# 1. sklop seminarskih nalog - IPA - Kompleksna analiza - CR sistem

V izogib nesporazumom je pri vsaki nalogi pripisano, kateri študent/ka jo bo predstavil.

1. Dane so kompleksne funkcije

   (a) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   (b) $f(x+iy) = e^{x^2-y^2} + i(y\cos(2xy) - x\sin(2xy))$, $z \in \mathbb{C}$.

   Naloga:

   - Ugotovi, ali je dana funkcija holomorfna oziroma poišči njen kompleksni odvod. (Nasvet: Uporabi definicijo kompleksnega odvoda ali CR-sistem enačb.)
   - Funkcije zapiši v odvisnosti od $x, y$ namesto $z, \bar{z}$ (oziroma obratno).
   - Določi še $\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$ in $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$.

2. **Definicija**: Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u \colon D \to \mathbb{R}$ je harmonična na odprti množici $D \subset \mathbb{R}^2$, če je velja

   $$\triangle u(x,y) := (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D.$$

   Opomba: $\triangle$ rečemo Laplaceov operator.

   Dana je funkcija

   $$v(x,y) = 2 - y + x^3 - 3xy^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}.$$

   (a) Pokaži, da je $v$ harmonična.

   (b) Poišči nedoločeni integral (glede na spremenljivko $x$): $U(x,y) := \int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dx$. Popravi $U(x,y)$ s tako funkcijo ene spremenljivke $\alpha(y)$, t.j. $u(x,y) := U(x,y) + \alpha(y)$, da bosta $u, v$ ustrezali enačbi $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. (Določi ustrezno funkcijo $\alpha(y)$.)

   (c) Preveri, da zgoraj definirana $u$ skupaj z $v$ ustreza tudi enačbi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

   (d) Utemelji, zakaj je $f = u + iv$ holomorfna funkcija. Pokaži tudi, da je $f$ do konstante natančno edina holomorfna funkcija z lastnostjo $\mathrm{Im}(f) = v$. (Nasvet: Če je tudi $\widetilde{f} = \widetilde{u} + iv$ holomorfna, opazi, da je potem razlika $g := f - \widetilde{f} = u - \widetilde{u}$ holomorfna in realna, torej konstantna.)

   (e) Funkcijo $f$ nato zapiši še z $z, \bar{z}$ namesto z $x, y$.