na športnem dnevu metal kroglo. Učitelj športne vzgoje je povedal, da je šolska krogla nekoliko manjša, kot jo uporabljajo športniki na tekmovanjih. Njen premer je samo 15 cm. Seveda je zato tudi lažja.



RAZMISLI

Ali je izraz premer krogle ustrezen?
Katero dimenzijo krogle je imel učitelj v mislih?
Ali bi lahko brez tehtanja ugotovili maso krogle?



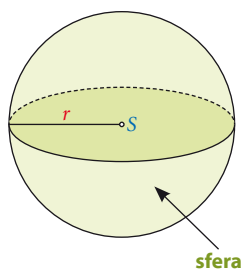
Premer krogle je pravzaprav premer poljubnega središčnega preseka krogle, ki ima vedno obliko kroga. Nastanek krogle lahko namreč pojasnimo tudi tako, da polkrog za polni kot zavrtimo okoli premera.

Pri krogli lahko polmer oziroma premer narišemo v poljubni smeri v prostoru, saj pomeni razdaljo do poljubne točke na sferi krogle.

Maso krogle lahko izračunamo, če poznamo gostoto materiala (poiščemo v priročniku), iz katerega je krogla, in če znamo izračunati njeno prostornino:

$$m = \rho \cdot V$$

Osnovni pojmi v krogli



SFERA ali **OBLA** je kriva ploskev, ki obdaja kroglo.

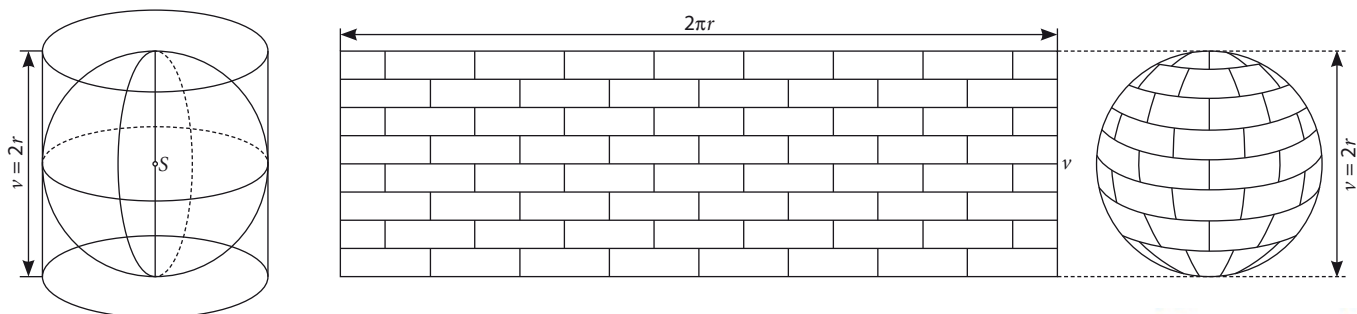
SREDIŠČE KROGLE (S) je točka, od katere so vse točke na sferi enako oddaljene.

POLMER KROGLE (r) je razdalja med središčem krogle in poljubno točko sfere.



Površina krogle

Mreže krogle ne moremo razviti v ravnino, kakor smo to storili pri valju in stožcu. Izkaže se, da je površina krogle po velikosti enaka plašču krogli očrtanega enakostraničnega valja.



$$P = 2\pi r \cdot v$$

$$P = 2\pi r \cdot 2r$$

$$P = 4\pi r^2$$



POVRŠINA KROGLE

$$P = 4\pi r^2$$



Površina krogle je enaka plašču krogli očrtanega enakostraničnega valja.

Prostornina krogle

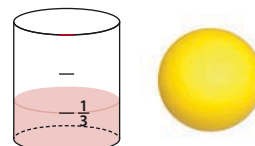
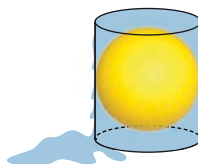
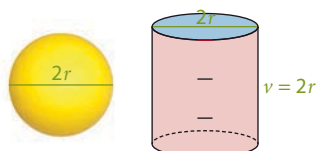
Prostornino krogle lahko določimo s primerjavo s prostornino valja.



S pomočjo merilnih posod ugotovi razmerje prostornin.
DZ – naloga 4.12

Eksperiment za merjenje prostornine krogle s pomočjo prostornine enakostraničnega valja:

- 1 Vzemimo kroglo in enakostranični valj z enakima premeroma.
- 2 Valj napolnimo z vodo in vanj potopimo kroglo.
- 3 Krogla spodrine vodo, katere prostornina se ujema z njeno prostornino.



Ugotovimo, da je izteklo $\frac{2}{3}$ vode.

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 2r$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$



PROSTORNINA KROGLE

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Prostornina krogle je enaka dvema tretjinama prostornine enakostraničnega valja, ki ima enak polmer kot krogla.



REŠENI PRIMERI

- ① Koliko tehta aluminijasta krogla s polmerom 20 cm, če je gostota aluminija $2,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

Rešitev:

Podatki: $r = 20 \text{ cm}$

$$\rho = 2,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$m =$$

Najprej izračunamo prostornino krogle in nato s pomočjo gostote še maso:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 20^3}{3}$$

$$V = 33493 \text{ cm}^3$$

$$V \doteq 33,5 \text{ dm}^3$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = 2,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 33,5 \text{ dm}^3$$

$$m = 90,45 \text{ kg}$$

Odgovor: Krogla tehta 90,45 kg.

- ② Akvarij ima obliko krogle, ki ima na vrhu odrezan del sfere. Kolikšen je premer akvarija, če ga lahko napolnimo do $\frac{3}{4}$ celotne prostornine in porabimo za to 6 litrov vode?

Rešitev:

Podatki: $V_{\frac{3}{4}} = 6 \text{ l} = 6000 \text{ cm}^3$

$$2r =$$

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$3V = 4\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{3 \cdot 8000}{4 \cdot 3,14}$$

$$r^3 = 1910 \text{ cm}^3$$

Iz dane prostornine vode izračunamo prostornino celotne posode, če bi bila popolna krogla:

$$\frac{3}{4} \text{ od } V = 6000 \text{ cm}^3$$

$$V = (6000 \cdot 4) : 3 = 8000 \text{ cm}^3$$

V računskih tablicah poiščemo tretji koren števila 1910. Pri tem se vprašamo, katero število na tretjo potenco da število 1910.

$$r = 12,4.$$

Odgovor: Akvarij ima polmer približno 12,4 cm oziroma premer približno 24,8 cm.

- ③ Za izdelavo okroglega balona so potrebovali približno 80 m^2 tkanine. Koliko zraka drži ta balon?

Rešitev:

Podatki: $P = 80 \text{ m}^2$

$$V =$$

Iz znane površine izrazimo polmer r :

$$P = 4\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{P}{4\pi}$$

$$r^2 = \frac{80}{4 \cdot 3,14}$$

$$r^2 = 6,37$$

$$r = \sqrt{6,37}$$

$$r = 2,5 \text{ m}$$

Prostornina balona je:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 2,5^3}{3}$$

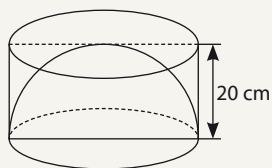
$$V = 65,4 \text{ m}^3$$

Odgovor: Balon drži približno $65,4 \text{ m}^3$ zraka.



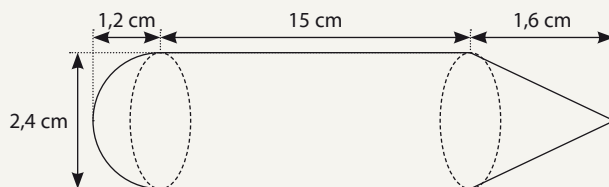
NALOGE ZA VAJO

- 1 Koliko meri površina krogle s polmerom 20 cm?
- 2 Žogica za tenis ima premer 6 cm. Izračunaj njeno površino.
- 3 Koliko meri prostornina krogle s premerom 18 cm?
- 4 Valju včrtamo polkroglo, kot kaže slika.
 - a) Kolikšna je površina polkrogle?
 - b) Kolikšna je prostornina polkrogle?



- 5 Okrogel stolp ima na vrhu polkrožno kupolo s premerom 7 m. Koliko m^2 pločevine je v njej? (Za π vzemi približek $\frac{22}{7}$.)
- 6 Zemlja ni popolna krogla. Poišči podatke in izračunaj približno površino in prostornino našega planeta.

- 7 Koliko meri prostornina krogle s površino $576\pi \text{ cm}^2$?
- 8 Krogla in valj imata enaka polmera in enaki prostornini. Zapiši razmerje med površino krogle in površino valja.
- 9 Iz lesene kocke z robom 20 cm bi radi izdelali kroglo tako, da bi bilo čim manj odpadkov.
 - a) Koliko % lesa odpade?
 - b) Ali lahko nalogo rešiš tudi, če stranica kocke ni podana?
- 10 Izračunaj površino in prostornino sestavljenega telesa na sliki.



- 11 Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči, kako se spremenita površina in prostornina poljubne krogle, polmer krogle povečaš za n -krat. Ugotovitev utemelji.



8 VRTENINE

Izvedel boš:

– kako nastanejo vrtenine ter kako nastaneta valj in stožec.



Rok je za stavo zavrtel kovanec na mizi in opazoval njegovo vrtenje. Za trenutek se mu je zdelo, da se je kovanec spremenil v kroglo.

RAZMISLI

Kakšna geometrijska telesa bi videl, če bi zavrtel predmete različnih oblik?

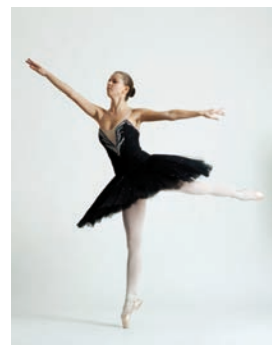
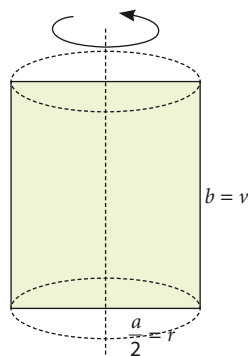
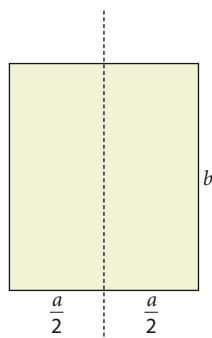
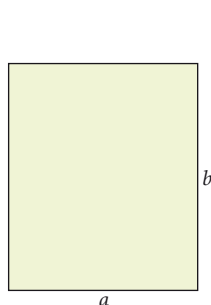
Pri enem vrtljaju geometrijskega lika okoli izbrane osi nastanejo okrogla geometrijska telesa – **vrtenine**.

Če **pravokotnik** ali **kvadrat** zavrtimo okoli osi, ki je simetrala ene od stranic, nastane vrtenina **pokončni valj**.

1 narišemo pravokotnik

2 označimo os vrtenja

3 lik zavrtimo okoli osi



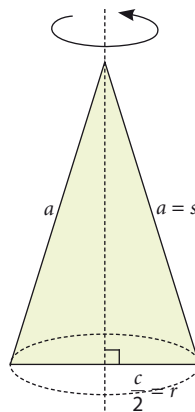
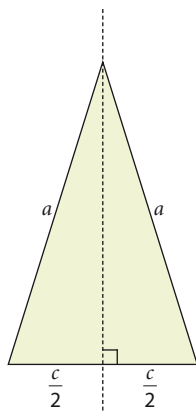
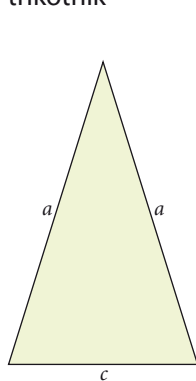
Ko pravokotnik zavrtimo okoli osi, ki je simetrala ene od stranic pravokotnika, razpolovljeni stranici (a) opišeta osnovni ploskvi (kroga), drugi stranici (b) pa opišeta plašč valja. Osni presek valja je ravno pravokotnik oziroma kvadrat, ki ga vrtimo.

Če vrtimo **enakokraki** ali **enakostranični trikotnik** okrog višine na osnovnico, dobimo **pokončni stožec**.

1 narišemo enakokraki trikotnik

2 označimo os vrtenja

3 lik zavrtimo okoli osi



Ko trikotnik zavrtimo okoli osi, ki je nosilka višine na osnovnico, osnovnica (c) opiše osnovno ploskev (krog), kraka (a) pa opišeta plašč valja. Osni presek stožca je ravno trikotnik, ki ga vrtimo.



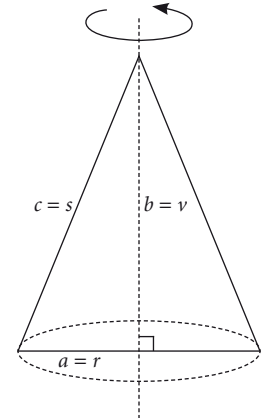
REŠENI PRIMERI

- 1 Dan je pravokotni trikotnik s katetama 6 cm in 8 cm. Pravokotni trikotnik zavrtimo okoli nosilke daljše katete.

- a) Nariši skico nastale vrtenine in jo poimenuj.
b) Izračunaj površino vrtenine.

Rešitev:

- a) Narišemo pravokotni trikotnik in označimo os, ki je nosilka daljše katete. Krajša kateta pri vrtenju okoli osi opiše osnovno ploskev (krog), hipotenuza pa plašč stožca. Pri tem velja, da je polmer osnovne ploskve enak dolžini krajše katete, stranski rob pa je enak dolžini hipotenuze. Nastala vrtenina je pokončni stožec.



- b) Izpišemo podatke za nastali stožec:

$$r = a = 6 \text{ cm}$$

$$v = b = 8 \text{ cm}$$

$$P =$$

$$V =$$

$$P = \pi r^2 + \pi r s$$

$$P = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10$$

$$P = 36\pi + 60\pi$$

$$P = 96\pi \text{ cm}^2$$

Za izračun površine stožca potrebujemo dolžino stranskega roba, ki jo izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$s^2 = r^2 + v^2$$

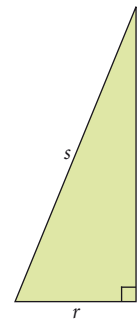
$$s^2 = 6^2 + 8^2$$

$$s^2 = 36 + 64$$

$$s^2 = 100$$

$$s = \sqrt{100}$$

$$s = 10 \text{ cm}$$



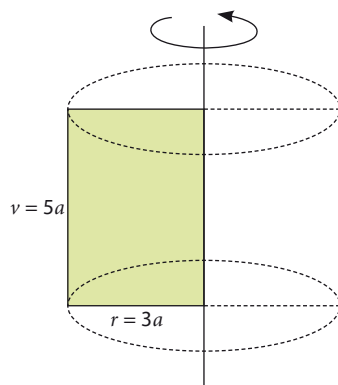
Odgovor: Površina vrtenine je $96\pi \text{ cm}^2$.

- 2 Dan je pravokotnik s stranicama $3a$ in $5a$. Pravokotnik zavrtimo okoli nosilke daljše stranice.

- a) Nariši skico nastale vrtenine in jo poimenuj.
b) Koliko meri površina vrtenine, če je njena prostornina $1215\pi \text{ cm}^3$?

Rešitev:

- a) Nastala vrtenina je valj.



$$b) r = 3a$$

$$v = 5a$$

$$V = 1215\pi \text{ cm}^3$$

$$P =$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$1215\pi = \pi \cdot (3a)^2 \cdot 5a$$

$$1215 = 9a^2 \cdot 5a$$

$$1215 = 45a^3$$

$$a^3 = \frac{1215}{45}$$

$$a^3 = 27$$

$$a = 3 \text{ cm}$$

S pomočjo znanega parametra a lahko izračunamo polmer

in višino valja:

$$r = 3a = 9 \text{ cm}$$

$$v = 5a = 15 \text{ cm}$$

Površina valja:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

$$P = 2\pi \cdot 9^2 + 2\pi \cdot 9 \cdot 15$$

$$P = 162\pi + 270\pi$$

$$P = 432\pi \text{ cm}^2$$

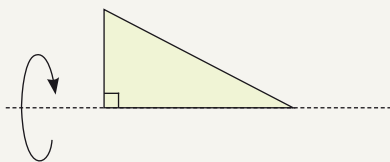
Odgovor: Površina vrtenine je $432\pi \text{ cm}^2$.



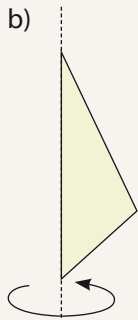
NALOGE ZA VAJO

- 1 Skiciraj vrtenino, ki nastane, ko zavrtiš narisane like okoli označenih osi.

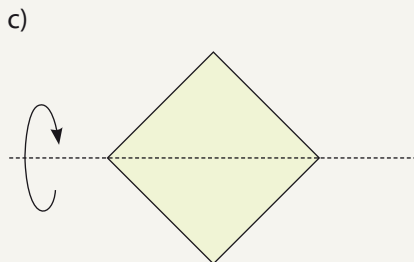
a)



b)



c)

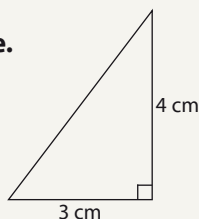


- 2 Skiciraj vrtenino, ki nastane, če zavrtimo:
- poljuben pravokotni trikotnik okoli hipotenuze;
 - poljuben pravokotnik okoli krajše stranice;
 - poljuben trapez okoli daljše osnovnice;
 - poljuben romb okoli krajše diagonale.

- 3 Dan je pravokotnik s stranicama $a = 6$ cm in $b = 10$ cm. Določi površino in prostornino vrtenine, ki nastane, če pravokotnik zavrtimo okoli simetrale krajše stranice.
- 4 Dan je enakokraki trikotnik z osnovnico 18 cm in višino 12 cm. Trikotnik zavrtimo okoli nosilke višine na osnovnico. Določi površino in prostornino vrtenine.

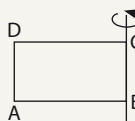
- 5 Pravokotni trikotnik zavrtimo najprej okrog daljše katete, potem pa okrog krajše katete.

- Izračunaj površino obeh nastalih stožcev.
- Zapiši razmerje med površino prvega in površino drugega stožca.

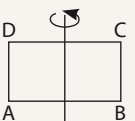


- 6 Pravokotnik $ABCD$ z dolžino $|AB| = 10$ cm in višino $|BC| = 6$ cm zavrti okrog osi. Za vsak primer zapiši koliko meri polmer in koliko višina valja, ki nastane z vrtenjem.

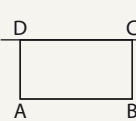
a)



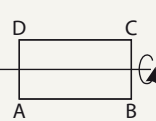
b)



c)

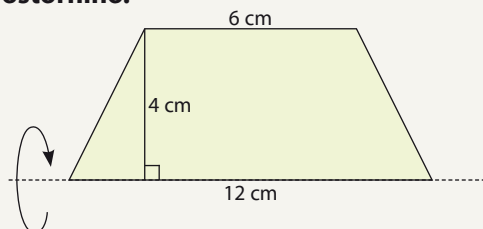


č)



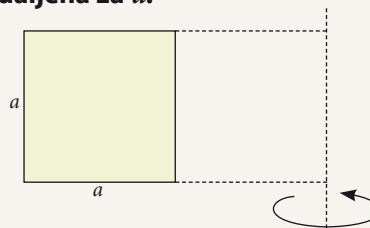
Brez računanja presodi kateri valj ima največjo in kateri najmanjšo prostornino. Ali pri površini velja enaka ugotovitev?

- 7 Enakokraki trapez s podatki, ki so označeni na sliki, zavrtimo okoli daljše osnovnice. Nariši vrtenino, ki pri tem nastane, in izračunaj njeno prostornino.

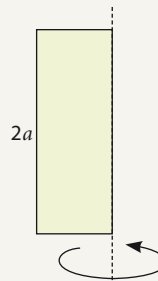


ZMOREM TUDI TO

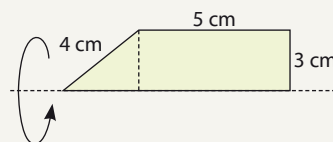
- 8 Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane z vrtenjem kvadrata s stranico a okoli osi, ki je vzporedna s stranico kvadrata in je od nje oddaljena za a .



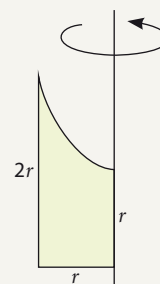
- 9 S pomočjo parametra x izrazi površino in prostornino vrtenine, če veš, da je nastali valj enakostraničen.



- 10 Izračunaj površino telesa, ki nastane z vrtenjem narisanege lika.



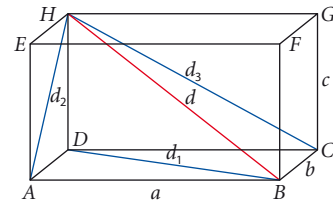
- 11 Lik na sliki, zavrtimo okrog osi. Izračunaj površino in prostornino nastale vrtenine.



8T

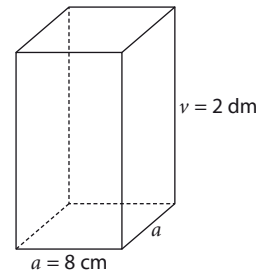
1 Dan je kvader $ABCDEFGH$ z robovi $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 8$ cm in $|AE| = 10$ cm.

- Kateri robovi kvadra so vzporedni z robom AD ?
- Ali se nosilki robov DH in FG sekata?
- V kakšni medsebojni legi sta premica FH in ravnina ABE ?
- Kaj imata skupnega ravnini ABC in AHG ?
- Kateri robovi kvadra so pravokotni na ravnino BCF ?
- Izračunaj dolžine vseh na sliki označenih diagonal.
- Izračunaj ploščino trikotnika BDH .
- Izračunaj ploščino trikotnika BCH .



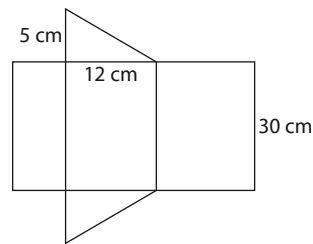
5T

- 2**
- Poimenuj geometrijsko telo, ki ga prikazuje slika.
 - Izračunaj ploščino osnovne ploskve.
 - Izračunaj ploščino plašča telesa.
 - Izračunaj površino telesa.
 - Izračunaj prostornino telesa in jo izrazi v litrih.



5T

- 3**
- Kako imenujemo geometrijsko telo, katerega mreža je prikazana na sliki?
 - Kateri lik predstavlja osnovno ploskev?
 - Izračunaj ploščino osnovne ploskve.
 - Izračunaj površino telesa.
 - Izračunaj prostornino telesa.



3T

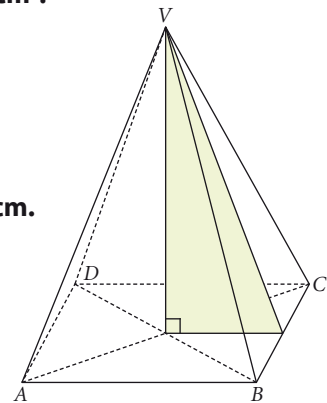
4 V pravilni 6-strani prizmi z osnovnim robom 8 cm meri plašč 720 cm².

- Kako visoka je ta prizma?
- Izračunaj skupno dolžino vseh robov te prizme.
- Izračunaj ploščino največjega osnega preseka prizme.

4T

5 Osnovni rob pravilne 4-strane piramide meri 16 cm, višina pa 15 cm.

- Izračunaj prostornino piramide.
- Izračunaj površino piramide.
- Izračunaj ploščino trikotnika, ki je označen na sliki.
- Izračunaj ploščino trikotnika ACV .

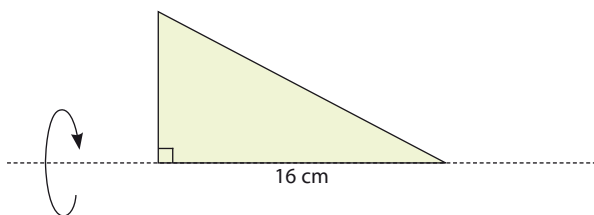


6T

6 Plašč pravilne 4-strane piramide s stransko višino 12 cm meri 432 cm².

- Izračunaj osnovni rob piramide.
- Kolikšna je površina piramide?
- Koliko meri stranski rob piramide?

- 5T **7** Koliko kubičnih metrov lesa je v 2 m dolgem hlodu oblike valja s premerom 50 cm?
($\pi = 3,14$)
- 6T **8** Izračunaj prostornino valja, če je njegova površina $448\pi \text{ cm}^2$, polmer in višina valja pa sta v razmerju 2 : 5.
- 4T **9** Premer stožca je 14 cm, stranski rob pa meri 25 cm.
a) Izračunaj površino stožca.
b) Izračunaj prostornino stožca.
Rezultate zapiši kot mnogokratnik števila π .
- 8T **10** Iz lesene kocke z robom 1 dm izstružimo največjo mogočo kroglo ($\pi = 3,14$).
a) Izračunaj prostornino nastale krogle.
b) Koliko % lesa bi odpadlo?
c) Koliko bi tehtala krogla, če je gostota lesa 600 kg/m^3 ?
č) Izstruženo kroglo prežagamo na pol. Kolikšna je površina ene polovice?
- 6T **11** Pravokotni trikotnik zavrtimo okoli katete z dolžino 16 cm. Koliko meri površina nastale vrtenine, če je njena prostornina $768\pi \text{ cm}^3$?



Možnih je 60 točk.



Špela **na poti k vrhu** (45–53).



Špela **dodatno trenira** (30–35).



Špela **blesti** (54–60).



Špela **na dobri poti** (36–44).



Špela **išče pomoč** (manj kot 30 točk).

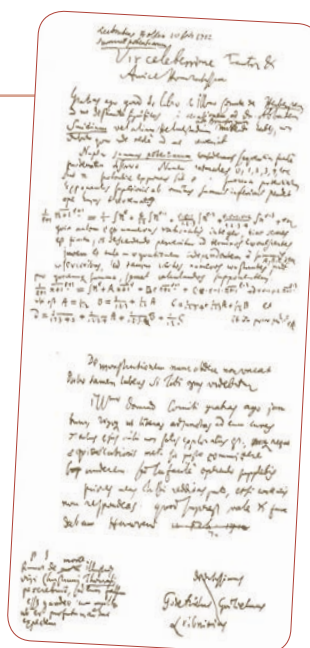
ROK IN ŠPELA

5. DEL



NEKOČ IN DANES

Ime funkcija je leta 1673 uvedel nemški matematik **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716). Besedo funkcija je uporabil za označitev krivulje.



Definicijo funkcije, ki jo uporabljamo še danes, je postavil nemški matematik **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805–1859). Bil je prvi, ki je teorijo funkcij povezal s teorijo števil.



