

# 1. kolokvij iz Izbranih poglavij analize

PeF-Ma-vezave

25. april 2024

1. (a) [13] Poiščite konstanto  $a \in \mathbb{C}$ , da bo funkcija

$$f(x, y) = x^3 + axy^2 - y + i(3x^2y - y^3 + x)$$

holomorfná povsod na  $\mathbb{C}$ . Pri dobljenem  $a$  zapiši predpis funkcije  $f$  še v kompleksni notaciji, t.j. v odvisnosti od  $z, \bar{z}$  namesto  $x, y$ .

- (b) [5] Ugotovi, ali je kompleksna funkcija, ki je podana s predpisom  $g(z) = z|z|$ , kompleksno odvedljiva v točki  $z = 0$ .

2. (a) [9] Poišči vse  $z \in \mathbb{C}$ , ki rešijo enačbo

$$\sin(iz) = i.$$

Nasvet: Upoštevaj, da velja  $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ .

- (Bonus) [5] Ali je funkcija  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sin(iz)$  omejena? (Nasvet: Lahko uporabiš Liouvilleov izrek.)

3. (a) [13] Izračunaj integral  $\int_L |z|^2 dz$  po daljici  $L$  od  $-1$  do  $i$ , ter integral po pozitivno orientirani krožnici  $\int_{|z+i|=1} \frac{z}{z+i} dz$ .

- (b) [6] Ali drži naslednja trditve:

*Trditve:* Obstaja holomorfná funkcija  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , katere kompleksni odvod ni zvezen?

Ali velja realna verzija zgornje trditve, t.j. ali obstaja realna odvedljiva, katere odvod ni zvezen? (Če obstaja, zapiši tudi primer take funkcije.)

4. (a) [10] Funkcijo  $h(z) = z^3(\cos(z^2) - 1)$  razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke  $z_0 = 0$  in določi območje njene konvergence. Če ima  $f$  ničlo v točki  $z_0 = 0$ , določi njeno stopnjo.

- (b) [5] Poišči tako holomorfnó funkcijo  $p$ , ki je definirana v okolici točke  $z_1 = i$ , da je  $p(i) = 2$ ,  $p'(i) = 3$  in ničelne višje odvode v  $z_1 = i$ , t.j.  $p^{(n)}(i) = 0$  za  $n \geq 2$ . Ali je enolično določena?