3. sklop seminarskih nalog - IPA - Kompleksna analiza - Kompleksna eksponentna in logaritemska funkcija

1. Dokaži/utemelji naslednje trditve:

   (a) Za eksponentno kompleksno funkcijo (t.j. $e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y)$) dokaži identiteto $e^{z+w} = e^z e^w$ za vse $z, w \in \mathbb{C}$.

   (b) Kako $f(z) = e^z$ preslika daljico $\{z = 2 + iy \mid 0 \leq y \leq 2\pi\}$, premico $\{z = x + i\frac{\pi}{4} \mid x \in \mathbb{R}\}$ in pas $\{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < 2\pi\}$?

   (c) Pri danem $\alpha \in \mathbb{C}$ je kompleksna potenčna funkcija definirana na naslednji način: $f(z) = z^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Log}(z)}$. Izračunaj i^i, $(-1+i)^{1+i}$.

   (d) Reši enačbo $e^z = 2 - 2i$.

2. Dokaži/utemelji naslednje trditve:

   (a) Kompleksni logaritem $\mathrm{Log}\colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Log}(z) := \ln|z| + i \arg(z)$, kjer je log običajni logaritem, arg pa argument
   $$\arg(z) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \mathrm{Re}(z) > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi, & \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$
   je holomorfna funkcija.

   (b) Izračunaj $\mathrm{Log}(-1+i)$, $\mathrm{Log}(3i)$.

   (c) Reši enačbo $\mathrm{Log}(z) = 1 + \frac{\pi}{3}i$.