Pojem funkcije (preslikave) se je razvil šele v 17. stoletju, ko so lahko medsebojno odvisnost količin prikazali na koordinatni mreži, ki jo je vpeljal francoz **Rene Descartes** (1596–1650).

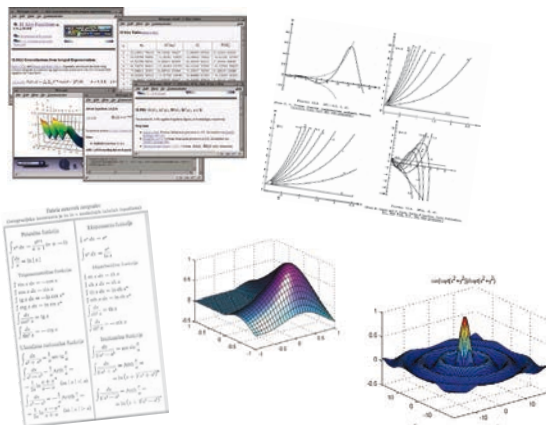


FUNKCIJA

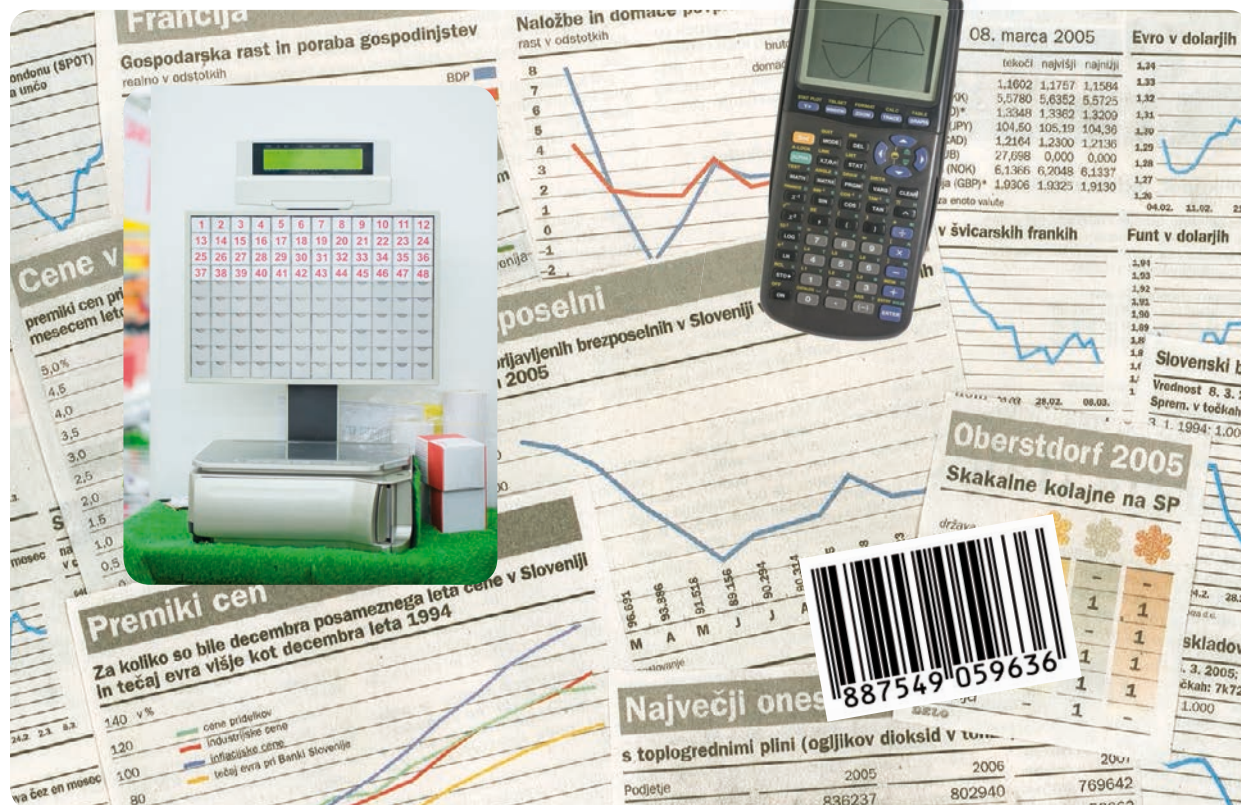
- 1 ŠTEVILSKA PREMICA
IN KOORDINATNI SISTEM
 - 2 ODVISNOST DVEH KOLIČIN;
FUNKCIJA
 - 3 LINEARNA FUNKCIJA
 - 4 GRAF LINEARNE FUNKCIJE
- ŠPELA SE PREIZKUSI



Svet funkcij je raznolik in brezmejen:



Funkcije v vsakdanjem življenju:



1 ŠTEVILSKA PREMICA IN KOORDINATNI SISTEM

Izvedel boš:

- kako upodobimo množico točk na številski premici,
- kako upodobimo množico točk v ravnini.



Rok je bral knjigo o skritih zakladih. Želel je razvozlati star zapis, ki se je glasil: »Zaklad se nahaja na področju, ki je proti vzhodu oddaljeno več kot deset korakov, proti severu pa več kot petnajst korakov in manj kot dvajset korakov.«

RAZMISLI

Kako bi Rok našel področje, kjer se nahaja zaklad?

Množico točk, ki ustrezajo zahtevanim pogojem, lahko upodobimo na številski premici ali na koordinatnem sistemu.

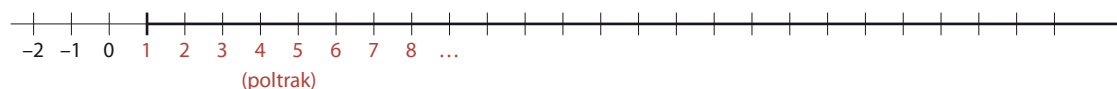
Na številski premici lahko upodobimo kot:

- eno točko z dano koordinato: $A(4)$ – točka s koordinato 4; $B(-1)$ – točka B s koordinato (-1)

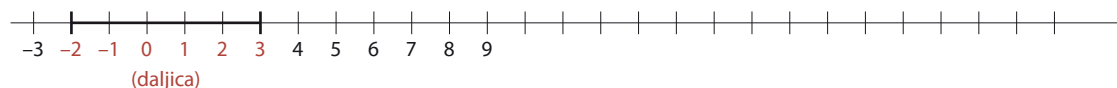


- množico točk, ki ustrezajo določenim pogojem:

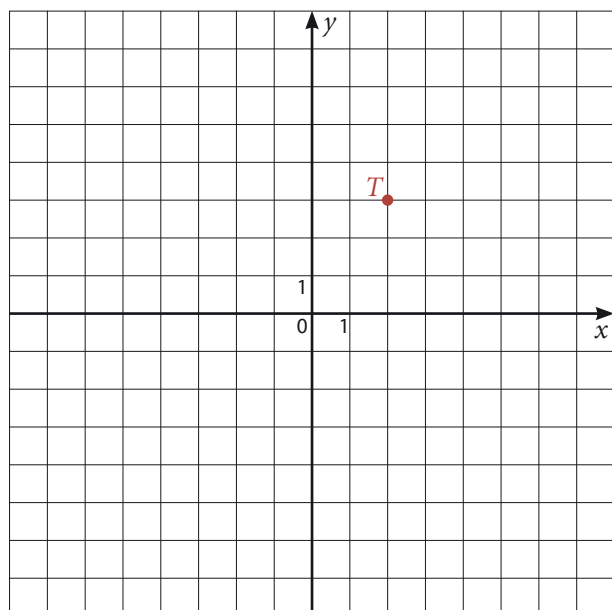
$$x \geq 1$$



$$-2 \leq 1x \leq 3$$



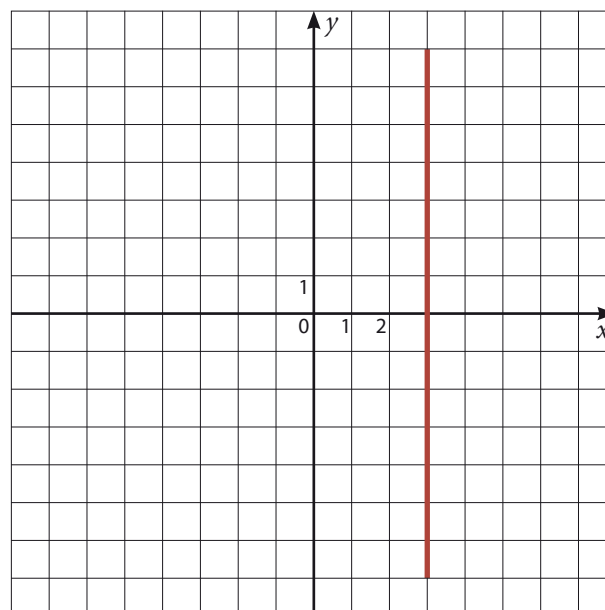
Lego točke v ravnini upodobimo v koordinatnem sistemu.



$T(2, 3)$
koordinati točke

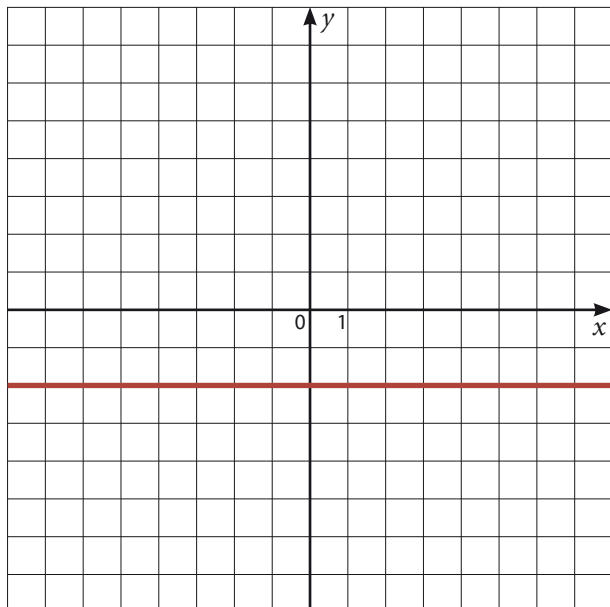
$T(x, y)$
abscisa, ordinata

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $x = 3$
(vse točke v ravnini, za katere je abscisa 3, ordinata pa je katerokoli število)



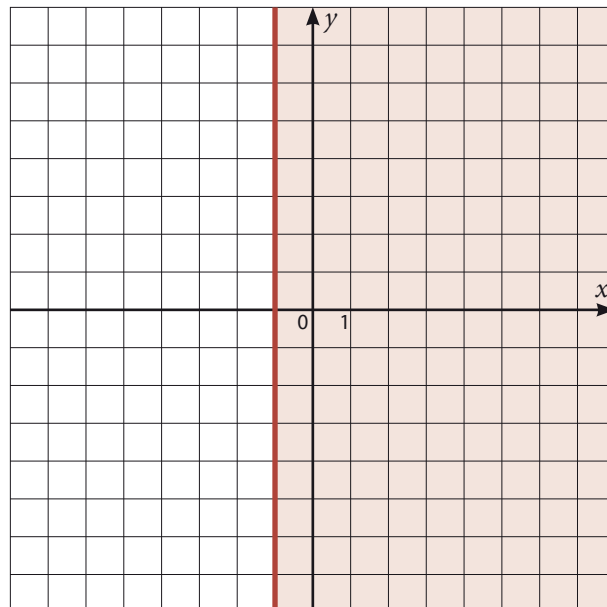
(premica)

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $y = -2$
(vse točke v ravnini, za katere je ordinata -2 ,
abscisa pa je katerokoli število)



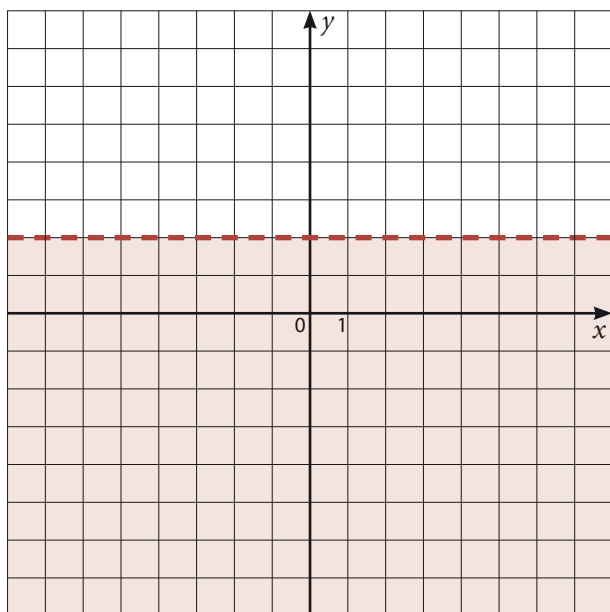
(premica)

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $x \geq -1$
(vse točke v ravnini, za katere je abscisa večja
ali enaka -1 (torej vključno z -1), ordinata pa
je katerokoli število)



(polravnina)

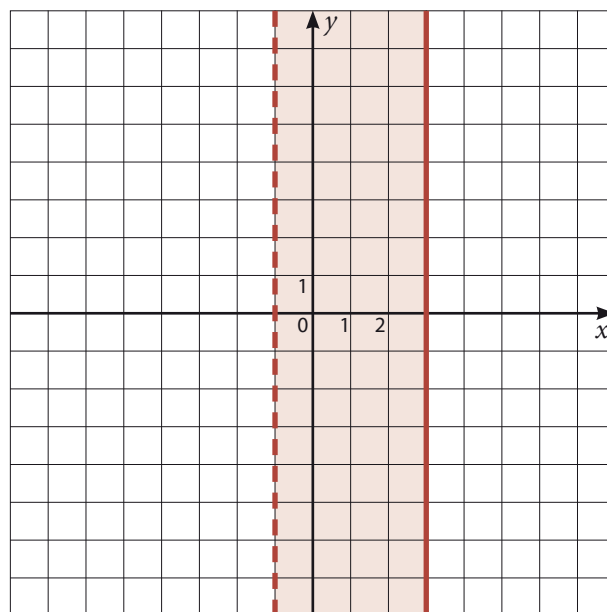
- množico vseh točk, ki ustrezajo pogoju $y < 2$
(vse točke v ravnini, za katere je ordinata manjša
od 2 (2 ni vključena), abscisa pa je katerokoli
število)



(polravnina)

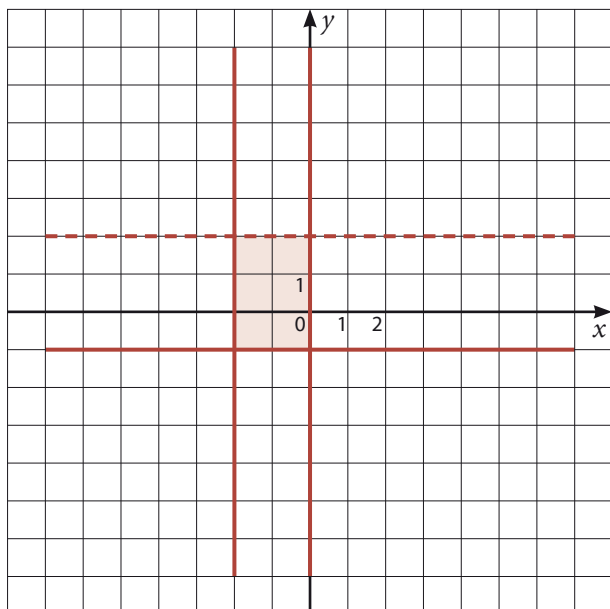
($y < 2$ – črtkana črta)

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $-1 < x \leq 3$
(vse točke v ravnini, za katere je abscisa večja
od -1 (brez -1), in manjša ali enaka 3, ordinata
pa je katerokoli število)



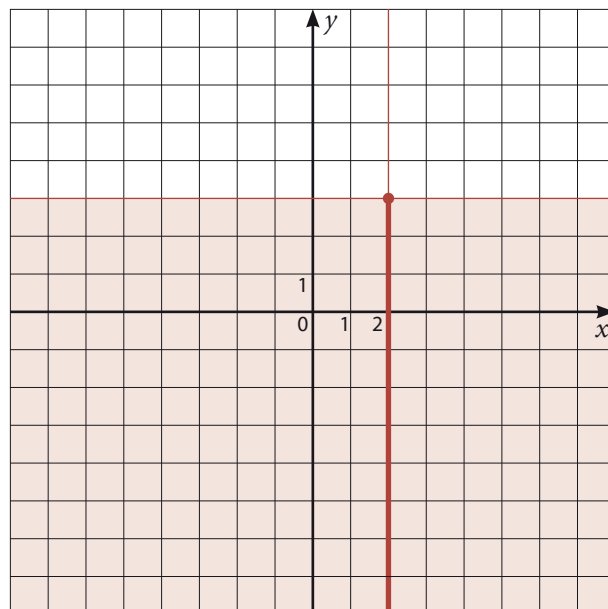
(pas)

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $-2 \leq x \leq 0$ in $-1 \leq y < 2$ (vse točke v ravnini, za katere je abscisa večja ali enaka -2 in manjša ali enaka 0 , ordinata pa je večja ali enaka -1 in manjša od 2)



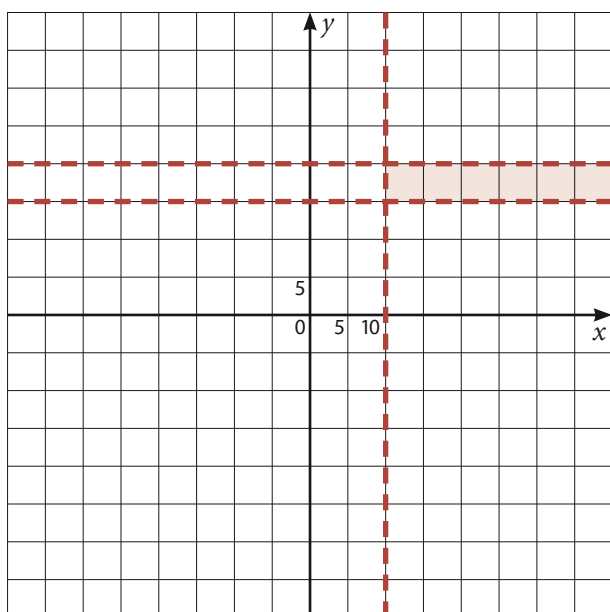
(del pasu)

- množico točk, ki ustrezajo pogoju $x = 2$ in $y \leq 3$ (vse točke v ravnini, za katere je abscisa enaka 2 , ordinata pa je manjša ali enaka 3)



(poltrak)

- Rok je na zemljevidu našel točke, ki ustrezajo pogoju $x > 10$ in $15 < y < 20$.





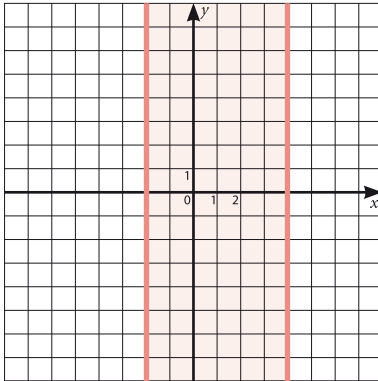
REŠENI PRIMERI

Primer 1: V koordinatnem sistemu upodobi množico točk.

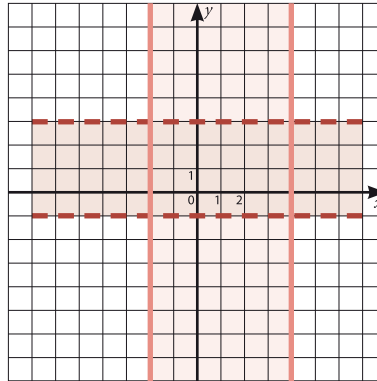
a) $-2 \leq x \leq 4$ in $-1 < y < 3$

b) $2 < x \leq 5$ in $y = 1$

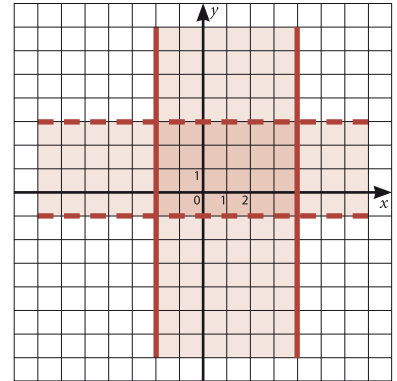
Rešitev: a)



Narišemo vse točke, ki ustrezajo pogoju $-2 \leq x \leq 4$ (dobimo pas).

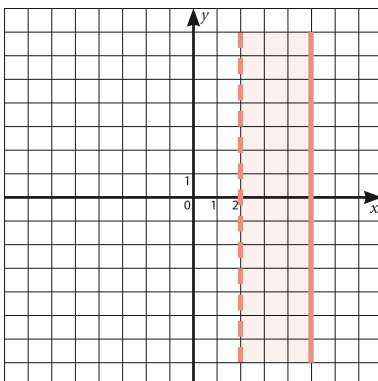


Na isti koordinatni sistem narišemo vse točke, ki ustrezajo pogoju $-1 < y < 3$ (dobimo nov pas).

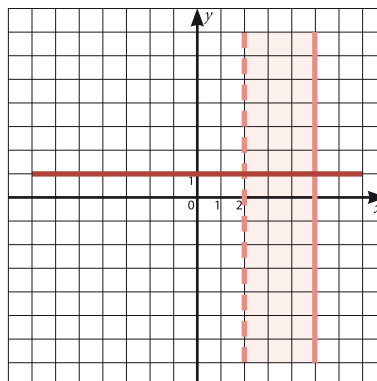


Rešitev je presek obeh pasov.

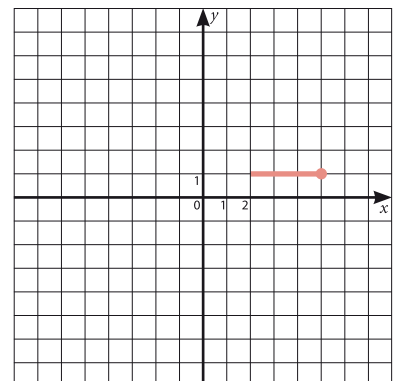
b)



Narišemo vse točke, ki ustrezajo pogoju $2 < x \leq 5$ (dobimo pas).



Na isti koordinatni sistem narišemo točke, ki ustrezajo pogoju $y = 1$ (dobimo premico).



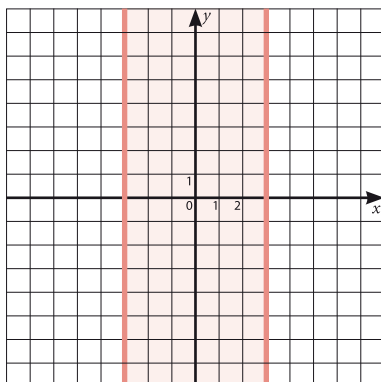
Rešitev je presek obeh delnih pogojev.

Primer 2: V koordinatnem sistemu upodobi množico točk:

a) $|x| \leq 3$

b) $|y| > 2$

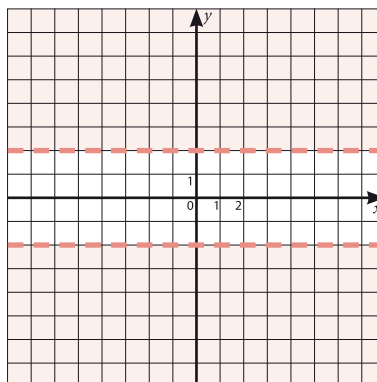
Rešitev: a)



$|x| \leq 3$

$|x|$ je manjši ali enak 3, ko je x med -3 in 3 ($-3 \leq x \leq 3$)

Rešitev: b)



$|y| > 2$

$|y|$ je večji od 2, ko je $y > 2$ in ko je $y < -2$



NALOGE ZA VAJO

1 Na številski premici upodobimo množico točk.

- a) $x \geq 3$
- b) $x \leq 4$
- c) $-2 \leq x \leq 3$
- č) $0 < x \leq 5$

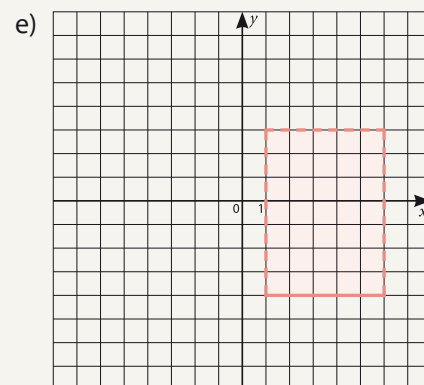
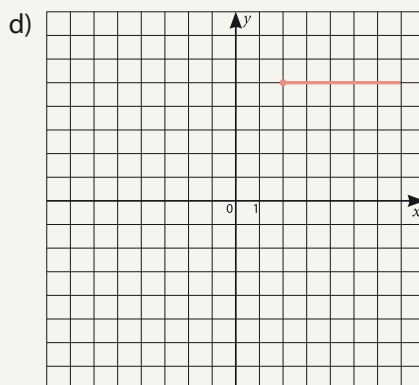
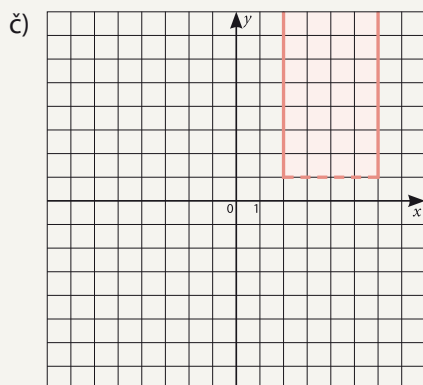
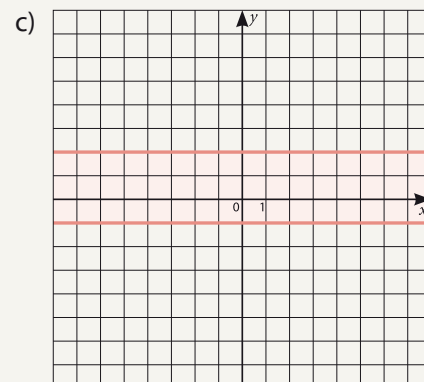
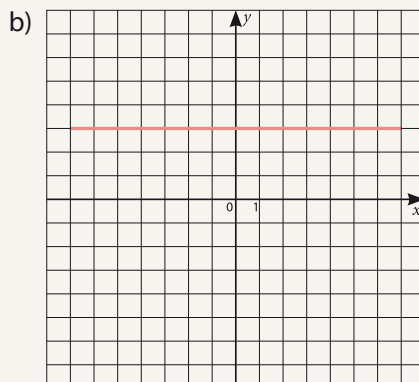
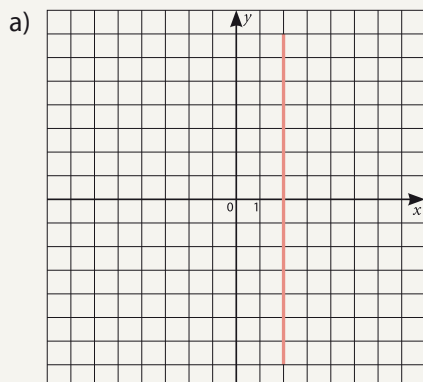
2 V koordinatnem sistemu upodobi množico točk, ki ustrezajo pogoju.

