Evklidska geometrija

1. Dokaži, da je evklidski aksiom o vzporednici ekvivalenten naslednjima trditvam.

   (a) Če je $p \parallel q$ in $t \perp p$, potem je $t \perp q$.

   (b) Če za premice p, q, r in s velja $p \parallel q$, $r \perp p$ in $s \perp q$, tedaj je bodisi $r = s$ bodisi $r \parallel s$.

2. V evklidski geometriji imamo dane tri nekolinearne točke A, B, C, za katere velja $AC = BC$ ter $\mu(\angle BAC) = 70$. Naj bo D točka na stranici $\overline{BC}$, za katero velja $AB = AD$. Izračunajte velikosti kotov $\angle DAC$ in $\angle ADC$.

3. Dokažite, da v evklidski geometriji velja naslednji izrek: Dolžina katete pravokotnega trikotnika je geometrijska sredina dolžine hipotenuze in dolžine projekcije te katete na hipotenuzo.

4. V evklidski geometriji je dan trikotnik $\triangle ABC$. Označimo z D, E in F zaporedoma razpolovišča stranic nasproti oglišč A, B in C. Dokaži, da velja $\triangle EDC \cong \triangle AFE \cong \triangle FBD \cong \triangle DEF$.

5. Naj bodo D, E in F razpolovišča stranic nasproti oglišč A, B in C trikotnika $\triangle ABC$. Naj bo $l = \overleftrightarrow{AD}$ ter naj bosta m oziroma n vzporednici k premici l, ki vsebujeta točki E oziroma F. Označimo $m \cap \overline{BC} = \{H\}$ in $n \cap \overline{BC} = \{I\}$.

   (a) Dokaži, da je $CH = HD$ in $DI = IB$. Sklepaj, da velja $CH = HD = DI = IB$.

   (b) Prepričaj se, da n seka daljico $\overline{EB}$ v neki točki J.

   (c) Naj bo G presečišče težiščnic $\overrightarrow{AD}$ in $\overline{BE}$. Dokaži, da je $BJ = JG = GE$ in $BG = 2GE$.

6. V evklidski geometriji je dan trikotnik ΔABC s stranicami dolžine $a = BC$, $b = AC$ ter $c = AB$. Naj bo X točka na stranici $\overline{BC}$, tako da velja $AX = p$, $BX = m$ in $XC = n$. Dokaži, da tedaj velja $a(p^2 + mn) = b^2m + crn$.

7. Dokaži, da je trikotnik enakokrak natanko tedaj, ko ima skladni težiščnici.