

Separacija ravnine

1. Dokažite naslednje trditve.

- (a) Presek dveh konveksnih množic spet konveksna množica.
- (b) Unija dveh konveksnih množic ni nujno konveksna množica.
- (c) Poljubna daljica \overline{AB} je konveksna množica.
- (d) Poljuben poltrak \overrightarrow{AB} je konveksna množica.

2. Privzamemo, da velja aksiom A2.

- (a) Naj bo p premica in $A, B \notin p$. Dokažite, da velja

$$\overline{AB} \text{ seka } p \iff A \text{ in } B \text{ ležita na nasprotnih bregovih premice } p.$$

- (b) Naj bodo A, B in C nekolinearne točke in naj bo p premica, ki ne vsebuje nobene od točk A, B in C . Dokažite, da p ne more hkrati sekati vseh treh stranic trikotnika $\triangle ABC$.

3. Naj bo M poljubna množica točk. Označimo s $p(M)$ unijo vseh daljic, katerih krajišči sta vsebovani v množici M , tj.

$$p(M) = \bigcup_{A, B \in M} \overline{AB}.$$

Ali je množica $p(M)$ vedno konveksna? Odgovor utemeljite.

- 4. Kako bi smiselno definirali notranjost trikotnika $\triangle ABC$? Ali je notranjost poljubnega trikotnika konveksna množica? Dokažite naslednjo trditev: Če premica p seka notranjost trikotnika $\triangle ABC$, potem p seka vsaj eno od stranic tega trikotnika.
- 5. Pokažite, da je štirikotnik $\square ABCD$ konveksen natanko tedaj, ko se njegovi diagonalni sekata.
- 6. Dokažite, da poljuben (ne nujno konveksen) $\square ABCD$ premore stranico, za katero sta preostala dva oglišča, ki ne ležita na njej, na nasprotnem bregu nosilke te stranice.
- 7. Poiščite primer incidenčne geometrije, v kateri velja A1, ne velja pa A2.
- 8. V sferični geometriji je množica točk sfera $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, premice pa so preseki sfere z ravninami v \mathbb{R}^3 , ki potekajo skozi izhodišče. Razdaljo med dvema točkama A in B na sferi definiramo kot dolžino krajšega loka s krajiščema v točkah A in B na premici, ki ti dve točki vsebuje. Kako je z veljavnostjo aksiomov I-1, I-2, I-3, A1 in A2 v tej geometriji?