- a) $x = 2$
- b) $y = -3$
- c) $x \geq -1$
- č) $x < 4$
- d) $y > 0$
- e) $y \leq -2$

3 V koordinatnem sistemu upodobi množico točk, ki ustrezajo pogoju.

- a) $x = 3$ in $y = -2$
- b) $x = -2$ in $y > -1$
- c) $x > -3$ in $y \leq 2$
- č) $-1 \leq x \leq 2$ in $y \geq 1$
- d) $x < 3$ in $-2 \leq y < 3$
- e) $-2 \leq x \leq 1$ in $0 \leq y \leq 2$
- f) $|x| = 3$
- g) $|x| < 3$
- h) $|y| \geq 1$
- i) $|x| > 3$ in $|y| \leq 2$

4 Odčitaj pogoje, ki jim ustrezajo upodobljene množice točk.



5 Z uporabo ustreznega računalniškega programa nariši množico točk, ki ustrezajo pogojem.

- a) $x = -2$
- b) $y \geq 1$
- c) $x = 3$ in $y = 4$
- č) $x < 2$ in $y = -3$
- d) $x \geq -1$ in $y < 5$
- e) $-1 \leq x \leq 3$ in $y > 2$
- f) $x > -2$ in $-3 < y \leq 3$
- g) $-3 < x < 2$ in $-1 \leq y \leq 2$
- h) $-1 \leq x \leq 4$ in $0 \leq y \leq 3$
- i) $0 < x \leq 3$ in $-2 < y < 0$

2 ODVISNOST DVEH KOLIČIN; FUNKCIJA

Izvedel boš:

- kdaj sta dve količini med seboj odvisni,
- kako ponazorimo odvisnost dveh količin,
- kaj je funkcija.



Špela in Rok sta imela vsak po 120 evrov prihrankov. Oba sta denar porabila za dopolnitev videozbirke. Špela je domov prinesla dvanajst videokaset, Rok pa 7 DVD-jev.

RAZMISLI

Od česa je odvisno, koliko izdelkov lahko kupimo za določeno vsoto denarja?

Videokasete in DVD-ji se razlikujejo po ceni, zato sta jih Špela in Rok domov prinesla različno veliko. Ker sta imela oba enako količino denarja, je bila količina kupljenih filmov odvisna od njihove cene.

Špela je svojih 120 evrov *pretvorila* v 12 videokaset.

Rok je svojih 120 evrov *pretvoril* v 7 DVD-jev.

Oba bi z več denarja dobila več filmov, z manj pa manj filmov.



V življenju se pogosto srečamo s količinami, ki so med seboj odvisne:

Obseg kvadrata je odvisen od *dolžine stranice*.

Znesek plačila za nakup goriva je odvisen od *vrste goriva* in od *količine natočenega goriva*.

Čas, v katerem bomo prehodili določeno razdaljo, je odvisen od *hitrosti*, *s katero hodimo*.

Količine, ki se spreminjajo, imenujemo **spremenljivke**.

Količina, katere vrednost lahko poljubno izbiramo/spreminjamo (dolžina stranice, količina bencina, hitrost, s katero hodimo), se imenuje **neodvisna spremenljivka**. Količino, katere vrednost je odvisna od vrednosti neodvisne spremenljivke (obseg kvadrata, znesek na blagajni, čas, v katerem prehodimo določeno razdaljo), pa **odvisna spremenljivka**.

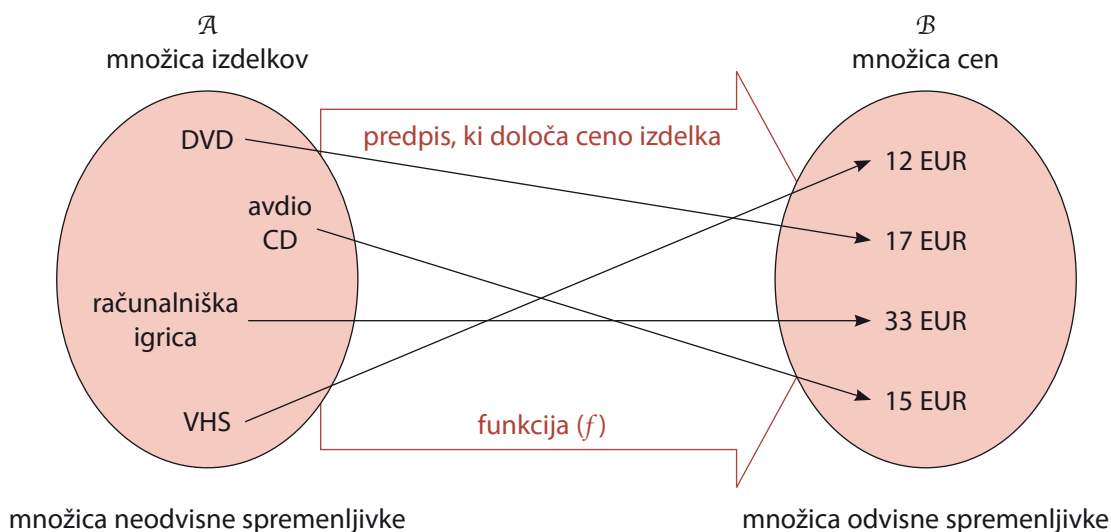
Neodvisno spremenljivko običajno označimo z *x*, odvisno pa z *y*.



Razišči odvisnost med danimi količinami.
DZ – naloga 5.1

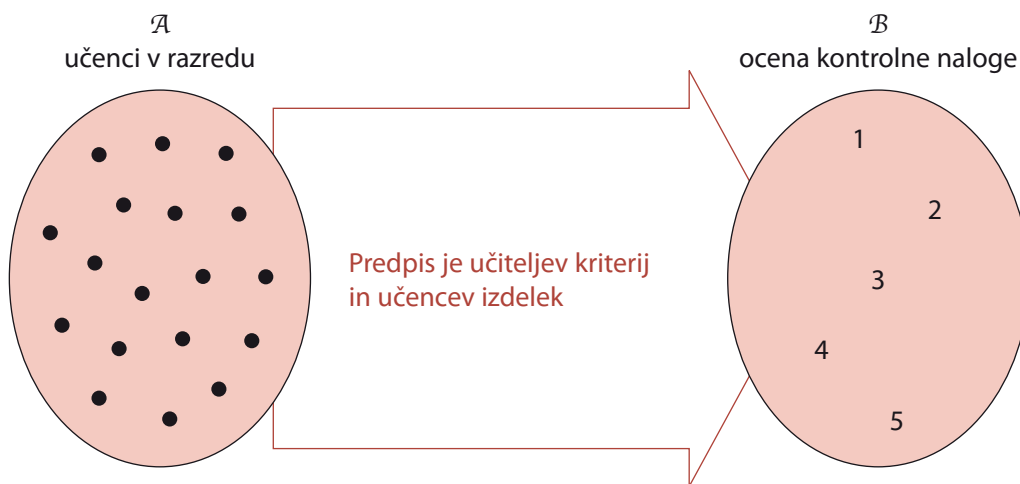


Vrednosti za neodvisno količino izbiramo iz določene množice. To je množica vrednosti neodvisne spremenljivke $\mathcal{A}$. Vrednosti za odvisno količino pa dobimo v množici vrednosti odvisne spremenljivke $\mathcal{B}$.



Predpis, ki vsakemu izdelku priredi natanko določeno ceno, imenujemo **funkcija (f)**. Izdelek lahko poljubno izberemo, zato rečemo, da je izdelek **neodvisna spremenljivka**. Cena izdelka (vrednost izdelka) je odvisna od izbire izdelka, zato je cena **odvisna spremenljivka**.

Podobne preslikave najdemo tudi v drugih primerih.



Predpis, ki vsakemu elementu x iz množice $\mathcal{A}$ priredi natanko določen element y iz množice $\mathcal{B}$, imenujemo preslikava ali **funkcija (f)**. Funkcija množico $\mathcal{A}$ preslika v množico $\mathcal{B}$. Vsakemu elementu iz množice $\mathcal{A}$ priredi točno določeno vrednost iz množice $\mathcal{B}$.

$f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funkcija f preslika množico $\mathcal{A}$ v množico $\mathcal{B}$

$f: x \mapsto y$ funkcija f elementu x iz množice $\mathcal{A}$ priredi element y v množici $\mathcal{B}$

Predpis, ki vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke (x) priredi natanko določeno vrednost odvisne spremenljivke (y), imenujemo **funkcija**.

Vrednost odvisne spremenljivke y je določena s funkcijskim predpisom, zato lahko rečemo, da je odvisna spremenljivka y **funkcija** neodvisne spremenljivke x , kar lahko zapišemo: $y = f(x)$. Pri tem je $f(x) = y$ **vrednost funkcije** pri danem x .

Obseg kvadrata je odvisen od dolžine stranice a : $o = 4a$. Pri tem je dolžina stranice neodvisna spremenljivka (x) in obseg odvisna spremenljivka (y), kar lahko zapišemo $o(a) = 4 \cdot x$ – vrednost obsega pri dani dolžini stranice je štirikratnik dolžine stranice ($y = 4x$).



POMNI

Funkcije spremenljivke x lahko označimo tudi z $g(x)$, $h(x)$...



FUNKCIJA

Funkcija je predpis, ki vsaki izbrani vrednosti neodvisne spremenljivke iz prve množice priredi točno določeno vrednost odvisne spremenljivke iz druge množice. Možni zapisi:

$$x \mapsto f(x) \quad \text{ali} \quad x \mapsto y \quad \text{ali} \quad y = f(x)$$

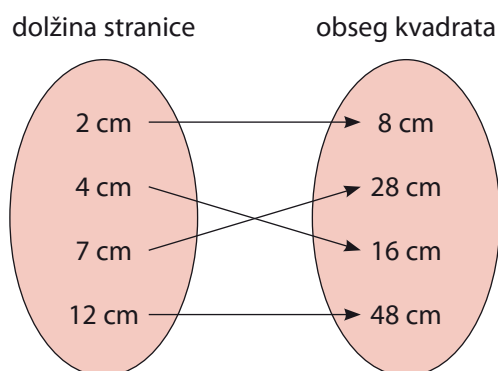
$y = f(x)$ je vrednost funkcije pri danem x .

Funkcijski predpis lahko povemo z besedami, največkrat pa ga izrazimo z matematičnim zapisom.

- a) vrednost funkcije je za 4 večja od dvakratnika spremenljivke x – zapišemo: $f(x) = 2x + 4$
- b) vrednost funkcije je enaka polovici spremenljivke x – zapišemo: $f(x) = \frac{x}{2}$
- c) vrednost funkcije je za 5 manjša od kvadrata spremenljivke x – zapišemo: $f(x) = x^2 - 5$
- č) vrednost funkcije je enaka obratni vrednosti spremenljivke x – zapišemo: $f(x) = \frac{1}{x}$

Odvisnost med količinama lahko izražamo na različne načine. Oglejmo si to na primeru obsega kvadrata.

1. način: s puščičnim diagramom



2. način: s funkcijskim predpisom

funkcijski predpis: $f(x) = 4x$

dolžina stranice: a

obseg kvadrata: o

$$o(a) = 4a$$

obseg je odvisna spremenljivka

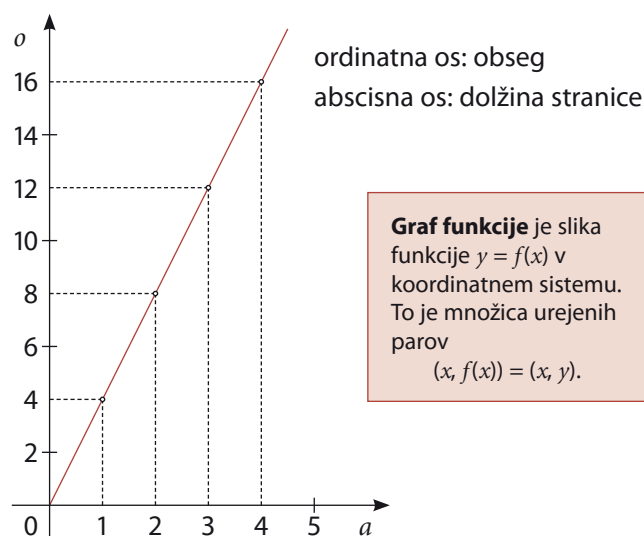
dolžina stranice je neodvisna spremenljivka

3. način: s preglednico

x	y	dolžina stranice: x	obseg kvadrata: $y = f(x)$
1	4		
2	8		
3	12		
4	16		
5	20		

Dolžino stranice lahko poljubno izbiramo: $x \in \mathbb{R}$.

4. način: z grafom



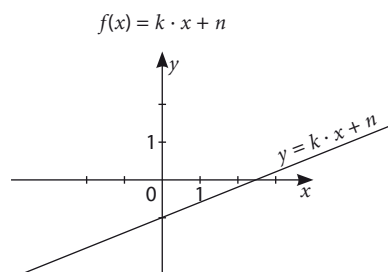
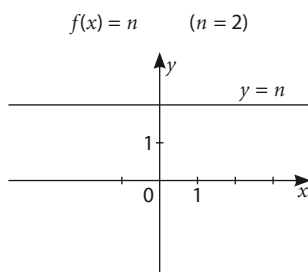
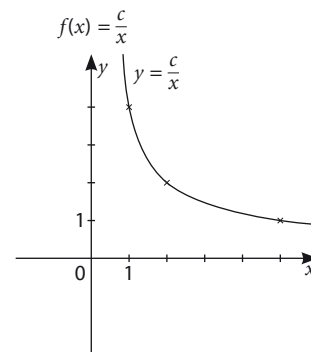
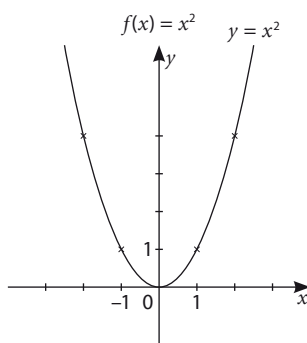
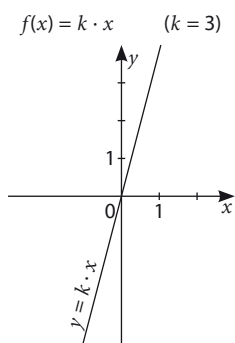
Beseda graf izvira iz grščine (*grapho* = pisati).

Če je dolžina stranice katero koli realno število, je graf zvezen (premica).

Poznamo različne funkcije: $f(x) = k \cdot x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = \frac{c}{x}$; $f(x) = n$; $f(x) = k \cdot x + n \dots$



Razišči, kakšni so grafi teh funkcij.
DZ – naloga 5.2



REŠENI PRIMERI

- 1 Za funkcijski predpis $f(x) = 2x - 6$ izpolni tabelo, če za spremenljivko x lahko izbiraš cela števila od -4 do 4 s korakom 1.

Rešitev: Za spremenljivko x izberemo vrednosti od -4 do 4 (tako da naraščajo za 1).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

Za vsako vrednost spremenljivke x izračunamo vrednost funkcije.

$$f(x) = 2x - 6$$

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) - 6 = -8 - 6 = -14$$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3) - 6 = -6 - 6 = -12$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 6 = -4 - 6 = -10$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 6 = -2 - 6 = -8$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 6 = 2 - 6 = -4$$

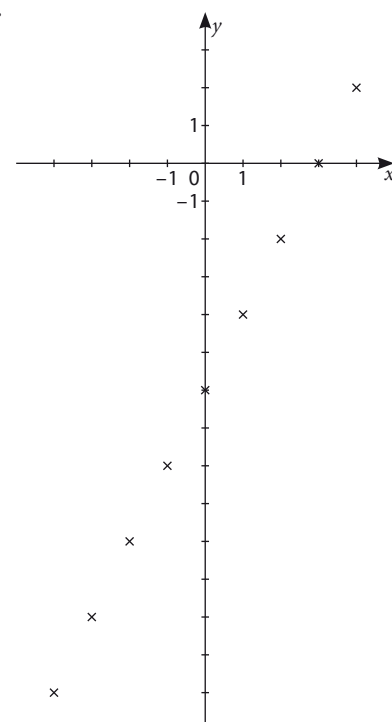
$$f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2$$

Posamezne vrednosti vpišemo v tabelo.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2



2 Izračunaj vrednost funkcije $f(x) = 3x + 2$ pri $x = -2$ in pri $x = 3$.

Rešitev: Pri danih vrednostih spremenljivke x izračunamo vrednost odvisne spremenljivke.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -6 + 2 = -4$$

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$$

Vrednost funkcije pri $x = -2$ je -4 , pri $x = 3$ pa 11 ; $f(-2) = -4$ in $f(3) = 11$.

3 Dane predpise zapiši z matematičnim zapisom.

a) vrednost funkcije je za 8 manjša od trikratnika števila x .

b) vrednost funkcije je enaka polovici vsote števila x in števila 4.

Rešitev: a) zapišemo trikratnik števila x in mu odštejemo 8: $f(x) = 3x - 8$

b) vsoto števila x in števila 4 delimo z 2: $f(x) = \frac{x + 4}{2}$.

4 Dani predpis preberi z besedami.

a) $f(x) = 5x - 4$

b) $f(x) = \frac{x}{3} + 6$

Rešitev: a) Preberemo: vrednost funkcije je za 4 manjša od petkratnika števila x .

b) Preberemo: vrednost funkcije je za 6 večja od tretjine števila x .



NALOGE ZA VAJO

1 Za funkcijske predpise sestavi tabelo, za vrednosti x je od -4 do 5 s korakom 1.

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x + 3$

c) $f(x) = -2x + 6$

č) $f(x) = -x - 2$

d) $f(x) = 2x^2 - 3$

e) $f(x) = x^3$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

g) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$

2 Izračunaj vrednosti funkcije pri izbranih vrednostih spremenljivke x .

a) $f(x) = 2x - 5$; $f(-2), f(0), f(3)$

b) $f(x) = -3x + 2$; $f(-1), f(4)$

c) $f(x) = x^2 - 3$; $f(-3), f(0), f(3)$

č) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$; $f(-3), f(0), f(6)$

d) $f(x) = x - \frac{1}{2}$; $f(-4), f(0), f(3)$

e) $f(x) = |x| + 4$; $f(-4), f(0), f(4)$

f) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$; $f(-1), f(1), f(2)$

3 Dane predpise zapiši kot funkcije.

a) $f(x)$ je za 4 večja od števila x .

b) $f(x)$ je za 9 manjša od dvakratnika števila x .

c) $f(x)$ je trikrat večja od števila x .

č) $f(x)$ je za 5 večja od četrte števila x .

d) $f(x)$ je za polovico števila x večja od 3.

e) $f(x)$ je za 8 večja od nasprotnosti števila x .

f) $f(x)$ je za 6 večja od obratne vrednosti števila x .

g) $f(x)$ je enaka kvadratu števila x .

h) $f(x)$ je za 3 večja od absolutne vrednosti števila x .

i) $f(x)$ je enaka polovici vsote števila x in števila 6.

j) $f(x)$ je za $\frac{2}{3}$ manjša od tretjine števila x .

4 Dane predpise zapiši z besedami.

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = -x + 1$

c) $f(x) = x^2$

č) $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

d) $f(x) = |x| - 5$

e) $f(x) = \frac{3x - 4}{2}$

3 LINEARNA FUNKCIJA

Izvedel boš:

- katera funkcija je linearna funkcija,
- kako izračunamo vrednost linearne funkcije.

Špela je opazovala, kako se polni sosedov bazen. Zjutraj je bilo v bazenu 100 l vode, nato pa je vsako uro vanj priteklo 240 l vode.

RAZMISLI

Kako bi Špela zapisala odvisnost količine vode v bazenu od časa polnjenja? Kolikšna bo količina vode v bazenu, ko se bo polnil 3 ure?



Špela je vedela, da se vsako uro količina vode v bazenu poveča za 240 l. Po treh urah polnjenja se torej količina vode poveča za $3 \cdot 240$ l, to je 720 l. Vendar pa je morala Špela h količini natočene vode prišteti še 100 l vode, ki je že bila v bazenu. Odvisnost je zapisala:

$$f(x) = 240x + 100$$

Ko je poznala predpis, s katerim je lahko izračunala količino vode v bazenu, je lahko izračunala, koliko vode bo v bazenu po treh urah polnjenja.

$$\begin{aligned} f(x) &= 240x + 100 \\ f(x) &= 240 \cdot 3 + 100 \\ f(x) &= 820 \end{aligned}$$

Po treh urah bo v bazenu 820 l vode. Če bi bazen polnili 2 uri, bi bilo v njem 580 l vode, če pa bi ga polnili 1 uro in 20 minut, pa le 420 l vode.

Linearno funkcijo lahko zapišemo na dva načina:

- v **razviti** ali **eksplicitni** obliki: $y = k \cdot x + n$
- v **nerazviti** ali **implicitni** obliki: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

Implicitno obliko običajno preoblikujemo v eksplicitno obliko.



LINEARNA FUNKCIJA

Kadar sta odvisna in neodvisna spremenljivka povezani s predpisom oblike $f(x) = k \cdot x + n$, pri čemer sta k in n poljubni realni števili, tak predpis imenujemo **linearna funkcija** spremenljivke x .

Konstanto k imenujemo **smerni koeficient**, konstanto n pa **začetna vrednost** linearne funkcije.



REŠENI PRIMERI

- 1 Pri linearni funkciji $f(x) = 3x - 5$ zapiši smerni koeficient in začetno vrednost.

Rešitev: Iz zapisa $f(x) = 3x - 5$ odčitamo obe vrednosti: smerni koeficient $k = 3$, začetna vrednost $n = -5$.

- 2 Zapiši linearno funkcijo, če poznaš vrednosti za smerni koeficient k in za začetno vrednost n .

- a) $k = 2$; $n = 3$ b) $k = 0$; $n = 4$ c) $k = 1$; $n = 0$ č) $k = -2$; $n = -1$

Rešitev: Linearna funkcija ima obliko $f(x) = k \cdot x + n$. Vstavimo vrednosti za k in za n .

- a) $f(x) = 2x + 3$ b) $f(x) = 0x + 4$; $f(x) = 4$
c) $f(x) = 1x + 0$; $f(x) = x$ č) $f(x) = -2x - 1$

- 3 Izračunaj vrednosti linearne funkcije $f(x) = 4x - 5$ pri $x = 3$, $x = -4$ in $x = \frac{1}{2}$.

Rešitev: Vrednost linearne funkcije je vrednost odvisne spremenljivke pri določeni vrednosti spremenljivke x : $f(x) = 4x - 5$.

$$x = 3 :$$

$$f(3) = 4 \cdot 3 - 5$$

$$f(3) = 7$$

$$x = -4 :$$

$$f(-4) = 4 \cdot (-4) - 5$$

$$f(-4) = -21$$

$$x = \frac{1}{2} :$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

- 4 Izračunaj, pri kateri vrednosti spremenljivke x je vrednost linearne funkcije $f(x) = 2x + 1$ enaka:

- a) 9 b) -5.

Rešitev: Poznamo vrednost linearne funkcije (y), izračunati pa moramo, pri kateri vrednosti spremenljivke x je bila dobljena.

a) $f(x) = 2x + 1$

$$9 = 2x + 1$$

$$-2x = 1 - 9$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

Pri $x = 4$ je vrednost funkcije 9; $f(4) = 9$

b) $f(x) = 2x + 1$

$$-5 = 2x + 1$$

$$-2x = 1 + 5$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

Pri $x = -3$ pa je vrednost funkcije -5; $f(-3) = -5$

POZOR!

Količini, ki sta premo sorazmerni ($y = k \cdot x$), določata linearno funkcijo $f(x) = k \cdot x$. Njena začetna vrednost je 0.



NALOGE ZA VAJO

- 1 V danih linearnih funkcijah izpiši smerni koeficient in začetno vrednost.

a) $f(x) = 5x - 6$

b) $f(x) = -3x + 1$

c) $f(x) = -x - 4$

č) $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$

e) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$

f) $3x + y - 5 = 0$

g) $x - 2y + 6 = 0$

- 2 Zapiši linearne funkcije, če poznaš smerni koeficient in začetno vrednost.

a) $k = 4$, $n = 2$

b) $k = -3$, $n = 4$

c) $k = -2$, $n = -1$

č) $k = 1$, $n = 0$

d) $k = \frac{1}{2}$, $n = -4$

e) $k = 5$, $n = -\frac{2}{3}$

f) $k = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{3}{4}$

g) $k = 0,5$; $n = -1,5$

- 3 Izračunaj vrednosti linearnih funkcij pri znanih x .

a) $f(x) = 2x - 6$ pri $x = 2$, $x = 3$ in $x = -3$

b) $f(x) = -4x - 2$ pri $x = -3$, $x = 2$ in $x = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = -x + 3$ pri $x = -2$, $x = 3$ in $x = 5$

č) $f(x) = \frac{x}{3} + 1$ pri $x = -3$, $x = 0$ in $x = 3$

d) $f(x) = -2x + \frac{1}{2}$ pri $x = -1$, $x = 0$ in $x = 1$

- 4 Izračunaj, pri kateri vrednosti spremenljivke x zavzema linearna funkcija dani vrednosti.

a) $f(x) = 5x - 4$ $f(x) = 11$; $f(x) = -14$

b) $f(x) = -3x + 8$ $f(x) = 14$; $f(x) = 8$

c) $f(x) = -2x + 4$ $f(x) = -2$; $f(x) = 2$

č) $f(x) = \frac{x}{2} + 6$

$f(x) = 10$; $f(x) = 3$

d) $f(x) = x - 3$

$f(x) = 0$; $f(x) = -5$

- 5 Pri plačevanju telefonskih računov moramo poleg pogovorov, ki jih opravimo, plačati tudi naročnino. Zapiši predpis, s pomočjo katerega lahko izračunaš vrednost plačila, če veš, da stane impulz za pogovor 0,02 €, naročnina pa 11,70 €. Koliko plačaš, če porabiš 132 impulzov na mesec?

- 6 Sosed Jaka je na sejmu prodajal izdelke, pri katerih je imel 5 € dobička od posameznega prodanega kosa. Zapiši predpis, s pomočjo katerega boš lahko izračunal, kolikšen je sosedov dobiček, če mora za razstavni prostor odšteti 875 €. Najmanj koliko izdelkov mora prodati, da ne bo imel izgube?

- 7 Razišči, za katere vrednosti spremenljivke x je vrednost linearne funkcije (y) pozitivna in za katere je negativna. Pomagaj si z žepnim računalom.

