Metrični prostori in incidenčna geometrija

1. V kartezični ravnini $\mathbb{R}^2$ definiramo dve razdalji med točkama (x_1, y_1) in (x_2, y_2) s predpisoma
$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$
in
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$
   (a) Preverite, da sta tako definirani razdalji metriki v ravnini $\mathbb{R}^2$.
   (b) Izračunajte razdaljo med točkama $A(-2, 3)$ in $B(4, 1)$ v obeh metrikah.
   (c) Poiščite vse točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $d_1((0, 0), (x, y)) = 3$, ter skicirajte krožnico $K(C, 3)$ s središčem v točki $C(0, 0)$ in polmerom 3 v tem metričnem prostoru. Skicirajte tudi krožnico $K((-5, 6), 2)$. Postopek ponovite z metriko d_∞ in primerjajte dobljene slike.

2. Na enotski krožnici v kompleksni ravnini $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ želimo definirati razdaljo med točkami. Če se nahajamo na krožnici, od točke A do točke B pridemo vzdolž krožnega loka, ki ti dve točki povezuje. Ker je krožnica sklenjena, imamo dva loka, ki ti dve točki povezujeta, smiselno pa je potovati vzdolž krajšega. Poljubno točko krožnice lahko v polarnih koordinatah na enoličen način izrazimo kot $z = \cos(\phi) + i\sin(\phi) = e^{i\phi}$, kjer je $\phi \in [0, 2\pi]$. Tako bi za razdaljo med dvema točkama krožnice lahko razglasili:
$$d(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}) = \min\{|\phi_1 - \phi_2|, 2\pi - |\phi_1 - \phi_2|\}.$$
Preverite, če je tako definirana razdalja metrika. Na primerih pokažite, kako izgledajo odprte in zaprte krogle ter sfere v tem metričnem prostoru.

3. (a) V neki geometriji je 5 točk A, B, C, D in E. Premice v tej geometriji so množice $\{A, B, C\}$, $\{B, D, E\}$ in $\{A, C, D, E\}$. Za vsakega od incidenčnih aksiomov ugotovite, ali v dani geometriji velja, in odgovor natančno utemeljite.
   (b) V neki drugi geometriji je 5 točk A, B, C, D in E, premice so množice $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ in $\{A, C, D, E\}$. Za vsakega od incidenčnih aksiomov ugotovite, ali v dani geometriji velja, in odgovor natančno utemeljite.

4. V neki geometriji imamo 6 točk A, B, C, D, E in F. Premice so dane kot množice $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$, $\{A, E\}$, $\{A, F\}$, $\{C, D\}$ in $\{C, F\}$.

(a) Za vsakega od incidenčnih aksiomov preverite, ali mu dana geometrija ustreza.
(b) Katere premice bi morali dani geometriji dodati, da bi ta ustrezala vsem trem incidenčnim aksiomom?
(c) Ali je zgornja razširitev s premicami enolična?

Vse odgovore natančno utemeljite.

5. Predstavite model incidenčne geometrije, ki vsebuje natanko 5 točk in za katero velja, da vsaka premica vsebuje natanko dve točki. Odgovore natančno utemeljite.

6. Imejmo geometrijo $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P})$, katere točke so točke ravnine $\mathbb{R}^2$, premice pa so vse krožnice v ravnini $\mathbb{R}^2$. Za vsakega od incidenčnih aksiomov ugotovite, ali mu dana geometrija ustreza ali ne, ter odgovore jasno utemeljite.

7. Poiščite in predstavite model geometrije, v katerem:

   (a) veljata I-1 in I-2, aksiom I-3 pa ne velja.
   (b) veljata I-2 in I-3, aksiom I-1 pa ne velja.
   (c) veljata I-1 in I-3, aksiom I-2 pa ne velja.

8. V incidenčni geometriji dokažite naslednje trditve.

   (a) Če je p poljubna premica, potem obstaja vsaj ena točka T, ki ne leži na p.
   (b) Če je T poljubna točka, potem obstajata vsaj dve različni premici p in q, tako da T hkrati leži na p in q.
   (c) Če je p poljubna premica, potem obstajata vsaj dve premici q in r, tako da so p, q in r različne in da q in r obe sekata premico p.
   (d) Če je T poljubna točka, potem obstaja vsaj ena premica p, tako da točka T ne leži na premici p.
   (e) Obstajajo tri različne premice p, q in r, tako da nobena točka ne leži hkrati na vseh treh premicah.
   (f) Če je T poljubna točka, potem obstajata točki U in V, tako da so T, U in V nekolinearne.