Aksiom ravnila

1. Imejmo ravnino $\mathbb{R}^2$ z običajno evklidsko metriko, torej razdaljo med poljubnima točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ izračunamo z

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

   Poiščite koordinatni sistem na premici z enačbo $y = 3x - 1$, v katerem je koordinata točke $A(1, 2)$ enaka 0, koordinata točke $B(4, 11)$ pa je pozitivno število. Določite koordinato točke $C(-2, -7)$ v tem koordinatnem sistemu.

2. V kartezični ravnini $\mathbb{R}^2$ definirajmo razdaljo med točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2) s predpisom

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

   (a) Pokažite, da v ravnini, opremljeni s to metriko, velja aksiom ravnila.

   (b) Poiščite koordinatni sistem poljubne premice z enačbo $y = ax + b$ oz. $x = a$ za poljubni števili $a, b \in \mathbb{R}$.

   (c) Poiščite koordinatni sistem na premici z enačbo $y = -x + 4$, v katerem je koordinata točke $A(4, 0)$ enaka 0, koordinata točke $B(2, 2)$ pa je negativno število.

3. *Racionalna ravnina* je množica urejenih parov racionalnih števil $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$. Torej je racionalna ravnina podmnožica kartezične ravnine $\mathbb{R}^2$. Premice v tej ravnini so množice oblike

$$p = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

   za poljubna racionalna števila $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pri čemer a in b nista oba hkrati enaka 0. Razdalje med točkami v racionalni ravnini merimo v evklidski metriki.

   (a) Dokažite, da racionalna ravnina ustreza vsem incidenčnim aksiomom, ne zadošča pa aksiomu ravnila A1.

   (b) Dokažite, da se krožnici s središčema v $A(0, 0)$ in $B(2, 0)$ ter polmerom 2 v racionalni ravnini ne sekata.

4. S pomočjo znanih aksimov pokažite, da v ravninski geometriji obstaja:

   (a) neskončno mnogo točk.

   (b) neskončno mnogo premic.

5. Preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *izometrija*, če je bijektivna in velja $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Pokaži, da je vsaka izometrija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblike $f(x) = ax + c$, kjer je $a \in \{-1, 1\}$ in $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Naj bo f koordinatni sistem za premico p. Pokažite, da je vsak drug koordinantni sistem za p oblike $af + c$, kjer je $a \in \{-1, 1\}$ in $c \in \mathbb{R}$.