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $f(x) = -3x - 9$

c) $f(x) = -2x + 3$

č) $f(x) = 4x$

- 8 Linearno funkcijo preoblikuj iz implicitne v eksplisitno obliko.

a) $2x + y - 3 = 0$

b) $6x + 2y + 8 = 0$

c) $-4x - y - 5 = 0$

č) $-8x + 4y + 12 = 0$

d) $3x - 2y + 4 = 0$



4 GRAF LINEARNE FUNKCIJE

Izvedel boš:

- kakšen je graf linearne funkcije,
- kje linearna funkcija seka osi koordinatnega sistema,
- kako poiščemo presečišče dveh premic.

Rok je opazoval avtomobile, ki so z enakomerno hitrostjo vozili po obvoznici. Vedel je, da avto, ki vozi z večjo hitrostjo, v enakem času prevozi večjo razdaljo kot avto, ki je počasnejši.

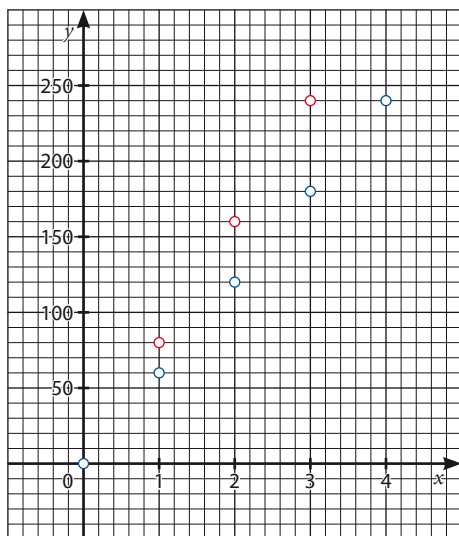


RAZMISLI

Kako bi Rok na koordinatnem sistemu prikazal odvisnost poti, ki jo opravi avto v določenem času, če ve, da vozi en avto s hitrostjo 60 km/h in drugi s hitrostjo 80 km/h?

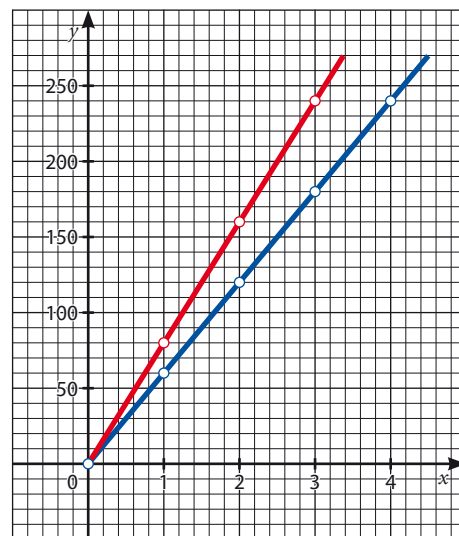
Rok je za vsak avto najprej izračunal, kolikšno razdaljo prevozi v 1 uri, v 2 urah, v 3 urah ... in sestavil preglednici.

x	y	x	y
0	0	0	0
1	60	1	80
2	120	2	160
3	180	3	240



Za vsak posamezen avto je točke (slike urejenih parov) narisal v koordinatni sistem. Vsakemu urejenemu paru je priredil točko v koordinatnem sistemu in jo vrisal v koordinatni sistem.

Lahko bi izračunal prevožene razdalje tudi za vmesne čase (med začetkom opazovanja in 1. uro, med 1. in 2., 2. in 3. uro vožnje ...). S tem bi dobil še dodatne točke za graf odvisnosti poti od časa in bi jih lahko povezal s premico.



Razišči, kaj je graf linearne funkcije.
DZ – naloga 5.3



GRAF FUNKCIJE

Graf linearne funkcije je množica vseh urejenih parov $(x, y) = (x, f(x))$, ki jih dobimo, ko spremenljivka x preteče vse vrednosti iz množice realnih števil.

Graf linearne funkcije je **premica**, ki je z dvema točkama natanko določena, zato za graf linearne funkcije zadostujeta dva urejena para $(x, f(x))$.

Rok je ugotovil, da se grafa, ki ponazarjata, kako je dolžina poti, ki jo opravita avtomobila v določenem času, odvisna od hitrosti, razlikujeta po strmini.



Ugotovi, kako na graf ali sliko linearne funkcije vplivata smerni koeficient in začetna vrednost.
DZ – naloga 5.4



POMNI

Zaradi lastne kontrole običajno izberemo tri urejene pare – tri točke.



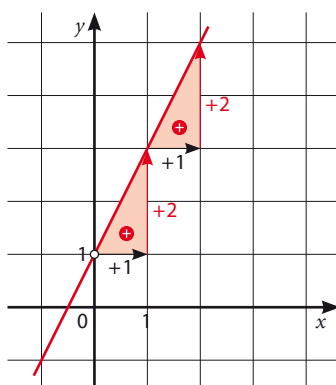
Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči, kako spremembe smernega koeficienta (k) vpliva na graf linearne funkcije in kako nanj vpliva sprememba začetne vrednosti (n).

Smerni koeficient

Smerni koeficient linearne funkcije določa strmino njenega grafa. Večji kot je smerni koeficient, bolj strm je graf naraščajoče linearne funkcije.

Ko x povečamo za 1, se vrednost y spremeni za k .

- a) Grafi linearnih funkcij, ki imajo pozitiven smerni koeficient ($k > 0$), s pozitivnim delom abscisne osi oklepajo ostri kot.

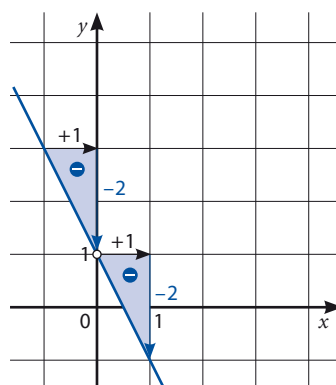


$$f(x) = 2x + 1$$

x	y
0	1
1	3
2	5

Če je $k > 0$, je graf funkcije naraščajoč.

- b) Grafi linearnih funkcij, ki imajo negativen smerni koeficient ($k < 0$), s pozitivnim delom abscisne osi oklepajo topi kot.



$$f(x) = -2x + 1$$

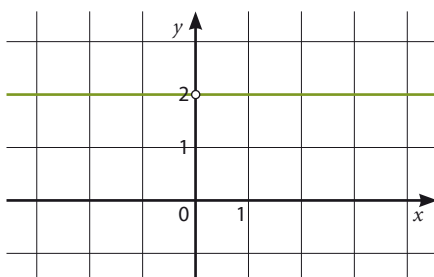
x	y
0	1
1	-1
2	-3

Če je $k < 0$, je graf funkcije padajoč.

- c) Grafi linearnih funkcij, ki imajo smerni koeficient 0, so vzporedni osi x .

$$f(x) = 2$$

x	y
0	2
1	2
2	2



Če je $k = 0$, je funkcija konstantna funkcija.



POZOR!

Ker je graf linearne funkcije vedno premica, rečemo, da je $y = k \cdot x + n$ enačba premice.

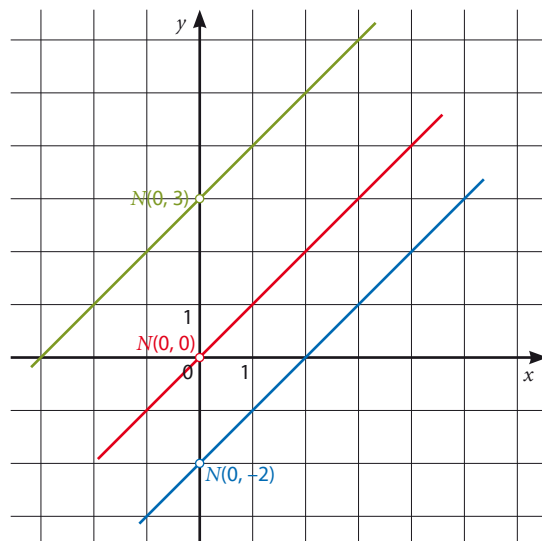
Začetna vrednost

Začetna vrednost n pove, kje graf linearne funkcije seka ordinatno os. To je vrednost funkcije pri $x = 0$. Točko, kjer graf funkcije seka ordinatno os, označimo z $N(0, n)$.

$$y = x + 3$$
$$N(0, 3)$$

$$y = x - 2$$
$$N(0, -2)$$

$$y = x$$
$$N(0, 0)$$

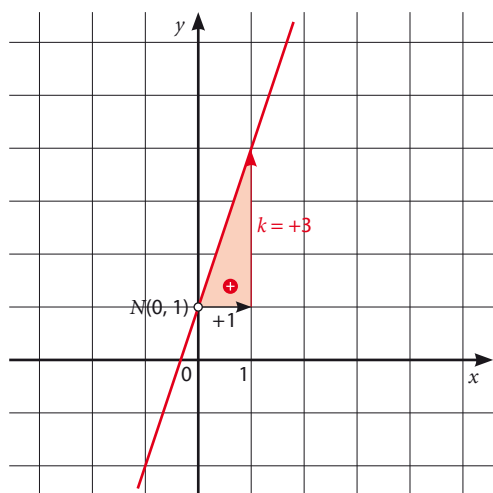


Vse tri linearne funkcije imajo enak smerni koeficient. Njihovi grafi so vzporedne premice. Vse premice, ki imajo enake smerne koeficiente, so med seboj **vzporedne** – tvorijo **snop**.

Pogosto pa moramo iz grafa linearne funkcije ugotoviti funkcijski predpis, ki ga določa.



Razišči, kako iz grafa linearne funkcije zapišemo funkcijski predpis.
DZ – naloga 5.5



Funkcijski predpis ima obliko $f(x) = k \cdot x + n$.

Začetna vrednost n pove, kje graf funkcije seka ordinatno os ($N(0, n)$) oziroma $n = f(0)$. Začetno vrednost lahko preberemo neposredno z grafa. V našem primeru je $n = 1$.

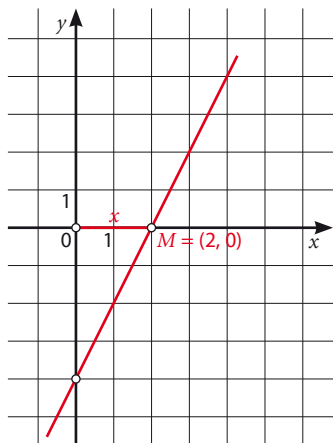
Smerni koeficient (k) pa pove, za koliko se spremeni vrednost funkcije ($f(x)$), ko x povečamo za 1. V našem primeru se vrednost funkcije poveča za 3, ko x povečamo za 1. Smerni koeficient je torej $k = 3$.

Zdaj, ko poznamo začetno vrednost in smerni koeficient, lahko zapišemo funkcijski predpis. V našem primeru je $f(x) = 3x + 1$.

Niĉla linearne funkcije

Vrednost spremenljivke x , za katero je v funkcijskem predpisu $f(x) = k \cdot x + n$, $f(x) = 0$ (vrednost linearne funkcije $y = f(x)$ je enaka 0), imenujemo **niĉla linearne funkcije**. To je toĉka $(x, 0)$, v kateri graf linearne funkcije seka abscisno os (os x). Toĉko, v kateri graf linearne funkcije seka os x , oznaĉimo z **$M(x, 0)$** . Niĉla linearne funkcije torej doloĉa odsek na abscisni osi (x osi).

$$f(x) = 2x - 4$$



Koordinato x toĉke M lahko odĉitamo z grafa, vendar obĉajno tega ne moremo narediti povsem natanĉno. Će Źelimo toĉno doloĉiti koordinato x toĉke M , v funkcijski predpis za vrednost funkcije ($f(x) = y$) vstavimo 0.

$$f(x) = 2x - 4$$

$$f(x) = 0$$

torej dobimo:

$$0 = 2x - 4$$

$$-2x = -4$$

$$x = -4 : (-2)$$

$$x = 2$$

Izraĉunali smo vrednost spremenljivke x , pri kateri je vrednost linearne funkcije $f(x) = 2x - 4$ enaka 0.

ZapiĹemo lahko koordinati toĉke M (niĉelne funkcije): $M(2, 0)$.

PreseĉiĹe dveh premic

Će dve premici, ki leŹita v isti ravnini, nista vzporedni, se nekje v tej ravnini sekata.

PoiĹimo preseĉiĹe premic $y = 2x - 1$ in $y = -x + 5$.

1. naĉin: preseĉiĹe poiĹimo z naĉrtovanjem.

NariĹimo obe premici in odĉitamo koordinati preseĉiĹa.

$$y = 2x - 1$$

x	y
0	-1
1	1
2	3
3	5

$$y = -x + 5$$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2

Koordinati toĉke S sta $x = 2$ in $y = 3$: $S(2, 3)$.

ReĹitev, ki jo dobimo na ta naĉin, je velikokrat le pribliŹna.

2. naĉin: preseĉiĹe lahko poiĹimo tudi raĉunsko, saj imamo sistem dveh linearnih enaĉb z dvema neznankama. Za reĹevanje uporabimo zamenjalni naĉin reĹevanja.

Toĉka $S(x, y)$, v kateri se premici sekata, leŹi na obeh premicah. Pri koordinati x , ki doloĉa preseĉiĹe, imata obe linearni funkciji enako vrednost ($y_1 = y_2$). Iz tega sledi:

$$2x - 1 = -x + 5$$

$$2x + x = 5 + 1$$

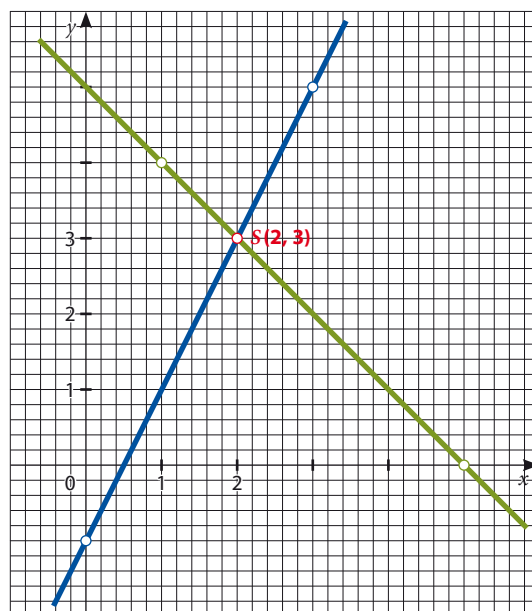
$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Dobili smo koordinato x . Zdaj izraĉunamo Źe y .

$$y = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Pri obeh funkcijah je vrednost enaka (saj doloĉamo eno samo toĉko), zato je dovolj, da izraĉunamo eno samo vrednost y . ZapiĹemo koordinati toĉke S : $S(2, 3)$.





REŠENI PRIMERI

1 Dana je linearna funkcija $f(x) = -2x + 2$.

- Nariši graf linearne funkcije in ga opiši.
- Izračunaj ničlo funkcije.

Rešitev:

- Če želimo narisati graf, moramo poiskati vsaj dve točki, ki ustrezata funkcijskemu pogoju. (Zaradi lastne kontrole raje poiščemo tri takšne točke.)

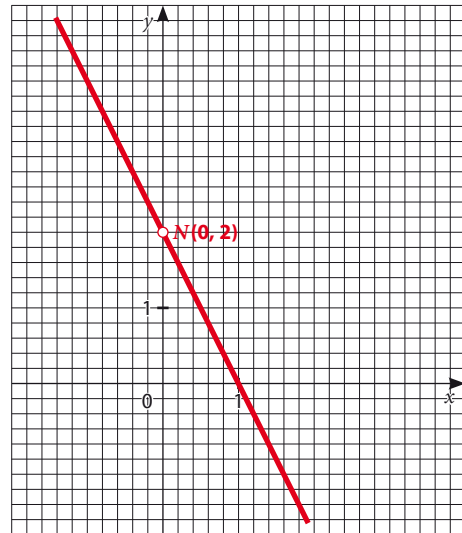
x	y
-1	4
0	2
1	0

Točke vrišemo v koordinatni sistem in skoznje potegnemo premico.

Ko opišemo graf linearne funkcije, povemo, ali raste ali pada in kje seka os y .

Graf pada ($k = -2$).

Premica seka ordinatno os v točki $N(0, 2)$.



- Ničlo linearne funkcije izračunamo tako, da za vrednost funkcije (y) vstavimo 0.

$$0 = -2x + 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Ničla funkcije je točka $M(1, 0)$.

2 Ugotovi, ali točki $A(2, 4)$ in $B(-1, 1)$ ležita na grafu linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$.

Rešitev:

Točka $A(2, 4)$ leži na grafu linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$, če je vrednost linearne funkcije (y) pri $x = 2$ enaka 4 (koordinati točke). Za funkcijo $f(x) = 3x - 2$ torej izračunamo $f(2)$.

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

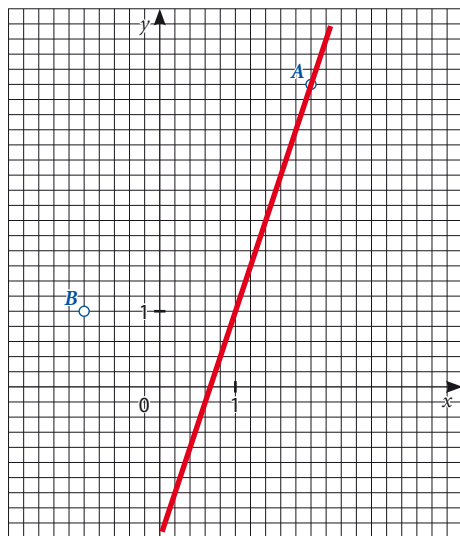
Ker je vrednost linearne funkcije pri $x = 2$ enaka 4, točka $A(2, 4)$ leži na grafu funkcije.

Točka $B(-1, 1)$ leži na grafu linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$, če je vrednost funkcije pri $x = -1$ enaka 1.

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$$

Ker vrednost linearne funkcije pri $x = -1$ ni enaka 1, točka $B(-1, 1)$ ne leži na grafu te funkcije.

Nalogo lahko rešimo tudi tako, da narišemo graf linearne funkcije, vrišemo obe točki in na grafu preverimo, ali poteka skozi dani točki.



x	y
-1	-5
0	-2
1	1

Ugotovimo, da točka A leži na grafu, točka B pa ne leži na njem.

3 Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna premici $y = 3x - 4$ in poteka skozi točko $A(2, 8)$.

Rešitev: Enačba premice ima obliko $y = k \cdot x + n$. Vemo, da imata vzporedni premici enak smerni koeficient k . Premica, ki jo iščemo, bo torej imela smerni koeficient (k) enak 3.

Ker točka $A(2, 8)$ leži na premici, ki jo iščemo, je $f(2) = 8$.

Če upoštevamo: $k = 3$

$$x = 2$$

$$y = 8$$

dobimo: $8 = 3 \cdot 2 + n$

$$-n = 6 - 8$$

$$-n = -2$$

$$n = 2$$

Da dobimo enačbo premice, moramo vstaviti k in n :

$$y = 3x + 2$$



NALOGE ZA VAJO

1 Nariši linearno funkcijo in jo opiši.

Odčitaj koordinate presečišča funkcije z osema x in y .

Z računom preveri pravilnost odčitanih koordinat presečišč z osema x in y .

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = -x + 3$ č) $f(x) = x - 2$

d) $f(x) = -2x$ e) $f(x) = \frac{x}{2} + 2$

f) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$ g) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 1$

2 Zapiši linearno funkcijo, če poznaš smerni koeficient in začetno vrednost, in jo nariši.

a) $k = 2, n = 1$ č) $k = -2, n = 2$

b) $k = -1, n = -2$ d) $k = \frac{1}{2}, n = 3$

c) $k = 3, n = 0$ e) $k = \frac{1}{3}, n = -2$

3 Izpiši tiste linearne funkcije, ki so naraščajoče.

Določi jim koordinati točke N in jih nariši.

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = -x + 4$

c) $f(x) = -3x - 6$ č) $f(x) = x + 5$

d) $f(x) = 3x$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$

4 Na isti koordinatni sistem nariši graf tiste funkcije, ki je najbolj strma, in tiste, ki je najmanj strma. Svojo izbiro utemelji.

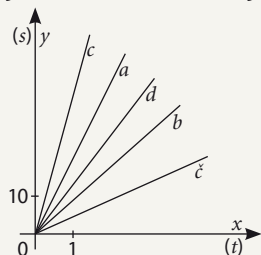
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = 3x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ č) $f(x) = x + 4$

d) $f(x) = -2x + 6$ e) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 5$

- 5 Razmisli in smiselno določi, kateri graf pripada določenim potnikom. Svojo odločitev utemelji.

- a) kolesar
b) potnik v letalu
c) pešec
č) potnik na trajektu
d) potnik v avtomobilu



- 6 Ugotovi, ali točke ležijo na grafu linearne funkcije. Nalogo reši računsko in grafično.

- a) $f(x) = 4x - 3$ $A(2, 5), B(3, 15), C(0, 3), D(-2, -11)$
b) $f(x) = -2x - 1$ $A(3, -7), B(-1, 1), C(2, -3), D(0, -1)$
c) $f(x) = -x + 3$ $A(0, 3), B(1, 4), C(-2, 5), D(5, -2)$
č) $f(x) = x + 4$ $A(-1, 5), B(2, 6), C(-3, 1), D(7, 11)$
d) $f(x) = 3x$ $A(3, 6), B(-2, -6), C(0, 3), D(1, 3)$
e) $f(x) = \frac{x}{2} - 6$ $A(2, -5), B(-2, -7), C(0, -6), D(6, 3)$

- 7 Poišči vrednosti neznanih koordinat, če vse točke ležijo na grafu linearne funkcije $y = -2x + 5$.

$A(2, y), B(-3, y), C(x, 4), D(x, 9), E(\frac{1}{2}, y), F(x, 0)$

- 8 V trgovini kupiš 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg sadja po 0,60 €. Ob vsakem nakupu ti zaračunajo vrečko, ki stane 6 centov. Zapiši, koliko plačaš pri posameznem nakupu. Sestavi tabelo, zapiši funkcijski predpis in nariši graf. Kaj je v nalogi koeficient in kaj začetna vrednost?

- 9 V vedro točimo vodo iz vodovodne pipe. Na začetku je v vedru 3 l vode. Vsako minuto pri-teče iz pipe 2 l vode. Zapiši, kako se spreminja količina vode v vedru. Sestavi tabelo, zapiši funkcijski predpis in nariši graf. Kaj je v nalogi koeficient in kaj začetna vrednost?

- 10 Izračunaj k v enačbi premice $y = k \cdot x - 4$, tako da bo točka $T(-2, -6)$ na premici.

ZMOREM TUDI TO

- 11 V enačbi premice $y = k \cdot x + 2$ določi k tako, da bo točka $T(3, 11)$ na premici. Rešitev preveri grafično.

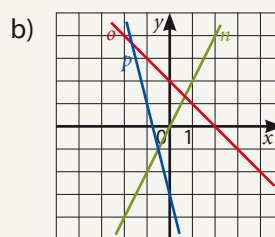
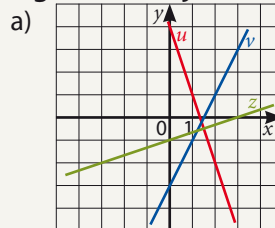
- 12 Zapiši enačbo premice, ki poteka skozi izbrano točko in je vzporedna dani premici. Dobljene premice tudi nariši.

- a) $f(x) = 2x - 4$ $A(3, 4)$
b) $f(x) = x + 3$ $B(2, -3)$
c) $f(x) = -3x - 5$ $C(1, 2)$
č) $f(x) = -2x + 1$ $G(-2, 1)$

d) $f(x) = -x - 2$ $D(3, -2)$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ $E(4, 0)$

- 13 Z grafa odčitaj enačbo premice.



- 14 Razišči, kako se spremenijo funkcijski predpisi, če dano premico prezrcalimo čez os y oziroma čez os x .

- a) $y = 2x - 2$ b) $y = -3x + 6$
c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

- 15 Izračunaj obseg in ploščino trikotnika, ki ga premica tvori s koordinatnima osema.

- a) $y = 2x - 6$ b) $y = -4x + 8$
c) $y = -3x - 9$ č) $y = x + 7$

- 16 Grafično določi presečišče premic in rezultat preveri z računom.

- a) $y = x - 3$ in $y = 2x - 5$
b) $y = -3x + 5$ in $y = x + 1$
c) $y = -x - 3$ in $y = 3x + 5$
č) $y = -2x + 8$ in $y = x - 4$
d) $y = \frac{1}{2}x + 2$ in $y = -\frac{1}{2}x + 4$
e) $y = 2$ in $y = 2x$

- 17 Zapiši enačbo premice, ki seka ordinatno os v točki $N(0, 5)$, premico $y = 2x + 1$ pa v točki $A(1, 3)$.

- 18 Z uporabo ustreznega računalniškega programa razišči:

- a) kakšna je lega premic $y = 2x + n$, ko n preteče vrednosti od -3 do 3 s korakom 1 ;
b) kakšna je lega premic $y = k \cdot x - 1$, ko k preteče vrednosti od -2 do 4 s korakom 1 .

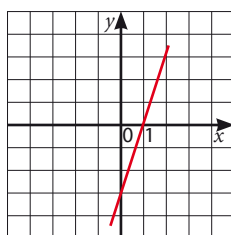
- 19 Zapiši enačbo premice, ki je vzporedno premici $y = 3x - 4$ in poteka skozi presečišče premic $y = -x + 6$ in $y = 2x$.

- 20 Premica poteka skozi dani točki. Razišči, kako se glasi enačba premice. (Pomagaj si z grafom; lahko uporabiš tudi ustrezní računalniški program).

- a) $A(2, 4)$ in $B(-1, -5)$
b) $K(1, 3)$ in $L(3, 1)$
c) $P(2, 3)$ in $R(-4, 0)$



- 4T **1** Izpiši smerni koeficient in začetno vrednost pri danih linearnih funkcijah.
a) $y = 4x - 8$ b) $y = -3x + 6$
- 6T **2** Zapiši linearno funkcijo, če poznaš k in n , in jo nariši.
a) $k = 3$; $n = -2$ b) $k = -1$; $n = 5$
- 4T **3** Izračunaj vrednost linearne funkcije $f(x) = 2x - 6$ pri $x = 4$ in pri $x = -2$.
- 4T **4** Dane funkcijske predpise zapiši z matematičnim izrazom.
a) vrednost y je za 5 manjša od trikratnika števila x .
b) vrednost y je za 3 večja od polovice števila x .
c) vrednost $f(x)$ je za $\frac{2}{3}$ večja od nasprotne vrednosti števila x .
č) vrednost $f(x)$ je dvakratnik kvadrata števila x .
- 2T **5** Izračunaj, pri kateri vrednosti spremenljivke x je vrednost linearne funkcije $f(x) = 3x - 7$ enaka 5.
- 4T **6** Ugotovi, ali točki $A(2, 1)$ in $B(-1, 3)$ ležita na premici $y = -2x + 5$.
- 4T **7** a) Nariši premico $y = 2x - 4$.
2T b) Odčitaj koordinati presečišč z obema koordinatnima osema.
2T c) Koordinati točke M preveri z računom.
- 3T **8** Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna premici $y = -3x + 5$ in poteka skozi točko $T(2, 3)$.
- 3T **9** Grafično določi presečišče premic $y = 2x - 3$ in $y = -x + 3$. Rezultat preveri računsko.
- 2T **10** Z grafa odčitaj enačbo premice.



