

1. SKLOP SEMINARSKIH NALOG - IPA - KOMPLEKSNA ANALIZA - KOMPLEKSNA
ŠTEVILA/FUNKCIJE

1. Dana je funkcija $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

- (a) Pokažite, da je f injektivna in poišči njeno inverzno funkcijo f^{-1} .
- (b) Dokažite, da f preslika enotsko krožnico brez točke 1 natanko na imaginarno os, t.j.
- za $z = x + iy$ z lastnostjo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, $z \neq 1$ velja $\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = 0$. (Nasvet: Utemeljite/izračunajte $\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{(x+iy+1)(x-iy-1)}{(x+iy-1)(x-iy-1)} = \frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2}$, ter določite realni del $\frac{z+1}{z-1}$ za $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.)
 - za $z = iy$ (oziroma $z = \operatorname{Re}(z) = 0$) pa je $|f^{-1}(iy)| = 1$. (Nasvet: Vstavite $z = iy$ v predpis $f^{-1}(z)$ in izračunajte absolutno vrednost.)

2. Dano je število $z = -1 + i\sqrt{3}$.

- (a) Število z zapišite v polarni obliki.
- (b) Kaj geometrijsko predstavlja množenje s številom z ? Če je $w = 3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$, koliko je potem zw (v polarni obliki)?
- (c) Izračunajte z^{2025} .
- (d) Zapišite vse tri kubične korene števila z . (Korene je dovolj podati v polarni obliki.) Skicirajte jih v kompleksni ravnini. Kaj opazite?