Možnih je 40 točk.



Špela **na poti k vrhu** (30–35).



Špela **dodatno trenira** (20–23).



Špela **blesti** (36–40).



Špela **na dobri poti** (24–29).



Špela **išče pomoč** (manj kot 20 točk).

ROK IN ŠPELA

6. DEL



NEKOČ IN DANES

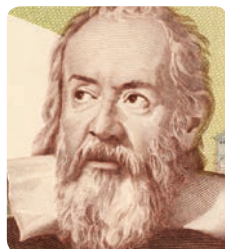
Egipčani so se že 3500 let pr. n. št. zabavali z igro met kamna, ki je podobna **igri met** kovanca.

Antični filozofi so se že ukvarjali z verjetnostjo dogodkov npr. **Ciceron** leta 44 p. n. št. v delu De divinatione.



Matematik in profesor medicine **Girolamo Cardano** (1501–1576) je napisal knjigo, v kateri obravnava igre na srečo.

Galileo Galilei (1564–1642) je kmalu zatem predstavil problem o metu kock.



Problem meta treh kock je opisal tudi **Dante** v Božanski komediji.

Leto 1654 lahko štejemo za **začetek verjetnostnega računa**, ko je francoski vitez Cavaliere de Mere za pomoč pri stavah pri igrh na srečo prosil matematika **Blaisa Pascala** (1623–1662) in **Pierra de Fermata** (1601–1665).

Tabula II.
Omnino Similes.
666 555 444 333 222 111
Duo Similes et tertius distinctus.
665 664 663 662 661
556 554 553 552 551
446 445 443 442 441
336 335 334 332 331
226 225 224 223 221
116 115 114 113 112
Omnino Distinctus Continui.
654 543 432 321
Discontinui.
642 531 641 631
Duo Continui et tertius discontinui.
653 652 651 641 521 431
542 541 643 431 632 532

Tabula III.
Quot Punctaturae et quot Cadenas habet quilibet numerus a copolitionem.
3 18 Punctaturae 1 Cadenas 1
4 17 Punctaturae 1 Cadenas 3
5 16 Punctaturae 2 Cadenas 6
6 15 Punctaturae 3 Cadenas 10
7 14 Punctaturae 4 Cadenas 15
8 13 Punctaturae 5 Cadenas 21
9 12 Punctaturae 6 Cadenas 28
10 11 Punctaturae 6 Cadenas 27

Slonokoščena igralna kocka, najdena pri ostankih rimske utrdbe na meji med Anglijo in Škotsko. Uporabljali so jih vojaki za krajšanje časa.



Beseda **statistika** ima izvor v latinski besedi status, ki pomeni stanje, razmere, državo. Prve »statistične« raziskave so bile namreč **ljudska štetja**.

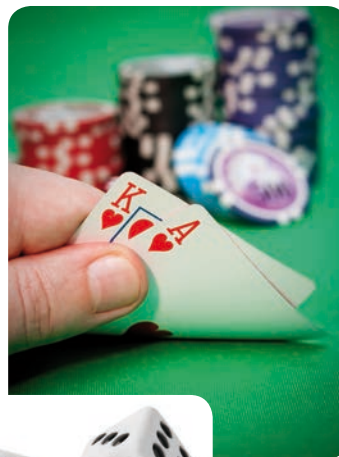
Kot **veda** se je začela razvijati v 17. stoletju. Anglež **John Graunt** je med prvimi sistematično zbiral podatke, in sicer o smrtnosti v različnih angleških mestih. 1885 je bil v Londonu ustanovljen **Mednarodni inštitut za statistiko**.

OBDELAVA PODATKOV



- 1 SREDNJE VREDNOSTI
 - 2 VERJETNOST
 - 3 VPRAŠALNIKI IN EMPIRIČNA PREISKAVA
- ŠPELA SE PREIZKUSI

Statistika je danes eno pomembnejših orodij za raziskovanje v različnih znanostih, kot npr.: biologija, sociologija, psihologija, ekonomija, meteorologija ...



1 SREDNJE VREDNOSTI

Izvedel boš:

- kako izračunaš aritmetično sredino,
- kako določiš modus, mediano in medčetrtnski razmik,
- kako narišeš škatlasti diagram.



Pri Špelinem sošolcu Nacetu so imeli požar. Pogorela je cela hiša. Sosedje so hitro zbrali nekaj denarja za nakup osnovnih potrebščin. V evrih so prispevali takole: 120, 100, 120, 100, 80, 100, 150, 80, 120, 150, 140, 130, 150, 180, 110, 150, 70.

RAZMISLI

Koliko evrov je povprečno prispeval posameznik?
Kolikšna je višina zneska, ki ga je prispevalo največ sosedov?
Kolikšen je znesek, od katerega je polovica večjih in polovica manjših zneskov?



Samostojno določi aritmetično sredino.
DZ – naloga 6.1

Aritmetična sredina

Izračunajmo, koliko je v povprečju prispeval vsak sosed. Najprej izračunajmo **vsoto vseh** zneskov.

$$120 + 100 + 120 + 100 + 80 + 100 + 150 + 80 + 120 + 150 + 140 + 130 + 150 + 180 + 110 + 150 + 70 = 2050$$

Dobljeno vsoto **delimo** s **številom vseh** zneskov.

$$2050 : 17 = 120,588... \approx 121$$

Dobili smo **aritmetično sredino** (označimo jo z $\bar{x}$). V našem primeru je

$$\bar{x} = 121,$$

torej je vsak izmed sosedov prispeval povprečno po 121 €.

Za opisne podatke ne določamo aritmetične sredine: če ima Špela rdečo jopico in modre hlače, ne moremo določiti povprečne barve njenih oblačil.



POZOR!

Aritmetično sredino računamo le za številske podatke.



ARITMETIČNA SREDINA

Aritmetična sredina ali **povprečje** ($\bar{x}$) je količnik med vsoto vseh vrednosti podatkov in številom vseh podatkov.

Modus

Kolikokrat se pojavijo posamezni zneski? Kateri znesek se pojavi največkrat?

Vse zneske razvrstimo po velikosti od najmanjšega do največjega.

70 80 80 100 100 100 110 120 120 120 130 140 150 150 150 150 180

2-krat 3-krat 3-krat 4-krat

Kar nekaj zneskov se pojavi 1-krat, znesek 80 € se pojavi 2-krat, zneska 100 € in 120 € se pojavita po 3-krat, znesek 150 € se pojavi 4-krat (največkrat).

Število ponovitev posameznega podatka imenujemo **frekvenca**. Največkrat ponovljeni podatek je **modus** (označimo z Mo). V našem primeru je $Mo = 150$. Frekvenca podatka 150 je 4.



POZOR!

Modus določamo tudi za opisne podatke.



MODUS

Modus ali **gostiščnica** (Mo) je podatek, ki se med vsemi podatki največkrat pojavi (ima največjo frekvenco).



POMNI

Polovica podatkov je manjših, polovica pa večjih od mediane.

Mediana

Kateri znesek je točno **na sredini** med zneski urejenimi po velikosti?

70 80 80 100 100 100 110 120 120 120 130 140 150 150 150 150 180

$\frac{1}{2}$ podatkov Me $\frac{1}{2}$ podatkov

Točno na sredini leži znesek **120** €, polovica zneskov je manjših ali enakih od njega, polovica zneskov je večjih ali enakih od njega. Temu podatku rečemo **mediana** (označimo z Me). V našem primeru je $Me = 120$.



MEDIANA

Mediana ali **središčnica** (Me) je sredinski podatek med podatki, ki so urejeni po velikosti. Pri sodem številu podatkov je mediana povprečje srednjih dveh podatkov.



Samostojno določi modus in mediano za meta žogice.
DZ – naloga 6.2

Aritmetično sredino, modus in mediano imenujemo **merila za sredino** ali **srednje vrednosti**. Smiselno jih je določati pri večjem številu podatkov. Ker ima vsaka med njimi določene pomanjkljivosti, bi bilo najbolje vedno izračunati vse tri.

Aritmetična sredina je zelo občutljiva za ekstremne vrednosti, računamo jo le za številske podatke.

Modusa v nekaterih nizih podatkov ne moremo določiti, v nekaterih pa je lahko tudi več modusov. Modus lahko določamo tudi za opisne podatke.

Mediana je najmanj občutljiva za ekstremne vrednosti.

Merila za sredino povedo tipično ali osrednjo vrednost podatkov. Včasih je takšna informacija premalo natančna. Poglejmo si to na primeru bolnika, ki si je trinajst zaporednih dni meril krvni tlak.



dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
krvni tlak (mm Hg)	122	98	160	122	107	158	165	132	85	88	122	95	162

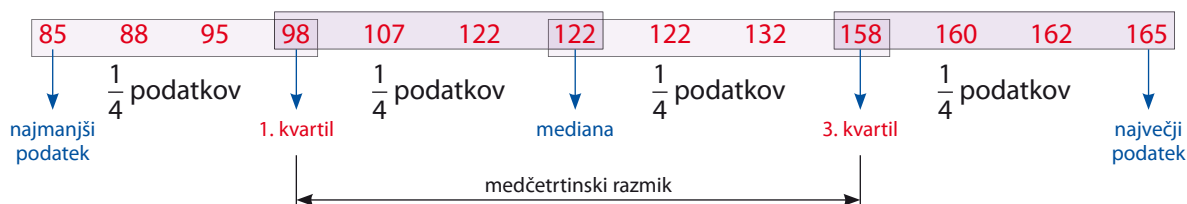
Najpogostejša vrednost (modus) je zavajajoča, saj je največkrat izmerjeni tlak normalen (122 enot), nekatere meritve pa pokažejo izrazito visoke in izrazito nizke vrednosti. Prav tako zavaja tudi povprečna vrednost (aritmetična sredina), saj je povprečje visokih in nizkih vrednosti krvnih tlakov normalen krvni tlak (124 enot). Sredinski podatek (mediana) pa sploh ne pove kaj dosti o nihanju krvnega tlaka. Sama srednja vrednost nabora podatkov včasih težko povzame značilnosti celega nabora.



Razišči razpršenost podatkov.
DZ – naloga 6.3

Razpršenost podatkov

V naboru podatkov določimo razliko med največjo in najmanjšo vrednostjo. To razliko imenujemo **variacijski razmik**, ki znaša za naš primer 80 ($165 - 85 = 80$). Kadar so podatki zelo razpršeni, posebej opišemo, kako so razpršeni. To ugotovimo tako, da ob mediani, ki razdeli podatke v dve skupini, (ki imata po 7 podatkov, ker mediano štejemo k vsaki skupini podatkov), določimo še mediano prve polovice podatkov (1. kvartil) in mediano druge polovice podatkov (3. kvartil) ter izračunamo njuno razliko.



V našem primeru je 1. kvartil 98, 3. kvartil 158 in medčetrtinski razmik 60 ($158 - 98$).



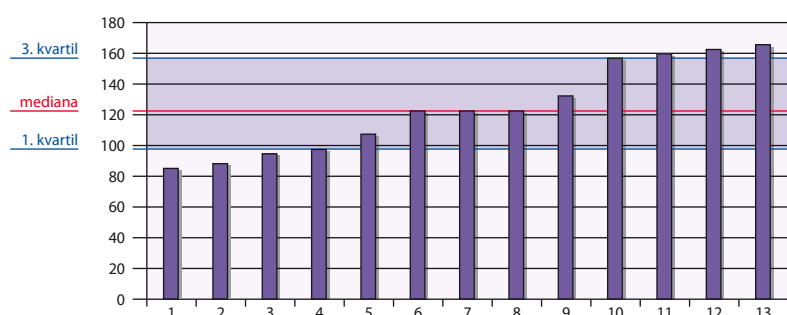
MERILA RAZPRŠENOSTI

Mediano prve polovice podatkov imenujemo **prvi kvartil**.

Mediano druge polovice podatkov imenujemo **tretji kvartil**.

Medčetrtnski razmik je razlika med 3. kvartilom in 1. kvartilom. Vključuje polovico sredinskih podatkov. Večji medčetrtnski razmik pomeni večjo razpršenost podatkov.

Razpršenost podatkov prikažimo še na stolpcnem diagramu.



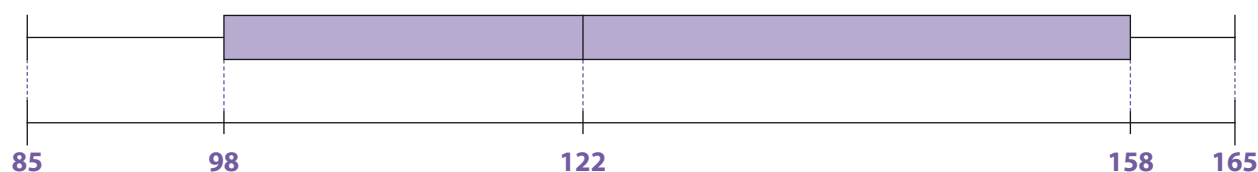
POMNI



Namesto diagrama s stolpci narišemo škatlasti diagram – diagram kvartilov, ki ponazarja razpršenost rezultatov. Najprej na številskem poltraku prikažemo vse izmerjene vrednosti tlakov.



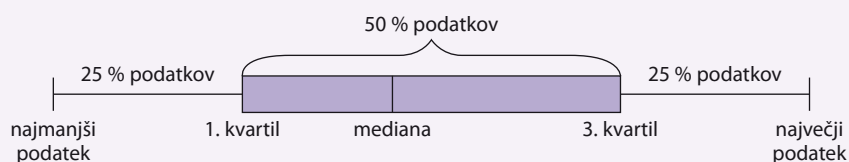
Označimo najmanjši rezultat, 1. kvartil, mediano, 3. kvartil in največji rezultat in nad številskim poltrakom narišemo pravokotnik med 1. in 3. kvartilom. Na vsako stran pravokotnika narišemo daljico do najmanjšega in do največjega rezultata.



ŠKATLA Z BRKI

Škatlo z brki (ali škatlasti diagram) tvorijo:

1. pravokotnik nad številskim poltrakom, ki označuje območje med 1. in 3. kvartilom,
2. navpična črta v pravokotniku, ki označuje mediano,
3. vodoravni daljici na vsaki strani pravokotnika do najmanjšega oz. največjega podatka.





REŠENI PRIMERI

1 Fantje so skakali v daljavo in zapisovali svoje dosežke v metrih:

2,7 0,8 2,9 2,7 3,0 2,7 2,9 2,7 2,4.

- Kolikšna je povprečna dolžina skoka?
- Katero daljavo je skočilo največ učencev?
- Kolikšna je mediana dolžin skokov?
- Izračunaj mediano za skoke: 1,4 1,6 1,6 1,8 2,0 2,0 2,2 2,2



Rešitev:

Najprej podatke uredimo po velikosti:

0,8 2,4 2,7 2,7 2,7 2,7 2,9 2,9 3,0

- Izračunajmo aritmetično sredino ali povprečje. Uporabimo žepno računalno.

$$\bar{x} = (0,8 + 2,4 + 2,7 + 2,7 + 2,7 + 2,7 + 2,9 + 2,9 + 3,0) : 9 = 22,8 : 9 = 2,5$$

Povprečna dolžina skoka je bila **2,5** metra.

Zaradi dolžine 0,8 m je povprečna dolžina skoka precej manjša – pomaknjena v levo. Če bi imeli le osem podatkov (brez podatka 0,8), bi bila aritmetična sredina 2,75, torej precej bolj na sredini. Podatku 0,8 v tem primeru pravimo **osamelec** – saj se močno razlikuje od preostalih podatkov.

- Med podatki poiščemo tistega, ki se **največkrat pojavi**.

0,8 2,4 **2,7 2,7 2,7 2,7** 2,9 2,9 3,0

Največ učencev je skočilo 2,7 metra, torej je **modus** enak **2,7** (podatek ima največjo frekvenco – pojavi se štirikrat).

- Med podatki, ki so urejeni po velikosti, poiščemo **sredinski podatek**.

0,8 2,4 2,7 2,7 **2,7** 2,7 2,9 2,9 3,0

Mediana dolžin skokov je **2,7** metra (med devetimi podatki je sredinski peti podatek). Štirje skoki so bili enaki ali krajši od 2,7 metra, štirje skoki pa so bili enaki ali daljši od 2,7 metra.

- Med danimi podatki sta dva sredinska podatka:

1,4 1,6 1,6 **1,8 2,0** 2,0 2,2 2,2.

Izračunajmo povprečje $(1,8 + 2) : 2 = 1,9$ **Mediana** danih podatkov je **1,9 metra**.

2 Špela je metala kocko, Rok pa je zapisoval in po velikosti uredil število padlih pik:

- 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6
- 1, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 6
- 1, 2, 3, 4, 5, 6

Špela in Rok sta si ogledala zapiske in modrovala: Modus je lahko eden, lahko sta dva ali več, ali pa modusa sploh ni. Ali je njuna trditev pravilna?

Rešitev:

DA, trditev je pravilna.

V primeru a) je natanko en modus – to je 2.

V primeru b) sta dva modusa, saj se podatka 3 in 5 pojavita po trikrat.

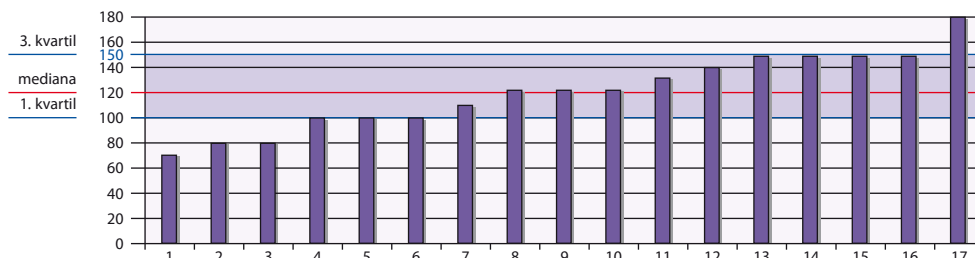
V primeru c) ni modusa, saj se vsi podatki pojavijo enako pogosto – po enkrat.

Podatek 2 se pojavi 3-krat.

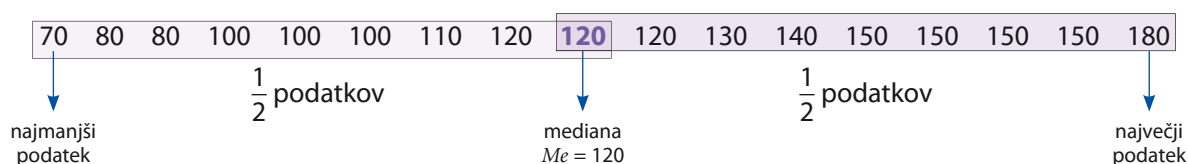
- 3 a) Za uvodno nalogo na strani 184 nariši stolpčni diagram, na njem označi mediano.
b) Na diagramu označi 1. kvartil in 3. kvartil ter izračunaj medčetrtnski razmik in nariši škatlo z brki.

Rešitev:

a)

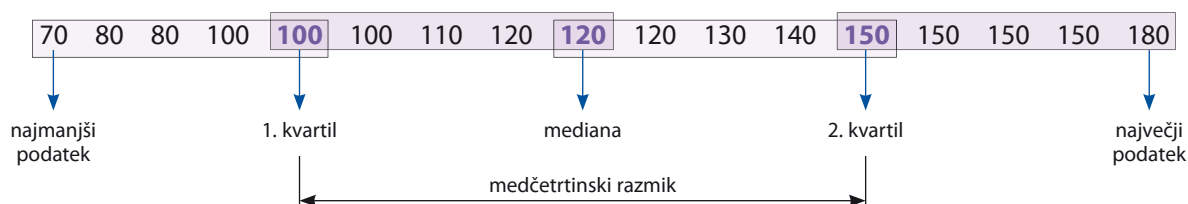


Med urejenimi podatki določimo mediano.



Mediana je vse podatke razdelila v dve skupini (ki imata po 9 podatkov, ker mediano štejemo k vsaki skupini podatkov).

b) Poiščemo mediano prve polovice podatkov (1. kvartil) in mediano druge polovice podatkov (3. kvartil).

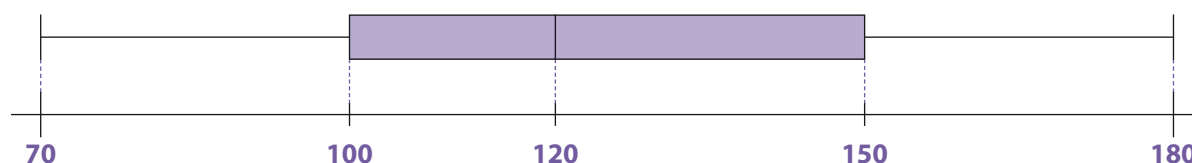


Medčetrtnski razmik je razlika med 3. kvartilom in 1. kvartilom in je enak 50 ($150 - 100 = 50$).

Za izdelavo škatlastega diagrama na številske poltraku prikažemo vse vrednosti zneskov, označimo najmanjši rezultat, 1. kvartil, mediano, 3. kvartil in največji rezultat.



Nad številske poltraku narišemo pravokotnik med 1. in 3. kvartilom in na vsako stran pravokotnika daljico do najmanjšega in do največjega rezultata.



**1 Določi aritmetično sredino podatkov. Rezultat preveri z žepnim računalom.**

a) 1,7; 3,21; 6,4; 2,5; 1,27

b) $1\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$; $1\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$ **2 Na osnovni šoli Modrost bodo vseh 450 učencev odpeljali z avtobusi na ogled operne predstave.**

a) Koliko avtobusov so naročili, če so naročili najmanjše možno število avtobusov in če sta v vsakem avtobusu dva spremljevalca, število potnikov v vsakem avtobusu pa je največ 42? Odgovor utemelji.

b) Kolikšno je lahko najmanjše/največje število učencev v enem avtobusu, če so spremljevalci določeni glede na normativ po en spremljevalec za vsakih 15 učencev?

3 Enajst otrok iz 9.a ima modre oči, sedem jih ima rjave, deset pa zelene. Kakšne barve oči imajo v povprečju učenci iz 9.a? Svoj odgovor pojasni.**4 Po naslednjem vzorcu tvori zaporedje in izračunaj vsote: 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 ...**

a) Razišči, kolikokrat se posamezna številka v vsoti pojavi na mestu enic, če zapišeš prvih sto primerov v vzorcu.

b) Določi modus za ponavljajoče se številke na mestu enic iz primera a.

c) Na katero številko se konča 523. člen zaporedja vsot in 1257. člen zaporedja vsot?

5 Razišči.

a) Špela trdi, da se od ponedeljka do petka uči povprečno 4 ure na dan. V soboto in nedeljo se ne uči. Napovej dva različna tedna učenja za Špelo po dnevih.

b) Od ponedeljka do petka si zapisuj, koliko minut na dan se učiš. Nato izračunaj, koliko minut si se povprečno učil na dan.

c) Od ponedeljka do petka si zapisuj, koliko minut dnevno porabiš za pisanje domače naloge. Izračunaj, koliko minut si povprečno porabil na dan za pisanje naloge.

č) Od ponedeljka do nedelje si zapisuj, koliko minut si dnevno porabil za gledanje televizije. Izračunaj, koliko minut v povprečju gledaš televizijo na teden.

6 Špela je opazovala število potnikov v avtomobilih in podatke zapisala v preglednico.

št. potnikov v avtomobilu	1	2	3	4	5
št. avtomobilov	83	51	35	17	2

a) Koliko potnikov je najpogostejše sedelo v avtomobilu? Kakšno ime ima srednja vrednost, ki nam to pove?

b) Določi še drugi dve srednji vrednosti in pojasni njen pomen.

7 Rok je meril majske temperature in podatke zapisoval v preglednico.

dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
temp.	15	20	22	23	20	22	17	15	18	23	24	26	28	29	26	26	24	23	26	25

dan	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.	31.
temp.	26	23	24	28	30	29	26	30	32	29	30

Izračunaj vse tri srednje vrednosti in pojasni njihov pomen.

8 Pri učitelju matematike dobiš ocene pri zadnjem pisnem ocenjevanju znanja.

Določi vse tri srednje vrednosti in pojasni njihov pomen.

9 Pri nalogi uporabi žepno računalno. Učenci 9.a in 9.b razreda so pri metu krogle dosegli naslednje rezultate (v metrih):

deklice	6,00	7,90	3,60	6,25	6,80	7,30	4,45
	5,60	5,00	6,70	4,25	5,65	4,00	7,15
	7,30	5,80	2,75	6,25	5,15	3,45	7,60
dečki	6,45	4,80	7,50	4,05	6,95	4,50	5,70
	3,50	6,60	7,00	7,15	7,50	5,60	3,25
	4,20	7,30	5,45	7,90	4,20	5,90	5,40
	5,55	7,40	3,40	6,20	5,80	7,05	5,00

a) Določi vse tri srednje vrednosti za met krogle pri deklicah.

b) Določi medčetrtnski razmik in nariši škatlo z brki za met krogle pri deklicah.

c) Določi vse tri srednje vrednosti za met krogle pri dečkih.

č) Določi medčetrtnski razmik in nariši škatlo z brki za met krogle pri dečkih.

d) Ugotovi, ali so podatki bolj razpršeni pri deklicah ali pri dečkih.

10 Pri nalogi uporabi žepno računalno in preglednico. Učitelja športne vzgoje prosi, naj ti pokaže podatke, ki so jih učenci in učenke 9. razreda dosegli pri skoku v daljavo na vaši šoli.

a) Določi vse tri srednje vrednosti za dolžino skoka v daljavo pri deklicah.

b) Določi medčetrtnski razmik in nariši škatlo z brki za dolžino skoka v daljavo pri deklicah. Ali so rezultati močno razpršeni?

c) Določi vse tri srednje vrednosti za dolžino skoka v daljavo pri dečkih.

č) Določi medčetrtnski razmik in nariši škatlo z brki za dolžino skoka v daljavo pri dečkih. Ali so rezultati močno razpršeni?

2 VERJETNOST

Izvedel boš:

- kaj je poskus, kaj je dogodek,
- kdaj je dogodek slučajen, kdaj je gotov in kdaj nemogoč,
- kako določiš frekvenco dogodka in kako relativno frekvenco,
- kako določiš verjetnost dogodka,
- kaj je matematična in kaj empirična verjetnost.

K Špelinim staršem je prišla na obisk družina s šestletno Anjo. Špela je zabavala Anjo tako, da sta igrali Človek ne jezi se. Anja je igro izgubila, postala slabe volje in prosila, da se igrata brez igralne kocke. Špela se je domislila igro z vlečenjem kroglic, tako da je v vrečko iz blaga položila 4 bele in 4 rdeče kroglice. Vsaka udeleženka izvleče kroglico, zapiše barvo in kroglico vrne nazaj. Zmaga po desetih poskusih pripade tisti, ki večkrat potegne belo kroglico.

RAZMISLI

Ali lahko pri metu kocke že takoj pade 6 pik?
Ali bo pri igri s kroglicami Anja zagotovo uspešnejša od Špele?



Ugotovi, kaj je poskus in kaj dogodek.
DZ – naloga 6.4



Poskus, dogodek

Ko igramo igro Človek ne jezi se, mečemo pošteno igralno kocko. Vsak met kocke je ena ponovitev poskusa. Pravila, po katerih izvajamo poskus, morajo biti natančno določena in vedno enaka. Če se spremeni eno od pravil, dobimo že drug poskus.



POSKUS

Poskus je dejanje, ki ga opravimo po vnaprej natanko določenih navodilih. Poskus se vedno dogaja pod enakimi, natančno določenimi pogoji.

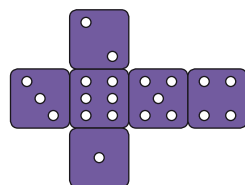


POMNI

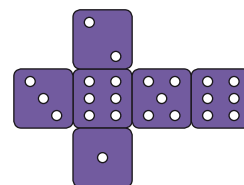
Dogodke običajno označujemo z velikimi tiskanimi črkami z začetka abecede: A, B, C ...

Pri izvajanju poskusa »vrzi pošteno igralno kocko« se lahko zgodi:

- dogodek A: »pade 1 pika« ali
- dogodek B: »padeta 2 piki« ali
- dogodek C: »padejo 3 pike« ali
- dogodek D: »padejo 4 pike« ali
- dogodek E: »pade 5 pik« ali
- dogodek F: »pade 6 pik«.



poštena igralna kocka



nepoštena igralna kocka

Našteti dogodki niso sestavljeni. Nesestavljen dogodek imenujemo **elementarni dogodek** ali **izid**. Pri metu igralne kocke imamo tako 6 različnih elementarnih dogodkov.

Dogodek pa lahko sestavlja tudi več elementarnih dogodkov. Tak dogodek imenujemo **sestavljen dogodek**. Sestavljen dogodek se da izraziti kot vsota vsaj dveh med seboj nezdružljivih elementarnih dogodkov.

Dogodek A : »pade sodo število pik« je sestavljen iz treh elementarnih dogodkov: dogodka A_1 : »padeta 2 piki«, dogodka A_2 : »padejo 4 pike« in dogodka A_3 : »pade 6 pik«.



DOGODEK

Dogodek je pojav, ki se pri izvajanju poskusa lahko zgodi (ali pa tudi ne). **Elementaren dogodek** ali **izid** je nesestavljen dogodek (npr. pri metu kocke padeta 2 piki).



Razišči vrste dogodkov.
DZ – naloga 6.5



POZOR!

Dogodke vedno proučujemo le v okviru natanko določenega poskusa.

Vrste dogodkov

Pri metanju igralne kocke, ki ima 6 enakih ploskev, je možnost, da pade 6 pik (1 pika ...), ena izmed šestih enakovrednih izidov. Kolikšna je možnost, da iz skledi na slepo izvlečemo kroglico določene barve, pa je odvisno od tega, kakšne kroglice so v skledi.

Če bi imeli v skledi same **rumene kroglice**, bi bila na slepo izvlečena kroglica vedno **rumene barve**. Takšen dogodek imenujemo **gotov dogodek** in ga označimo s črko G .



Če bi imeli v skledi same **bele kroglice**, bi bila na slepo izvlečena kroglica vedno bele barve in **nikoli** ne bi potegnili kroglice **rumene barve**. Dogodek, ki se v ponovitvah poskusa nikoli ne zgodi imenujemo **nemogoč dogodek** in ga označimo s črko N .



Ker so v skledi 4 rumene in 4 bele kroglice, je naključno izvlečena kroglica ali rumene ali pa bele barve. Izbor barve bi bil naključen – slučajen, zato rečemo, da je takšen dogodek **slučajen dogodek**. Pred posameznim poskusom ne moremo z gotovostjo napovedati, ali se bo slučajen dogodek zgodil. Tako ne moremo vnaprej vedeti, ali se bo dogodek A : »izvlečena kroglica je bele barve« zgodil ali ne.





VRSTE DOGODKOV

Gotov dogodek je dogodek, ki se zgodi ob vsaki ponovitvi poskusa. Verjetnost gotovega dogodka je enaka 1.

Nemogoč dogodek je dogodek, ki se ne zgodi ob nobeni ponovitvi poskusa. Verjetnost nemogočega dogodka je 0.

Slučajen dogodek je dogodek, ki se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri drugih pa ne.

Frekvenca

Če večkrat izvedemo nek poskus nas zanima:

- kolikokrat se je pri vseh ponovitvah poskusa zgodil slučajni dogodek,
- kako pogosto se pojavi izbrani slučajni dogodek pri vseh ponovitvah poskusa.

Pri igri Človek ne jezi se, je Špela 3-krat v 15-ih metih kocke vrgla šestico.

Dogodek A: »Pade 6 pik« se je zgodil 3-krat, torej je **frekvenca dogodka A** enaka 3.

Špela je kocko metala 15-krat, torej je poskus opravila 15-krat.

Relativna frekvenca

Zapišemo količnik med številom ugodnih izidov za dogodek in številom vseh ponovitev poskusa:

$$\frac{\text{frekvenca dogodka}}{\text{številom vseh ponovitev poskusa}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ta količnik imenujemo **relativna frekvenca dogodka**.

V zapisanem primeru je Špela opravila le 15 ponovitev poskusa.

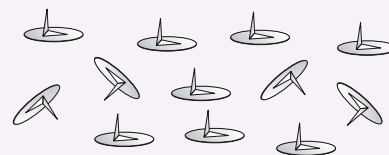
Če se želimo približati točni vrednosti za relativno frekvenco, moramo izvesti veliko večje število poskusov (npr. tisoč).

Vrednosti, pri kateri se z naraščanjem števila poskusov relativna frekvenca dogodka ustali, pravimo empirična (izkušenjska, statistična) verjetnost.



POZOR!

Kadar elementarni dogodki niso enakovredni, klasična matematična definicija verjetnosti ni smiselna in je ne določamo. V nasprotju z metom kovanca za risalni žebliček ne moremo vnaprej določiti verjetnosti, da bo padel na konico, na plosko stran ali postrani. Možnosti zaradi oblike niso enakovredne.



FREKVENCA, RELATIVNA FREKVENCA DOGODKA

Frekvenca dogodka A je število dogodkov A pri vseh ponovitvah poskusa.

Relativna frekvenca dogodka A je število, ki izraža delež dogodkov A v vseh ponovitvah poskusa. Določamo jo le pri enakovrednih elementarnih dogodkih.

Relativna frekvenca določa teoretično verjetnost.

Verjetnost slučajnega dogodka

Verjetnost slučajnega dogodka lahko ocenimo z besedo ali pa izrazimo s številom.

Ocenjevanje verjetnosti z besedo

Z besedo verjetno običajno ocenimo napoved, ali se bo nek slučajen elementaren dogodek v poskusu zgodil ali pa ne. Zato poskus velikokrat ponovimo. Po tem, kako pogosto se tak dogodek zgodi, mu priredimo verjetnost. Pri tem uporabljamo besede:

VERJETNO – za slučajen elementarni dogodek, za katerega menimo, da se pri velikem številu ponovitev poskusa v približno enakem deležu zgodi ali ne zgodi.

ZELO VERJETNO – za slučajen elementarni dogodek, za katerega menimo, da se pri velikem številu ponovitev poskusa pogosto zgodi.

MALO VERJETNO – za slučajen elementarni dogodek, za katerega menimo, da se pri velikem številu ponovitev poskusa le redko zgodi.

Izražanje verjetnosti s številom

Natančneje kot z besedami pa verjetnost slučajnega elementarnega dogodka A izrazimo s številom.

To lahko ugotavljamo empirično (s poskušanjem) ali teoretično (matematično).

Empirično (statistično) določamo verjetnost s poskušanjem.

Opravimo veliko število ponovitev poskusa (1000 in več) in si sproti zapisujemo ali se dani dogodek zgodi ali ne. Izračunamo količnik med frekvenco dogodka in številom vseh izvajanj poskusa.

$$P(A) = \frac{\text{frekvenca dogodka } A}{\text{število vseh ponovitev poskusa}}$$

Teoretično (matematično, klasično)

Verjetnost slučajnega dogodka poskušamo oceniti, ne da bi v resnici izvedli poskuse. To lahko naredimo v primerih, kjer ni nobenega razloga, da bi se en elementarni dogodek zgodil večkrat kot drugi (met kovanca ali igralne kocke).

Verjetnost dogodka A : »pade številka na kovancu« je $\frac{1}{2}$.

Ker ima kovanec dve enakovredni strani, je ob vsakem metu $\frac{1}{2}$ možnosti, da pade številka.



Verjetnost dogodka B : »pade 4 na igralni kocki« je $\frac{1}{6}$.



Kocka ima šest enakovrednih strani, nobenega razloga ni, da bi padla ena stran pogosteje kot druga, zato je možnost da pade 4 pike $\frac{1}{6}$.



POMNI

Verjetnost dogodka A zapišemo $P(A)$.
Probability v angleščini pomeni verjetnost.



POZOR!

Verjetnost slučajnega dogodka napovedujemo samo za posamezen primer, nikoli ne posplošujemo na druge dogodke.



VERJETNOST SLUČAJNEGA DOGODKA

Kadar so posamezni izidi enakovredni glede možnosti, da se zgodijo, je **verjetnost slučajnega dogodka** količnik med številom ugodnih izidov (m) in številom vseh možnih elementarnih dogodkov (n) v nekem poskusu.

$$P(A) = \frac{\text{število ugodnih izidov}}{\text{število možnih elementarnih dogodkov}} = \frac{m}{n}$$

Verjetnost slučajnega dogodka je število, večje od 0 in manjše od 1.

Takšni definiciji verjetnosti pravimo klasična ali matematična definicija verjetnosti. Več o tem v srednji šoli.

Sklepamo lahko, da imata v igri s kroglicami Anja in Špela enake možnosti za zmago.



Razišči verjetnost slučajnega dogodka.
DZ – naloga 6.6



REŠENI PRIMERI

1 Mečem dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah 5?

- Opravi 100 poskusov in ugotovi, kolikokrat je ugoden izid.
- Nariši kombinatorično drevo za vse možne izide pri enem metu dveh kock.
- Določi verjetnost dogodka na osnovi poskusov.
- Določi relativno frekvenco in napovej teoretično (matematično) verjetnost.
- Primerjaj, ali si se pri izvajanju poskusa približal teoretični (matematični) verjetnosti.

Rešitev:

- opravimo poskuse, število padlih pik zapišemo v preglednico in obarvamo stolpec, če je vsota pik na obeh kockah 5.

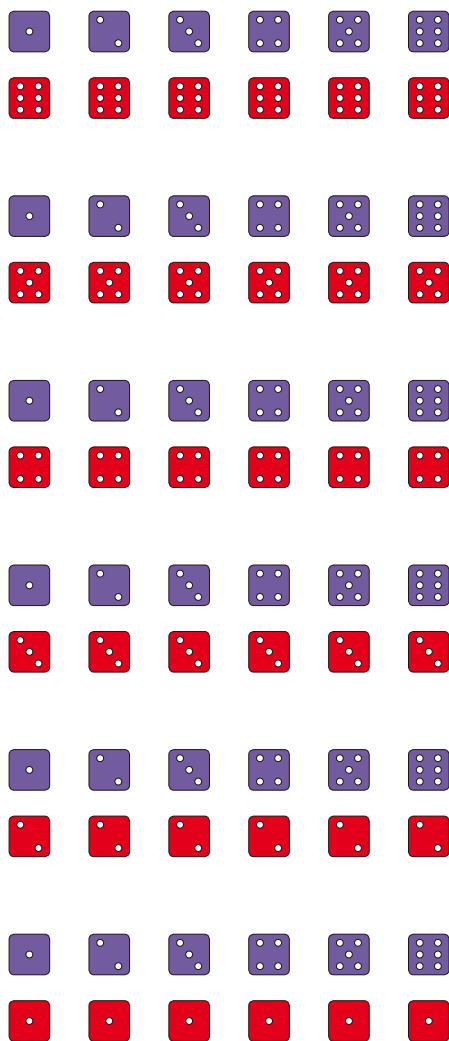
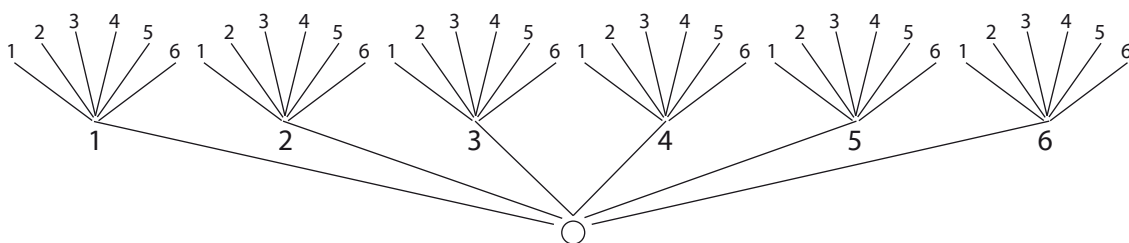
št. pik 1. kocke	1	6	3	5	5	3	4	4	6	6	5	2	4	6	3	6	4	1	4	3	1	3	4	2	6
št. pik 2. kocke	1	1	4	5	6	2	3	6	3	2	2	3	6	2	5	1	5	1	5	2	1	2	1	3	6

št. pik 1. kocke	2	1	6	1	6	4	6	1	4	1	5	4	4	4	4	2	3	5	2	2	6	5	2	2	5
št. pik 2. kocke	1	1	2	5	3	4	3	1	1	5	6	2	3	5	4	5	3	3	5	3	4	2	6	4	2

št. pik 1. kocke	6	3	1	3	6	6	4	3	5	3	4	1	2	5	3	6	2	5	4	5	2	4	3	3	6
št. pik 2. kocke	2	4	4	2	3	4	5	3	5	1	6	1	4	1	4	4	4	2	1	4	6	1	3	4	5

št. pik 1. kocke	3	5	3	4	6	2	6	1	5	1	4	4	4	6	3	1	1	5	1	1	4	2	4	6	5
št. pik 2. kocke	1	1	1	6	2	6	6	5	4	4	2	3	3	4	1	1	1	4	2	3	3	6	4	1	5

b) Narišemo kombinatorično drevo za met dveh kock. Vidimo, da je pri enem metu dveh kock 36 različnih možnosti.



c) Vsota 5 pik je padla 12-krat v 100 poskusih, zato je verjetnost na osnovi meritev

$$P(A_m) = \frac{12}{100} = 0,12 = 12 \%$$

č) Ugodne možnosti za vsoto 5 pik so štiri: 1,4 2,3 3,2 4,1.

$$\text{Izračunamo relativno frekvenco } P(A) = \frac{4}{36} = 0,1\bar{1} \approx 11,1 \%$$

d) Izračunamo kolikšen del teoretične verjetnosti je empirična verjetnost za naš primer.

$$P(A_m) = \frac{12}{100 \text{ poskusov}} \quad P(A) = \frac{4}{36}$$

$$\frac{12}{100} : \frac{4}{36} = 1,08 = 108 \%$$

Teoretična verjetnost se od dejansko izmerjene verjetnosti za naš primer razlikuje za 8 %.

2 Rok je v zrak hkrati metal dva kovanca za 50 centov, Špela pa je v tabelo zapisovala dogodke, ki so se pri tem zgodili.

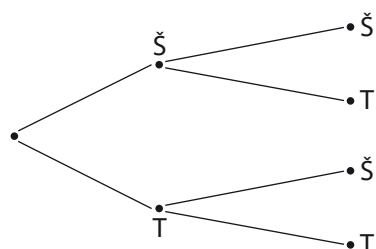
- a) dogodek A: na obeh kovancih pade Triglav
- b) dogodek B: na obeh kovancih pade številka
- c) dogodek C: na enem od kovancev pade Triglav, na drugem pa številka



Poskus sta ponovila stokrat.

Z računanjem verjetnosti ugotovi, ali sta se pri izvajanju poskusa približala pričakovanim rezultatom.

Najprej narišemo kombinatorično drevo, v katerem ponazorimo rešitve pri enem metu obeh kovancev.



Š = številka, T = Triglav



POZOR!

Če opravimo premajhno število poskusov, se rezultati meritev razlikujejo od teoretične (matematične) verjetnosti dogodka.

Vse možne rešitve pri enem metu obeh kovancev so 4.

številka – številka	številka – Triglav	Triglav – številka	Triglav – Triglav
++++ +++++ +++++	++++ +++++ +++++	++++ +++++ +++++	++++ +++++ +++++
++++	++++	++++ ++++	++++ ++++

Rešitev:

- a) Izračunamo verjetnost za dogodek A: $P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$.

ugoden
dogodek

možni
dogodki

Izmerjena verjetnost dogodka A: $P(A_m) = \frac{28}{100} = 0,28$.

Pri izvajanju poskusa A Rok in Špela nista dobila pričakovanega rezultata. Verjetnost pri meritvah je 112 % (0,28 : 0,25) izračunane verjetnosti, torej sta se zmotila za 12 %.

- b) Izračunamo verjetnost za dogodek B: $P(B) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Izmerjena verjetnost dogodka B: $P(B_m) = \frac{24}{100} = 0,24$.

Verjetnost pri meritvah je 96 % (0,24 : 0,25) izračunane verjetnosti, torej sta se zmotila za 4 %.

- c) Izračunamo verjetnost za dogodek C: $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Izmerjena verjetnost dogodka C: $P(C_m) = \frac{48}{100} = 0,48$.

Verjetnost pri meritvah je 96 % (0,48 : 0,5) izračunane verjetnosti, torej sta se zmotila za 4 %.



- 1 S števki 1, 2, 3 sestavi vsa mogoča trimesna števila, če ponavljanje števka ni dovoljeno. Nariši drevesni prikaz.
- 2 Špela ima modro in belo krilo ter rumeno, rdečo in zeleno majico. Kako naj kombinira oblačila, da bo vedno drugače oblečena? Nariši drevesni prikaz.
- 3 Kakšne vrste dogodek je opisan dogodek?
 - a) Pri metu igralne kocke pade 8 pik.
 - b) Izbrana oseba v 9.a razredu je deklica.
 - c) V vrečki so same bele kroglice. Izvlečemo belo kroglico.
 - č) Iz vrečke, v kateri je 6 rdečih in 5 belih kroglic, izvlečemo rdečo kroglico.
- 4 Izberi pravilne trditve:
 - a) Poskus je, če si želim postati pevka.
 - b) Poskus je, če okušam pravkar kuhano juho.
 - c) Dogodek je, če padem s kolesom.
 - č) Dogodek pri istem poskusu je, da plavam v morju ali pa da jabolko pade iz drevesa.
- 5 Zapiši vse možne dogodke za vsak poskus.
 - a) Rok obiskuje pouk.
 - b) Učiteljica pisno ocenjuje.
 - c) Špela naključno izbere osebo iz njene nivojske skupine.
- 6 Špela ima v vrečki 16 bonbonov v ovitkih: 8 je rdečih in 8 je rumenih. Iz vrečke vzame 2 bonbona in ju ne vrne. Oba sta rdeča. Nato iz vrečke vzame tretji bonbon. Kaj velja za verjetnost barve tretjega bonbona?
 - a) Ne moremo povedati, katera barva bonbona je bolj verjetna.
 - b) Enako verjetno je, da je bonbon rdeč ali rumen.
 - c) Bolj verjetno je, da bo bonbon rdeč kot pa rumen.
 - č) Bolj verjetno je, da bo bonbon rumen kot pa rdeč.
- 7 Špela in Rok sta bila predlagana za predsednika šolskega parlamenta. Špela je dobila 80 % glasov, Rok pa 20 % glasov. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran učenec šole glasoval za Špelo?
 - a) Zagotovo je glasoval za Špelo.
 - b) Verjetno je glasoval za Špelo.
 - c) Verjetno ni glasoval za Špelo.
 - č) Zagotovo ni glasoval za Špelo.
- 8 Pri uri gospodinjstva pripravljajo obložene kruhke. Nabavili so eno vrsto kruha, tri vrste salam: posebno, šunko, milansko in dve vrsti sira: gauda, edamec. Na vsak kruh so dali eno vrsto salame in eno vrsto sira.
 - a) Nariši kombinatorično drevo in ugotovi, koliko različnih obloženih kruhkov so lahko pripravili.
 - b) V obliki preglednice zapiši sestavine posameznega obloženega kruha.
- 9 Meči igralni kocki. Poskus ponovi 100-krat.
 - a) Kolikokrat sta obe kocki pokazali enako število pik?
 - b) Kolikokrat je bila vsota pik na obeh kockah 3?
 - c) Kolikokrat je bila vsota pik na obeh kockah manjša od 6?
- 10 Izračunaj teoretične (matematične) verjetnosti za dogodke pri nalogi 7.
- 11 Iz števka 7 in 8 sestavi vse trimestne številke, če je ponavljanje dovoljeno. Nariši drevesni prikaz.
- 12 a) Oceni, kolikokrat bo pri 800 metih kovanca za 1 stotin padla številka.
b) Opravi 800 metov kovanca in ugotovi približevanje napovedanemu rezultatu.
- 13 V škatli je 6 rdečih, 7 modrih, 3 zelene in 4 črne kroglice. Izračunaj verjetnost, da je:
 - a) izvlečena kroglica rdeče barve
 - b) izvlečena kroglica zelene barve
- 14 Iz kupa 32 igralnih kart (komplet vsebuje 4-krat: kralj, dama, fant, as, 10, 9, 8, 7) 100-krat na slepo izvleci eno karto, jo poglej, zapiši, katera je, in karto vrni.
 - a) V razpredelnico zapisuj vse dogodke.
 - b) Izračunaj verjetnost za dogodek A: izvlečena karta je kralj.
 - c) Na osnovi podatkov v razpredelnici izračunaj, kolikokrat se je zgodil dogodek A.
 - č) Za koliko se razlikujeta rezultata pri b in c?
- 15 Na košarkarskem igrišču sta se v izvajanju prostih metov pomerila Jaka in Nejc. Jaka je metal na koš 60-krat in zadel 24 košev. Nejc je v 50 poskusih zadel 32-krat. Kdo je bil uspešnejši v zadetkih?
- 16 Z anketo razišči, s katerimi od prevoznih sredstev (kolo, motor, osebni avto, avtobus, vlak, letalo) so se učenci vaše šole vozili v zadnjih 12 mesecih. Anketiraj 100 učencev in izračunaj frekvence in relativne frekvence posameznih dogodkov.
- 17 V dveh invalidskih delavnicah so pripravili srečelov. V prvi delavnici so izdelali 82 srečk, med katerimi jih zadene 54. V drugi invalidski delavnici so izdelali 264 srečk, med katerimi jih zadene 124. Vse srečke so namenili za srečelov. Razišči, v kateri invalidski delavnici bi bilo bolje kupiti srečko? Svoj odgovor utemelji.

3 VPRAŠALNIKI IN EMPIRIČNA PREISKAVA

Izvedel boš:

- kako sestaviti vprašalnik z osnovnimi vrstami vprašanj,
- kako kritično razmisliš o zbiranju, urejanju in prikazovanju podatkov,
- kako izvedeš empirično preiskavo.

Devetošolki Nadja in Neja sta že lani pripravili raziskovalno nalogo z naslovom Igre nekoč in danes. Razmišljali sta in v nalogo vključili dva vprašalnika: enega za odrasle osebe in enega za otroke – učence zadnjih štirih razredov osnovne šole, ki jo obiskujeta. Med učenci sta izvedli anketo na osnovi priloženega vprašalnika.

Anketirali sta:

- 44 šestošolcev, od tega 15 moških in 29 žensk,
- 35 sedmošolcev, od tega 15 moških in 20 žensk,
- 46 osmošolcev, od tega 24 moških in 22 žensk,
- 44 devetošolcev, od tega 25 moških in 19 žensk.

RAZMISLI

Kako naj predstaviš podatke po razredih, če vzorci niso enaki?



Vprašalnik je vseboval vse značilne tipe vprašanj:

- DA-NE vprašanja: 5. in 6. vprašanje
- vprašanje izbirnega tipa: 1., 2., 3., 4., 7., 8. vprašanje
- proste odgovore: so vsebovala vprašanja: 1.– 6. vprašanje
- vprašanje s točkovanjem po pomembnosti: 8. vprašanje

V vprašalnik sta zaradi obdelave podatkov vključili tudi spol in razred.

V vprašalniku anketiranca običajno nagovorimo: *»Čas teče in prinaša velike spremembe. Naše otroštvo in igre so vse bolj omejeni na računalnike, televizijo in podobne reči. Otroštvo preživljamo drugače, kot so ga naši dedki in babice. Radi bi primerjali tvoje igre z igrami tvojih dedkov in babic, zato te prosiva, da nama pri tem pomagaš.«*



NAJPOGOSTEJE UPORABLJAMO VPRAŠANJA

- DA-NE vprašanja
- vprašanja izbirnega tipa
- vprašanja s številskimi odgovori
- vprašanja s prostimi odgovori



IZDELAVA EMPIRIČNE PREISKAVE

Izdelava empirične preiskave je postopek, ki vključuje:

- načrtovanje raziskovanja,
- zbiranje podatkov: preštevanje, merjenje, anketiranje,
- analizo podatkov: urejanje, prikazovanje, preučevanje,
- interpretacijo ugotovitve,
- predstavitev raziskave.

Anketa igre nekoč in danes

Čas teče in prinaša velike spremembe. Naše otroštvo in igre so vse bolj omejeni na računalnike, televizijo in podobne reči. Otroštvo preživljamo drugače, kot so ga naši dedki in babice. Radi bi primerjali tvoje igre z igrami tvojih dedkov in babic, zato te prosiva, da nama pri tem pomagaš.

Obkroži in napiši.

Spol: M Ž

Razred: _____

1 Katera je tvoja najljubša družabna igra? Izberi en odgovor.

- a) Monopoli
- b) Ramzes
- c) Človek ne jezi se
- č) Potapljanje ladjic
- d) Šah
- e) Domine
- f) drugo: _____

2 Katera je tvoja najljubša igra s kartami? Izberi en odgovor.

- a) Črni Peter
- b) Enka
- c) Remi
- č) Osel
- d) Tarok
- e) Šnops
- f) Dama
- g) Bridge
- h) drugo: _____

3 Katera od iger, ki jih lahko rešuješ sam, je tvoja najljubša?

- a) križanka
- b) sudoku
- c) drugo, vpiši katera: _____

4 Katera je tvoja najljubša računalniška igra?

- a) miselna igra
- b) strelska igra
- c) športna igra
- č) avtomobilska igra
- d) arkadna igra
- e) zabavna igra
- f) drugo, vpiši katera: _____
- g) ne igram računalniških iger

5 Ali se med odmori igrate kakšne igre?

DA napiši, katere: _____
NE

6 Ali v družbi prijateljev (na rojstnodnevnih zabavah, na dvorišču ...) igrate kakšne družabne igre?

DA napiši, katere: _____
NE

7 Ali poznaš katero od ljudskih iger? Obkroži tiste igre, ki jih poznaš.

- a) Zemljo krasti
- b) Kamenčkanje
- c) Ali je kaj trden most?
- č) Prstančke deliti
- d) Frnikulanje
- e) Ravbarji in žandarji
- f) Gnilo jajce
- g) Indijanci in kavbojci
- h) Fuč
- i) Gumitvist

8 Kako najpogosteje preživljaš svoj prosti čas? Pogostost oceni tako, da zraven igre napišeš številko s spodnje lestvice.

- 0 – aktivnosti še nisi počel
- 1 – aktivnost si izvajal samo nekajkrat
- 2 – aktivnost izvajaš do šest-krat letno
- 3 – aktivnost izvajaš enkrat mesečno
- 4 – aktivnost izvajaš enkrat tedensko
- 5 – aktivnost izvajaš več kot enkrat tedensko

a) igram ljudske igre: _____

b) igram družabne igre (karte, namizne igre ...): _____

c) igram računalniške igrice: _____

č) gledam televizijo: _____

d) poslušam radio: _____

e) berem: _____

f) družim se s prijatelji: _____

g) klepetam po telefonu: _____

h) klepetam preko spletnih klepetalnic: _____

i) ukvarjam se s športom: _____

j) se sprehajam: _____

k) nič ne delam: _____



REŠENI PRIMERI

Poglejmo, kako sta raziskavo opravili Nadja in Neja.

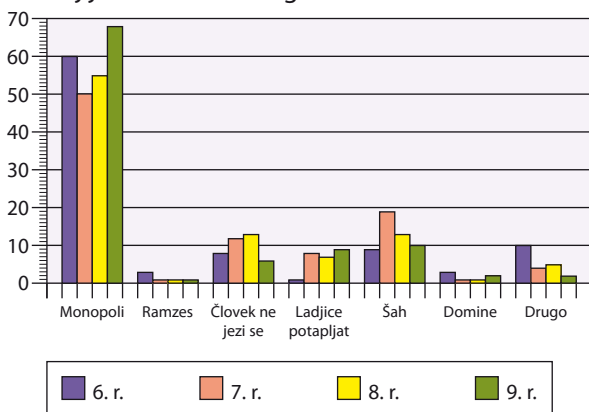
1. Najprej sta pripravili vprašalnik in anketirali vse učence predmetne stopnje.
2. Zbrane podatke sta uredili v računalniške preglednice (v programu Excell), preračunali podatke v odstotke in narisali diagrame (v programu Excell).
3. Predstavljene podatke sta preučili in interpretirali.

1 Katera je tvoja najljubša družabna igra?

Družabna igra – preštetih glasovi	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
Monopoli	27	18	26	30
Ramzes	2	0	0	0
Človek ne jezi se	4	5	7	3
Potapljanje ladjic	0	3	3	4
Šah	4	7	7	5
Domine	2	0	0	1
Drugo	5	2	3	1

Družabna igra – odstotni deleži	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
Monopoli	61,4	51,4	56,5	68,2
Ramzes	4,5	0,0	0,0	0,0
Človek ne jezi se	9,1	14,3	15,2	6,8
Potapljanje ladjic	0,0	8,6	6,5	9,1
Šah	9,1	20,0	15,2	11,4
Domine	4,5	0,0	0,0	2,3
Drugo	11,4	5,7	6,5	2,3

Najljubša družabna igra



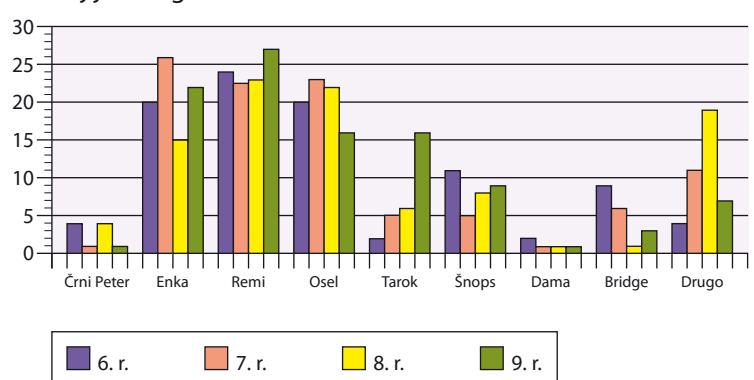
Najbolj priljubljen je Monopoli (v vseh razredih), sledita Šah in Človek ne jezi se. Najmanj učencev je izbralo igri Ramzes in Domine. Pod drugo so učenci dopisali še Cluedo, Igra življenja, Tarok in Mikado. Ramzes igrajo samo šestošolci, domine pa šestošolci in devetošolci. Šestošolci ne igrajo igre Potapljanje ladjic.

2 Katera je tvoja najljubša igra s kartami?

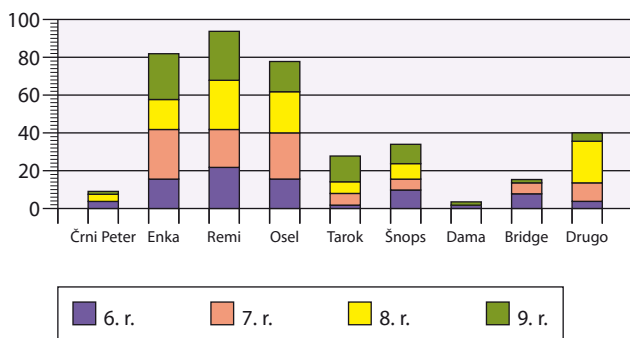
Igra s kartami – preštetih glasovi	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
Črni Peter	2	0	2	0
Enka	9	9	7	10
Remi	11	8	11	12
Osel	9	8	10	7
Tarok	1	2	3	7
Šnops	5	2	4	4
Dama	1	0	0	0
Bridge	4	2	0	1
Drugo	2	4	9	3

Igra s kartami – odstotni deleži	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
Črni Peter	4,5	0,0	4,3	0,0
Enka	20,5	25,7	15,2	22,7
Remi	25,0	22,9	23,9	27,3
Osel	20,5	22,9	21,7	15,9
Tarok	2,3	5,7	6,5	15,9
Šnops	11,4	5,7	8,7	9,1
Dama	2,3	0,0	0,0	0,0
Bridge	9,1	5,7	0,0	2,3
Drugo	4,5	11,4	19,6	6,8

Najljubša igra s kartami



Najljubša igra s kartami



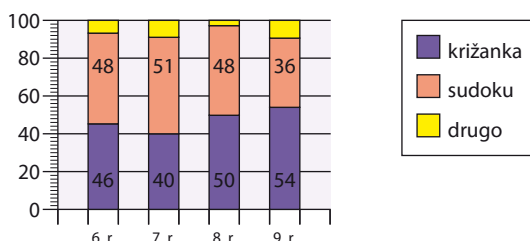
Rezultati so pokazali, da je večini otrok najbolj všeč igra Remi, na drugem mestu je Enka in nato Osel. Med razredi so najpogostejše izbrali Remi devetošolci, osmošolci in šestošolci, Enko pa sedmošolci. Anketirancem je najmanj všeč Dama in Črni Peter. Črnega Petra ne igrajo sedmošolci in devetošolci, Bridga ne igrajo osmošolci, Damo pa igrajo le šestošolci.

3 Katera od iger, ki jih lahko rešuješ sam, je tvoja najljubša?

Igra za enega igralca – prešteti glasovi	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.	skupaj
križanka	20	14	23	24	81
sudoku	21	18	22	16	77
drugo	3	3	1	4	11

Igra za enega igralca – odstotni delež	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
križanka	45,5	40,0	50,0	54,5
sudoku	47,7	51,4	47,8	36,4
drugo	6,8	8,6	2,2	9,1

Najljubša igra za enega igralca

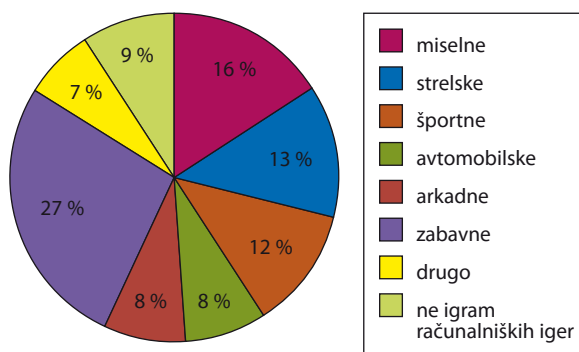


Ugotovili sva, da je med šestošolci in sedmošolci bolj priljubljen Sudoku v primerjavi s križanko, ki je bolj priljubljena med osmošolci in devetošolci. V skupnem merilu se izbor obeh iger razlikuje le za dva procenta v korist križank. V sedmem razredu bistveno prevladuje Sudoku, v devetem pa križanka. Pod drugo so dopisali kviz, uganke in igro Raketnik.

4 Katera je tvoja najljubša računalniška igra?

Računalniške igre	Skupaj
miselna	28
strelška	23
športna	20
avtomobilska	13
arkadna	13
zabavna	45
drugo	12
ne igram računalniških iger	15

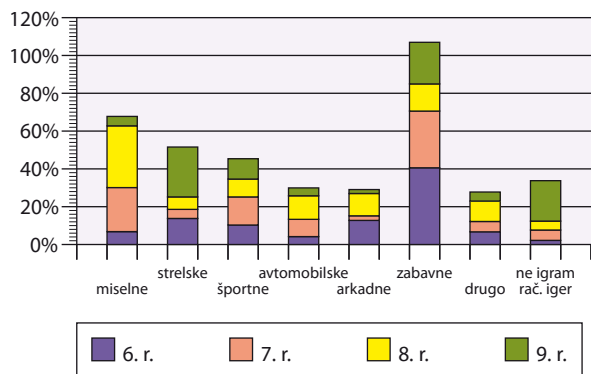
Najljubša računalniška igra



Računalniške igre – prešteti glasovi	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
miselna	3	9	14	2
strelška	6	2	3	12
športna	5	5	5	5
avtomobilska	2	3	6	2
arkadna	6	1	5	1
zabavna	18	11	6	10
drugo	3	2	5	2
ne igram rač. iger	1	2	2	10

Računalniške igre – odstotni delež	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
miselna	6,8	25,7	30,4	4,5
strelška	13,6	5,7	6,5	27,3
športna	11,4	14,3	10,9	11,4
avtomobilska	4,5	8,6	13,0	4,5
arkadna	13,6	2,9	10,9	2,3
zabavna	40,9	31,4	13,0	22,7
drugo	6,8	5,7	10,9	4,5
ne igram rač. iger	2,3	5,7	4,3	22,7

Najljubša računalniška igra po razredih

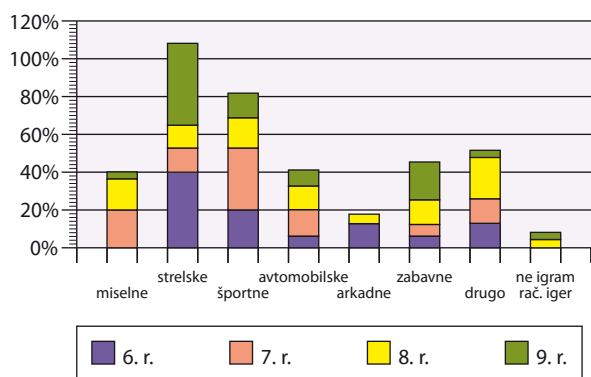


Ali obstaja razlika v igranju računalniških iger po spolu?

Računalniške igre – dečki – prešteti glasovi	6. r. m	7. r. m	8. r. m	9. r. m
miselna	0	3	4	1
strelska	6	2	3	12
športna	3	5	4	3
avtomobilska	1	2	3	2
arkadna	2	0	1	0
zabavna	1	1	3	5
drugo	2	2	5	1
ne igram rač. iger	0	0	1	1

Računalniške igre – dečki – odstotni delež	6. r. m	7. r. m	8. r. m	9. r. m
miselna	0,0	20,0	16,7	4,0
strelska	40,0	13,3	12,5	48,0
športna	20,0	33,3	16,7	12,0
avtomobilska	6,7	13,3	12,5	8,0
arkadna	13,3	0,0	4,2	0,0
zabavna	6,7	6,7	12,5	20,0
drugo	13,3	13,3	20,8	4,0
ne igram rač. iger	0,0	0,0	4,2	4,0

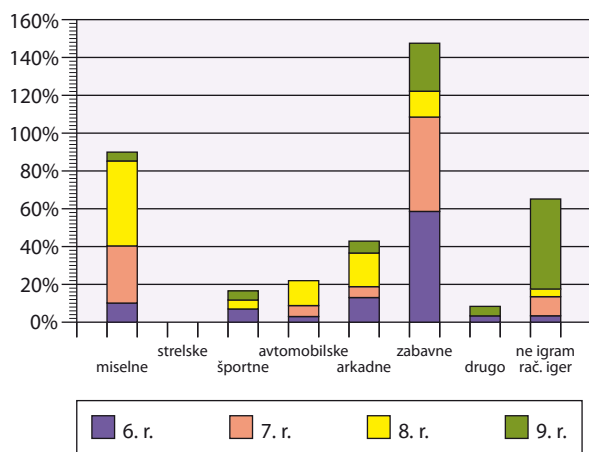
Najljubša računalniška igra pri učencih



Računalniške igre – deklice – prešteti glasovi	6. r. ž	7. r. ž	8. r. ž	9. r. ž
miselna	3	6	10	1
strelska	0	0	0	0
športna	2	0	1	2
avtomobilska	1	1	3	0
arkadna	4	1	4	1
zabavna	17	10	3	5
drugo	1	0	0	1
ne igram rač. iger	1	2	1	9

Računalniške igre – deklice – odstotni delež	6. r. ž	7. r. ž	8. r. ž	9. r. ž
miselna	10,3	30,0	45,5	5,3
strelska	0,0	0,0	0,0	0,0
športna	6,9	0,0	4,5	10,5
avtomobilska	3,4	5,0	13,6	0,0
arkadna	13,8	5,0	18,2	5,3
zabavna	58,6	50,0	13,6	26,3
drugo	3,4	0,0	0,0	5,3
ne igram rač. iger	3,4	10,0	4,5	47,4

Najljubša računalniška igra pri učenkah



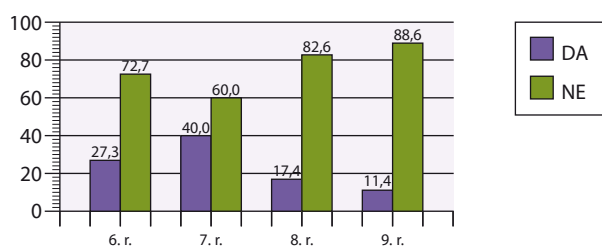
Zabavne igre so najbolj všeč šestošolcem in sedmošolcem, miselne igre osmošolcem, strelske igre pa devetošolcem. Na splošno so najbolj priljubljene zabavne igre. Pod drugo so anketiranci dopisali strateške in avanturistične igre. Vsi učenci, ne glede na spol, igrajo več zabavnih kot miselnih iger, večje razmerje v prid zabavnih iger pa je pri dekletih. Fantje najraje igrajo strelske in športne igre, dekleta pa zabavne in miselne igre. Dekleta ne igrajo strelskih iger, zelo veliko pa jih računalniških iger ne igra. Zelo malo je fantov, ki ne igrajo računalniških iger.

5 Ali se med odmori igrate kakšne igre?

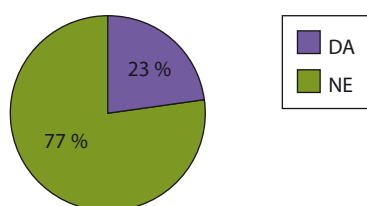
	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.	Skupaj
DA	12	14	8	5	39
NE	32	21	38	39	130

	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
DA	27,3	40,0	17,4	11,4
NE	72,7	60,0	82,6	88,6

Igranje iger med odmori po razredih



Igranje iger med odmori



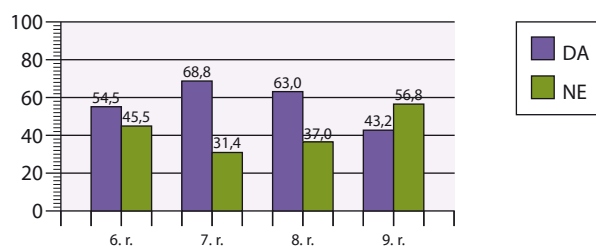
Večina otrok (77 %) med odmori ne igra iger. Izmed tistih, ki jih igrajo, je največ sedmošolcev, sledijo jim šestošolci, osmošolci, najmanj pa je devetošolcev. Učenci so dopisali, katere igre se igrajo. Šest šestošolcev je dopisalo igro Kipar, drugi šestošolci pa igro Jon-marion, Vislice, Pokemon karte in igro Tovarna Zlatorog. Vsi sedmošolci, ki so obkrožili odgovor da, so dopisali igro Kipar, pet osmošolcev je dopisalo igro Jon-marion, trije pa igro Tri v vrsto. Vsi devetošolci, ki se igrajo igre med odmori, so dopisali igro vislice.

6 Ali v družbi prijateljev (na rojstnodnevnih zabavah, na dvorišču ...) igrate kakšne družabne igre?

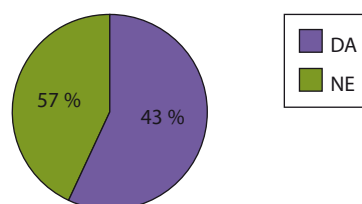
	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.	Skupaj
DA	24	24	29	19	96
NE	20	11	17	25	73

	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.
DA	54,5	68,6	63,0	43,2
NE	45,5	31,4	37,0	56,8

Igranje iger med prijatelji po razredih



Igranje iger med prijatelji

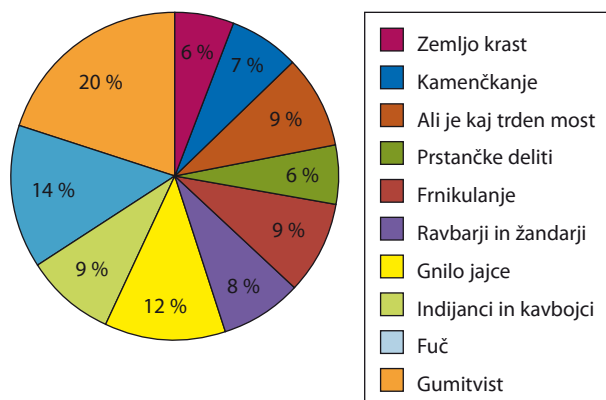


Več je tistih učencev (57 %), ki družabne igre igrajo na zabavi s prijatelji. Največ družabnih iger v družbi prijateljev igrajo sedmošolci, sledijo osmošolci in šestošolci, najmanj pa jih igrajo devetošolci.

7 Ali poznaš katero od ljudskih iger? Obkroži tiste igre, ki jih poznaš.

Ljudske igre – prešteti glasovi	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.	Skupaj
Zemljo krast	13	11	5	8	37
Kamenčkanje	28	10	3	3	44
Ali je kaj trden most	10	14	13	20	57
Prstančke deliti	13	8	15	2	38
Frnikulanje	14	18	12	14	58
Ravbarji in žandarji	29	4	14	7	54
Gnilo jajce	12	28	14	26	80
Indijanci in kavbojci	36	4	11	7	58
Fuč	24	29	13	22	88
Gumitvist	56	29	20	23	128

Najljubša računalniška igra

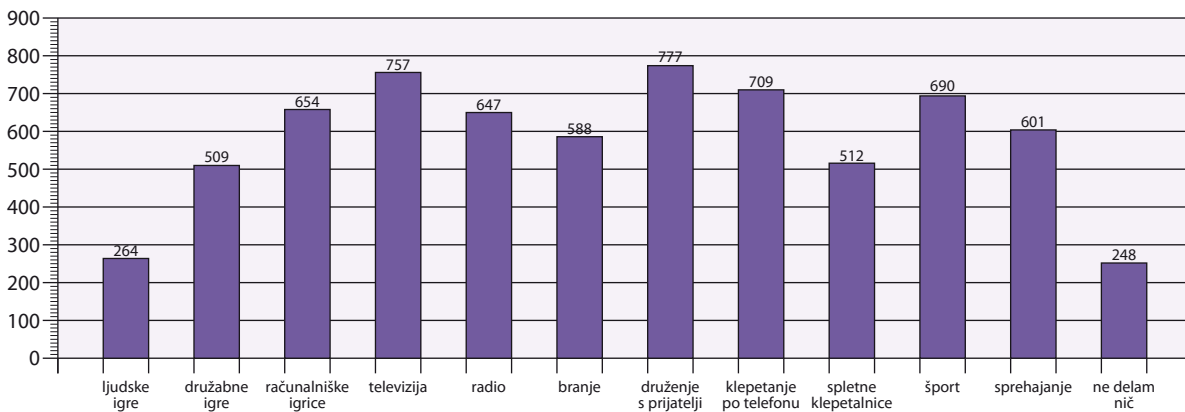


Vse ljudske igre učenci poznajo. Največ učencev pozna Gomitvist, Fuč in Gnilo jajce, najmanj poznajo Zemljo krast in Prstančke deliti.

8 Kako najpogosteje preživljaš svoj prosti čas?

Prostočasne dejavnosti	6. r.	7. r.	8. r.	9. r.	Skupaj
ljudske igre	86	66	61	51	264
družabne igre	143	115	140	111	509
računalniške igrice	197	148	158	151	654
televizija	203	163	187	204	757
radio	167	152	156	172	647
branje	169	146	144	129	588
druženje s prijatelji	201	156	212	208	777
klepetanje po telefonu	180	170	191	168	709
spletne klepetalnice	133	116	112	151	512
šport	184	161	186	159	690
sprehajanje	187	133	143	138	601
ne delam nič	49	64	77	58	248

Preživljanje prostega časa



V svojem prostem času se največ učencev druži s prijatelji, gleda televizijo ali klepeta po telefonu. Sledijo šport, računalniške igrice, radio, sprehajanje, branje, spletne klepetalnice, družabne igre, ljudske igre in ne delam nič. Iz tabele vidimo, da so podobni rezultati tudi pri posameznih razredih, saj se največ družijo s prijatelji osmošolci in devetošolci, šestošolci gledajo največ televizijo, sedmošolci pa največ klepetajo po telefonu. Rezultati so pokazali da zelo malo učencev igra ljudske in družabne igre.

Interpretacija

Med družabnimi igrami je najbolj priljubljen Monopoli, med igrami s kartami pa Remi, med sedmošolci Enka. Med računalniškimi igrami so najbolj priljubljene zabavne igre. Po razredih so zabavne igre najbolj všeč šestošolcem in sedmošolcem, miselne igre osmošolcem, strelske igre pa devetošolcem. Fantje najraje igrajo strelske in športne igre, dekleta pa zabavne in miselne igre. Dekleta ne igrajo strelskih iger, veliko deklet ne igra računalniških iger, fantov pa je zelo malo takšnih, ki ne igrajo računalniških iger.

Večina otrok (77 %) med odmori ne igra iger. Izmed tistih, ki jih igrajo, je največ sedmošolcev, sledijo jim šestošolci, osmošolci, najmanj pa med odmori igrajo igre devetošolci.

Na zabavi s prijatelji je več tistih učencev (57 %), ki družabne igre igrajo. Največ družabnih iger v družbi prijateljev igrajo sedmošolci, sledijo osmošolci in šestošolci, najmanj pa jih igrajo devetošolci.

Vse ljudske igre, ki so jih igrali otroci včasih, učenci poznajo. Največ učencev pozna Gunitvist, Fuč in Gnilo jajce, najmanj poznajo Zemljo krast in Prstančke delit.

V svojem prostem času se največ učencev druži s prijatelji, gleda televizijo ali klepetajo po telefonu. Sledijo šport, računalniške igrice, radio, sprehajanje, branje, družabne igre, spletne klepetalnice, ljudske igre in »ne delam nič«. Podobni rezultati so tudi pri posameznih razredih, saj se največ družijo s prijatelji osmošolci in devetošolci, šestošolci gledajo največ televizijo, sedmošolci pa največ klepetajo po telefonu.



NALOGE ZA VAJO

- 1 Nadja in Neja sta v svojo raziskavo vključili tudi vprašanje „Koliko časa igraš računalniške igrice?“ in dobili naslednje rezultate.

Čas – prešteti glasovi	6. r. m	6. r. ž	7. r. m	7. r. ž	8. r. m	8. r. ž	9. r. m	9. r. ž
do 1 ure na dan	1	4	4	4	7	1	9	1
1 do 2 uri na dan	6	4	4	3	3	4	4	2
2 do 3 uri na dan	2	2	3	0	5	0	3	0
več kot tri ure na dan	0	4	2	0	2	2	5	1
2 do 3-krat na teden	4	8	1	6	2	4	1	2
1-krat na teden	1	4	1	4	1	4	0	3
3-krat na mesec	0	0	0	1	1	0	0	0
2-krat na mesec	1	1	0	1	0	1	0	0
1-krat na mesec	0	0	0	0	1	0	0	0
manj kot 1-krat na mesec	0	2	0	0	2	6	2	3
nikoli	0	0	0	1	0	0	1	7

- a) Pripravi tabelo in nariši krožni diagram za igranje računalniških iger skupno.
b) Pripravi tabelo (z odstotnimi deleži) za igranje računalniških iger po razredih in nariši stolpčni diagram.
c) Pripravi tabelo (z odstotnimi deleži) za igranje računalniških iger za dečke in nariši stolpčni diagram istega tipa kot pri vprašanju 4 pri učencih.
č) Pripravi tabelo (z odstotnimi deleži) za igranje računalniških iger za deklice in nariši stolpčni diagram istega tipa kot pri vprašanju 4 pri učenkah.

- 2 V prilogi je anketa Igre nekoč in danes. Opravi anketiranje med učenci tvoje šole, obdelaj, prikaži in interpretiraj dobljene rezultate.

- 3 Opravi empirično raziskavo o branju knjig med učenci vaše šole.

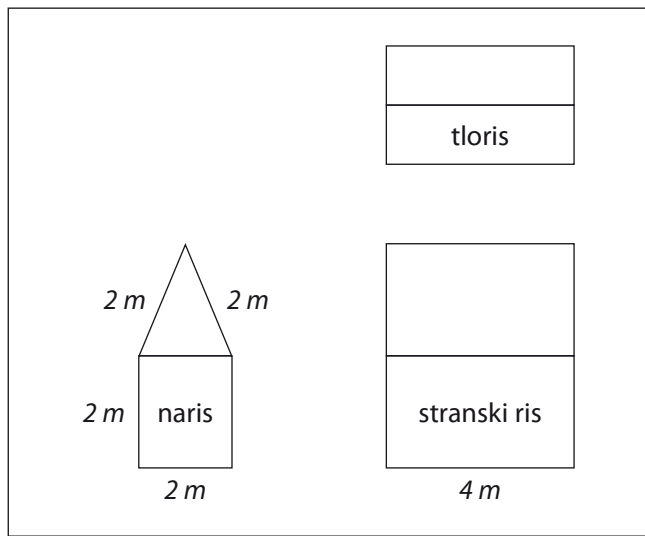
ZMOREM TUDI TO

- 4 Samostojno izdelaj empirično preiskavo: izberi si temo, ki jo boš samostojno raziskal (s pomočjo anketnega vprašalnika), opravi anketiranje, obdelaj, primerjaj in analiziraj podatke in interpretiraj ugotovitve ter na koncu predstavi svojo raziskavo.

Špela in Rok sta, kot vsako leto, tudi tokrat ob koncu šolskega leta ugotavljala, da sta se pri urah matematike ves čas srečevala z nalogami, s kakršnimi se pogosto srečujemo tudi v vsakdanjem življenju. Organizirala sta matematično tekmovanje in drug drugemu zastavljala naloge, ki so bile povezane z vsakdanjimi življenjskimi situacijami.



- 1 Pri Novakovih so se odločili, da bodo na vrtu postavili uto, katere načrt je prikazan na sliki.



Za ogrodje bodo uporabili okrogle kovinske cevi s premerom 5 cm in dolžino 2 m, ki jih bodo med seboj povezali z varjenjem. 1 meter takšne cevi stane 2,65 €.

Ker gre za letno uto, bodo na kovinsko ogrodje postavili streho za zaščito pred dežjem samo na obeh poševnih delih, in sicer iz šotorskega platna po ceni 12,35 € za kvadratni meter.

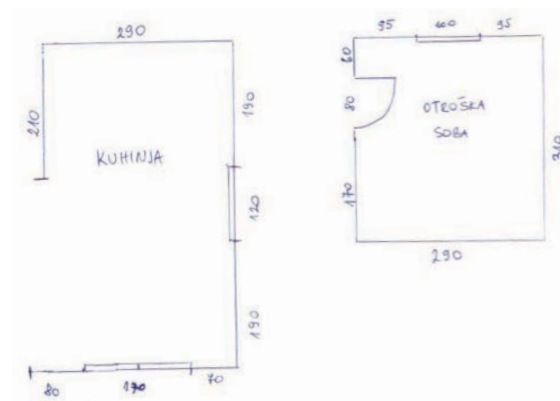
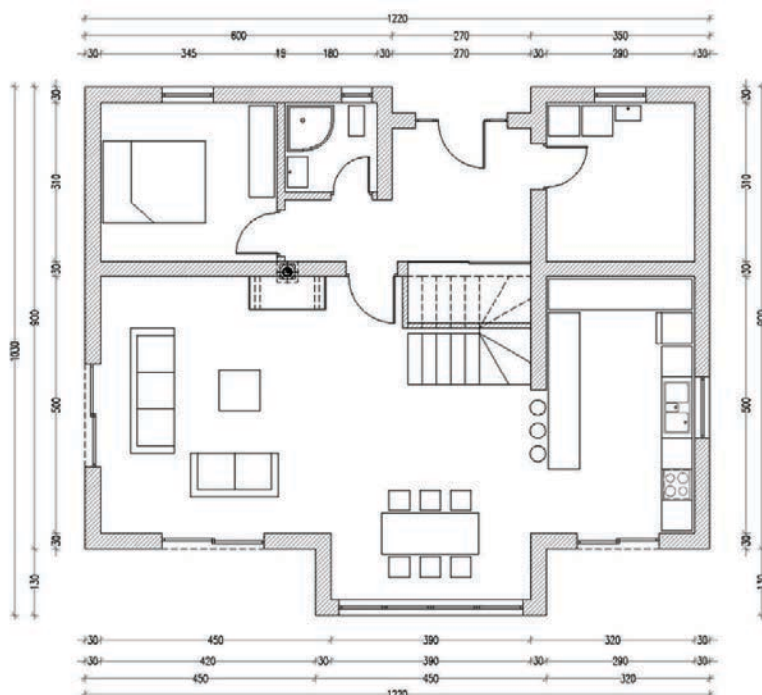
- S pomočjo prikazanega načrta skiciraj obliko vrtno ute v poševni projekciji in na njej označi vse dimenzije.
- Iz katerih geometrijskih teles je sestavljena uta?
- Najmanj koliko metrov kovinskih cevi bodo potrebovali za izdelavo ute?
- Najmanj koliko m^2 šotorskega platna bo potrebnega za pokritje strehe ute?
- Kolikšni bodo skupni stroški materiala za postavitev takšne ute?
- Na strop bodo pritrdili akumulatorsko svetilko, ki je primerna za osvetlitev prostora s prostornino do 30 m^3 . Ali bo ta svetilka zadoščala?
- Ali lahko to uto postavijo pod lipo, ki ima najnižje veje 3,5 metra visoko od tal?
- Katerega številskega podatka iz naloge nisi potreboval?

- 2 V soboto je v konjeniškem klubu potekalo tekmovanje. Na travniku pred poligonom je klubski podmladek organiziral dobrodelno prodajo sokov. Sok, ki so ga naredili tako, da so zmešali sadni sirup in vodo v razmerju 1 : 4, so prodajali v kozarcih za 2 dcl za otroke in 3 dcl za odrasle. Po končani prodaji so ugotovili, da so v času tekmovanja prodali 86 litrov soka in porabili skupno 325 lončkov. Cena litra sadnega sirupa je 1,80 €, vodo pa so dobili brezplačno.

- Koliko sadnega sirupa so porabili?
- Kolikšna je bila poraba vode?
- Koliko manjših in koliko večjih sokov so prodali ta dan?
- Kolikšen je bil celotni prihodek, če so prodajali 2 dcl soka po ceni 0,30 € in 3 dcl sok po ceni 0,50 €?
- Ali je bila cena soka za otroke in odrasle določena sorazmerno? Pojasni.
- Kolikšen je bil celotni dobiček od prodaje sokov?
- V klubski blagajni so ugotovili, da je bilo skupaj prodanih 400 vstopnic in izkupiček je znašal 3760 €. Koliko otrok in koliko odraslih je bilo med gledalci, če je bila cena otroških vstopnic 7 €, odraslih pa 10 €?
- Kaj lahko poveš o prodaji sokov pri otrocih in pri odraslih?



- 3 Jure je v prostem času na sosedovi plantaži pobiral jagode. Sosed mu je za nabranih 24 kilogramov plačal 15,80 €, naslednji dan pa za nabranih 30 kilogramov 18,50 €. Ugotovi, kako je sosed obračunaval plačilo glede na količino nabranih jagod.
- 4 Špelini prijatelji so na 18 metrov dolgem in 12 metrov širokem pravokotnem dvorišču uredili plavalni bazen, ki je bil z dvoriščem v razmerju 2 : 3. Celoten prostor ob bazenu so tlakovali z betonskimi ploščami.
- Nariši skico dvorišča z bazenom.
 - Izračunaj, koliko so plačali za betonske plošče, če m^2 plošč stane 12 €.
 - Zapiši razmerje med površino vode in površino betonskih plošč.
 - Ali postavitve bazena vpliva na razmerje površin?
 - Koliko odstotkov površine celotnega dvorišča predstavlja tlakovani del?
 - Koliko m^3 vode lahko naližejo v bazen?
- 5 Rokova družina ima 6 metrov od stanovanjske hiše postavljeno 2 metra visoko ograjo. Razišči, kako daleč od ograje lahko postavijo 5 metrov visoko cestno svetilko, da bo svetloba čez ograjo še dosegla prag njihove hiše (postavitev skiciraj).
- 6 Špelin stric Jakob je na vrtu svojega vikenda uredil 9 metrov dolg in 6 metrov širok plavalni bazen z globino 1,5 metra. Bazen je želel obložiti s keramičnimi ploščicami, ki so jih prodajali v dveh trgovinah. V prvi trgovini so prodajali ploščice dimenzije 25 X 25 cm po ceni 27,36 € za kvadratni meter, v drugi trgovini pa so ploščice dimenzije 30 X 30 cm prodajali posamično po ceni 2,43 € za komad.
- Razišči, kje se stricu Jakobu bolj splača kupiti ploščice, če upošteva, da se med polaganjem 5 % ploščic uniči.
 - V mesecu maju obe trgovini ponujata akcijsko prodajo. Prva trgovina ponuja vsak petdeseti paket zastoj, druga trgovina pa podari vsako stoto ploščico. Ali se še vedno splača kupiti ploščice v isti trgovini kot prej?
- 7 Z ustreznim računalniškim programom nariši tri izdelke, ki jih uporabljamo v vsakdanjem življenju (npr.: kozarec za šampanjec, koš za perilo, pralni stroj ...), in v obliki teh izdelkov poišči čim več geometrijskih teles.
- 8 Dan je načrt stanovanja družine Petkovič.

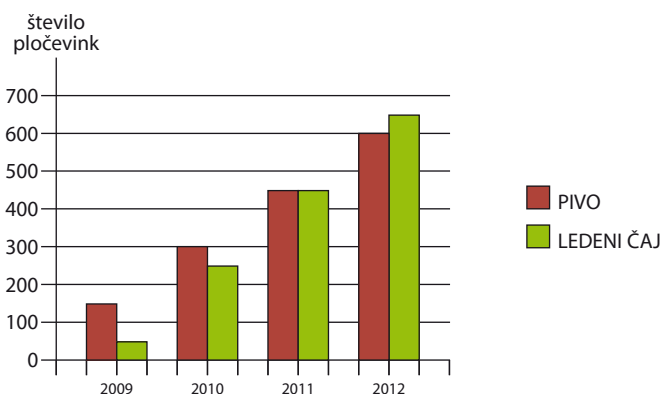


Ker v načrtu ni dovolj podatkov, je sin Miha opravil dodatne meritve za otroško sobo in kuhinjo.

- Na internetu poišči enega od brezplačnih programov za opremljanje stanovanja (npr. Spletni arhitekt, Floor planner, Gliffy) in opremi otroško sobo Petkovičevih s pohištvom slovenskega proizvajalca.
- V istem programu nariši še svojo sobo in jo opremi s pohištvom slovenskega proizvajalca. Pripravi predračun za svojo postavitev in upoštevaj, da ima postelja tudi ležišče.
- Nato poskusi najti najcenejšo možnost za opremo svoje sobe s pohištvom in ugotovi razliko med najcenejšo opremo in opremo prvega predračuna.
- Opremi še celotno kuhinjo Petkovičevih z elementi in gospodinjskimi aparati, če veš, da bodo v ta namen porabili največ 5000 evrov.

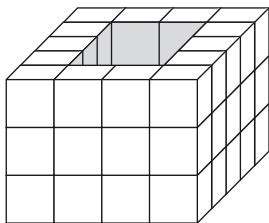
- V družini Veselkovih so poleg staršev še triletna Mija, devetletni Matic in štirinajstletna Lana. Enotedenske poletne počitnice nameravajo preživeti na Jadranskem morju v Dalmaciji.
 - S pomočjo internetnih ponudb poišči tri najcenejše ponudbe za počitnice z nočitvijo in polpenzionom.
 - Izračunaj, najmanj koliko evrov potrebujejo za te enotedenske počitnice, če upošteváš še prevoz, pijačo, sladoled, sadje in opoldanski prigrizek za starejša otroka.
 - Poišči najcenejšo varianto za klice iz Dalmacije, če se bodo enkrat dnevno 10 minut pogovarjali z babico.
 - Razišči še tri najcenejše variante za nočitev z zajtrkom.
 - Razišči še tri najcenejše variante za apartma.
- Devetošolka Celjanka Taja bo s starši preživela pet dni v Londonu. Razišči, koliko jih stane potovanje do Londona in nazaj in koliko časa traja potovanje, če potujejo z letalom, z vlakom, z avtobusom ali z osebnim avtom.
- Imamo bonbone ovite z rdečimi, modrimi in zelenimi papirčki. V neprozorno vrečko damo 10 rdečih, 8 modrih in 14 zelenih bonbonov.
 - Kolikšna je možnost, da iz vrečke izvlečeš bonbon v modrem ali zelenem ovitku?
 - Koliko modrih bonbonov moramo dodati v vrečko, da bomo najverjetne izvlekli moder bonbon?
- Diagram prikazuje dnevno prodajo piva in ledenega čaja v štirih zaporednih letih od maja do vključno septembra. Enak trend prodaje pričakujejo še v naslednjih treh letih.

LETO	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
PIVO	150	300	450	600			
LEDENI ČAJ	50	250	450	650			



- Koliko naj bi prodali piva in koliko ledenega čaja od maja do vključno septembra v letu 2015?
- Razišči, koliko naj bi prodali piva in koliko ledenega čaja v oktobru in novembru ter marcu in aprilu v posameznih letih, če se takrat prodaja zniža za 20 % glede na mesece od maja do septembra.
- V preostalih štirih mesecih leta je prodaja upadla še za dodatnih 20 %. Koliko naj bi dnevno prodali piva in koliko ledenega čaja v posameznih letih v teh mesecih?
- Nariši graf, če za leto 2009 veljajo podatki iz narisane grafa, trend enakomernega naraščanja pa je takšen, da bo prodaja piva in ledenega čaja leta čez štiri leta po 400 pločevink za vsako pijačo.

- 13 Na atletskem športnem dnevu so tekmovali tudi v skoku v daljino. V poročilu so zapisali: Povprečna dolžina skoka za 9. a razred je bila 3,2 metra, povprečna dolžina skoka za 9. b razred pa je bila 3,4 metra. V obeh razredih je enako število učencev in v daljino so skakali vsi učenci. Katera trditev o tekmovanju je zagotovo pravilna?
- Vsak učenec 9. b razreda je skočil dlje od vsakega učenca 9. a razreda.
 - Po skoku vsakega učenca 9. a razreda je skočil eden od učencev 9. b razreda.
 - Kot skupina so učenci 9. b skočili dlje kot učenci 9. a razreda.
 - Več učencev 9. b razreda je skočilo 3,4 metra, kot pa je učencev 9. a skočilo 3,2 metra.
- 14 Dan je prvi tunel zgrajen iz kock enake velikosti, ki so postavljene tako, da je v notranjosti tunela luknja. Drugi tunel naredimo tako, da višine ne spreminjamo, dolžino in širino prvega tunela pa povečamo za en stolpec kock. Po istem navodilu sestavimo še devet tunelov. Razišči, kako se spreminja poraba kock za sestavljanje tunelov po danem navodilu.



- 15 Podjetje Korenček ima pet restavracij. V posameznih restavracijah je zaposlenih 12, 18, 19, 21 in 30 ljudi.
- Določi povprečno število zaposlenih v restavracijah Korenčkovih.
 - Določi mediano števila zaposlenih v 5 restavracijah.
 - Če bi v restavraciji z 18 zaposlenimi število zaposlenih povečali na 10, kako bi to spremenilo mediano in povprečje števila zaposlenih v restavracijah Korenčkovih?
 - Povečaj število zaposlenih glede na prvotno stanje v vsaki izmed restavracij tako, da bo povprečje zaposlenih 30. Koliko novih delavcev dobi službo?

1 Reši enačbe in napravi preizkus.

3T

a) $6x - 4 = 3x + 11$

4T

b) $9x - (3x - 10) = 2(2x + 4)$

4T

c) $\frac{x}{3} - 14 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

4T

č) $(2x + 3)(3x - 4) + 15x = 10x^2 - (2x - 3)^2 + 13$

4T

2 Rok je prvi dan prebral $\frac{1}{4}$ knjige, drugi dan 20 % celotne knjige, tretji dan pa preostalih 143 strani. Koliko strani je imela knjiga?

3 Izračunaj neznani člen sorazmerja.

2T

a) $a : 8 = 6 : 24$

2T

b) $\frac{2}{3} : x = 8 : 1\frac{1}{5}$

2T

c) $5 = 25,3 : (x + 1)$

4T

4 Stranici pravokotnika sta v razmerju 3 : 2, njegov obseg pa meri 85 cm. Izračunaj dolžine stranic tega pravokotnika in njegovo ploščino.

2T

5 a) Daljico AB razdeli na 5 enakih delov.

2T

b) Na daljici AB označi točko T tako, da bo $|AT| : |TB| = 4 : 1$.



3T

6 Stranice trikotnika merijo $a = 6$ cm, $b = 8$ cm in $c = 11$ cm. Najkrajša stranica podobnega trikotnika pa meri 18 cm. Izračunaj obseg podobnega trikotnika.

7T

7 Na sliki je prikazana mreža nekega telesa.

a) Poimenuj to telo.

b) Dopolni trditve.

Telo ima _____ oglišč.

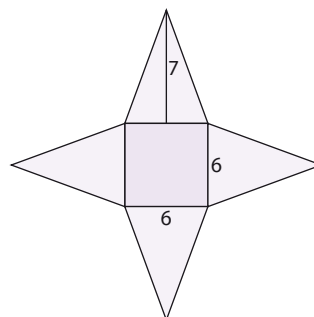
Telo ima _____ robov.

Telo ima _____ osnovnih ploskev.

Telo ima _____ stranskih ploskev.

c) Izračunaj površino narisane mreže.

(Dolžine so podane v centimetrih.)



8 Valj in stožec imata enaki osnovni ploskvi in enaki višini: $O = 9\pi \text{ cm}^2$, $v = 4 \text{ cm}$.

4T

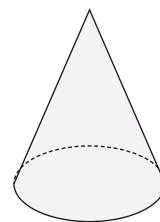
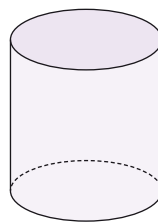
a) Izračunaj prostornini obeh teles.

3T

b) Izračunaj površino valja.

3T

c) Izračunaj površino stožca.



2T

9 a) Nariši linearno funkcijo $f(x) = 3x - 6$, izpiši smerni koeficient in začetno vrednost ter ugotovi, ali je njen graf naraščajoč ali padajoč.

2T

b) Z grafa odčitaj koordinati točk M in N .

3T

10 Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna premici $y = -2x + 7$ in poteka skozi točko $A(3, -1)$.

Možnih je 60 točk.



Špela **na poti k vrhu** (45–53).



Špela **dodatno trenira** (30–35).



Špela **blesti** (54–60).



Špela **na dobri poti** (36–44).



Špela **išče pomoč** (manj kot 30 točk).

Viri slikovnega gradiva:

Stran 7: Kitajska (ZRK), Descartesovi zapisi (ZRK), stran 8: Eisteinov rokopis (Gift of the Jacob E. Safra Philanthropic Foundation/BAL), računalništvo (ZRK), tehnika (pixeldreams.eu/SHT), kalkulator (Sergey150770/SHT) stran 32: Diofant (RZK) stran 33: Arhimedov vzvod (ZRK), debelina drevesa (Robert Crum/SHT), čebele (Africa Studio/SHT) stran 38: tehtnica (Marie C Fields/SHT) stran 52: krpilje (vyskoczilova/SHT) stran 56: srečelov (Africa Studio/SHT) stran 61: otroci (Mat Hayward/SHT) stran 63: družina (gbh007/IST) stran 64: družina (gorillaimages/SHT), par (PhotoVic/IST), mama z otrokoma (BlueOrange Studio/SHT) stran 70: smučarka (Alex Egorov/SHT) stran 71: učenci v razredu (Konstantin Chagin/SHT) stran 74: kolesarja (Jacek Chabraszewski/SHT) stran 75: kolesar (Mario Savoia/SHT), avtobus (majeczka/SHT) stran 77: avtocesta (Egon Zitter/SHT), tovornjak (Kichigin/SHT) stran 83: frnikole (TOMO/SHT) stran 84: kopanje (Christina Richards/SJT) stran 88: simile (ZRK), pantograf (ZRK), Akropolis (Dan Breckwoldt/SHT), da Vinci (Reeed/SHT), Tales (Ken Welsh/BAL) stran 89: Durer (Oleg Golovnev/SHT), lupa (Agorohov/SHT), francoski ključ (STILLFX/SHT), Panteon (Emprize/SHT), obešalniki (Alina Cardiae Photography/SHT), navodilo (ZRK), babuške (marilook/SHT), matice (Africa Studio/SHT), školjke (Lukas Rebec/SHT), sestava (ZRK), sadje (WimL/SHT), jajca (Melica/SHT) stran 92: gozdna pot (Samo Trebizan/SHT) stran 95: košara (Baltskars/SHT), tloris (Teamdaddy/SHT) stran 96: medalja (Taigi/SHT), učenci v klopeh (Olesya Feketa/SHT) stran 103: darilo (Timmary/SHT) stran 104: tabla (ZRK) stran 106: palici stran 108: železnica (konmesa/SHT), zemljevid (pawel.gaul/IST) stran 109: francoski ključ (STILLFX/SHT), zgoščenke (CyberEak/SHT), baterije (Kjpargeter/SHT) stran 110: matice (Therina Groenewald/SHT) stran 115: deljenje daljice (RZK) stran 124: Keopsova piramida (Luciano Mortula/SHT), Evklid (Ken Welsh/BAL), Elementi (Photo © Tarker/BAL), Hilber (ZRK) stran 125: piranske strehe (Jessmine/SHT), zvonik (photobeginner/SHT), Aljažev stolp (Xseon/IST), New York (Songquan Deng/SHT), kocka (Roman Slavik/SHT), krogla (Songquan Deng/SHT), stavba (GalinaPhoto/IST), piramida (Stephen Chung/SHT), korito (mikedabell/IST), stožec (linerpics/SHT), barvice (Chukcha/SHT), žoga (irin-k/SHT), sod (Dja65/SHT), kontejnerji (gary yim/SHT), bowling (tarasov/SHT), kornet (Richard Peterson/SHT), pločevinka (Fotofermer/SHT) stran 127: stol (BEPictured/SHT), kocke (me4o/IST) stran 130: steber (Drazen/SHT) stran stran 131: barvne kocke (Gjermund Alsos/SHT) stran 132: stolpnice (ZRK) stran 135: biljard (Marijus Auruskevicius/SHT), trgovina (Baloncici/SHT), gradbeni oder (Viappy/SHT) stran 139: prizma mavrica (Alex Mit/SHT), tristrana prizma (ZRK), embalaža (ZRK), šestkotnik (Fedorov Oleksiy/SHT) stran 143: krovci (Gordana Sermek/SHT) stran 144: stolp (IGOR ROGOZHNIKOV/SHT) stran 145: lesena prizma (Laborant/SHT) stran 149: zlate palice (Laborant/SHT) str 150: silosi (Jorg Hackemann/SHT) stran 152: kozarec (Oleksii Natykach/SHT), svetilnik (Helen Hotson/SHT) stran 153: silos (MaxyM/SHT) stran 155: sok (ZRK), sveča (Fanfo/SHT), šotor (MarFot/SHT) stran 156: piramida (e X p o s e/SHT), piramida (Nickolay Vinokurov/SHT) stran 157: 1., 2. in 3. piramida (ZRK) stran 159: piramida (ZRK) stran 163: (searagen/IST) stran 164: Aljažev stolp (Xseon/IST), stožec (linerpics/SHT) stran 165: streha (JeffBanke/IST) stran 166: 1., 2. in 3. stožec (ZRK), svetilnik (Simon Bratt/SHT) stran 167: muzej (Valentyna Chukhlyebova/SHT) stran 168: stožec (fotoedu/SHT) stran 170: biljard (Michelangelus /SHT) stran 171: pomaranča (ZRK) stran 173: frnikula (Picsfive/SHT), globus (Belinda Pretorius/SHT), žoga (Ramon Espelt Photography/SHT) stran 174: plesalka (Viorel Sima/SHT), lončarjenje (Thirteen/SHT) stran 180: Leinbitz (Uwe Bumann/SHT), Dirichlet (©Bianchetti/Leemage/BAL), Descartes (Georgios Kollidas/SHT) stran 181: svet funkcij (ZRK), tehtnica (Aleph Studio/SHT), kalkulator (James Hoenstine /SHT), koda (winnonnd/SHT) stran 188: DVD-ji (ZRK), prazni CD-ji (HSNphotography /SHT) stran 204: Cardano (© Look and Learn/BAL), Galilei (Georgios Kollidas/SHT), igralna kocka (ZRK), verjetnostni račun (ZRK) stran 205: ruleta (VojtechVlk/SHT), karte (JetKat/SHT), avtomat (Susan Stevenson/SHT), loto (PeJo/SHT), kocke (TOMO/SHT), statistika (_human/IST), kocke (Marynchenko Oleksandr/SHT), kocke (Tatiana Popova/SHT) stran 208: merjenje pritiska (Andrei Shumskiy/SHT) stran 210: skok v daljino (Maxisport/SHT) stran 212: kocke (TOMO/SHT) stran 214: kocke (Elina Pasok/SHT), bele in rumene kroglice (ZRK) stran 216: krogle (balein/SHT), cent (ZRK) stran 217: ruleta (Zalina/SHT) stran 219: 50 centov (ZRK) stran 229: sok (Evlakhov Valeriy/SHT) stran 230: hiša (Tony Moran/SHT), bazen (315 studio by khunaspix/SHT)

SHT – Shutterstock, IST – iStockphoto, BAL – Bridgeman Art Library, ZRK – arhiv Založbe Rokus Klett

9letka.net

Več o devetletni osnovni šoli najdete na naslovu www.devletka.net.

Jože Berk, Jana Draksler in Marjana Robič

Skrivnosti števil in oblik 9

Učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole

Izdala in založila: Založba Rokus Klett, d. o. o.

Za založbo: Maruša Kmet

Direktor produkcije: Klemen Fedran

Oblikovna zasnova naslovnice: Jasna Karnar

Oblikovna zasnova notranjosti: Jasna Karnar

Oblikovna izvedba in prelom: Boštjan Dimnik

1. elektronska izdaja

Ljubljana 2014