

2. kolokvij in 1. izpit iz Izbranih poglavij analize

PeF-Ma-vezave

20. junij 2024

1. (a) [6] (KOLOKVIJ) Rešite dano linearno diferencialno enačbo pri danem začetnem pogoju:

$$xy' + 2x^2y = (x^2 + 1)e^{-x^2}, \quad y(1) = 2e^{-1}.$$

- (b) [5] Pri neki kemijski reakciji iz 2 gramov snovi A začne nastajati snov B in po eni minuti imamo že 1 gram snovi B . Hitrost povečevanja mase snovi B v času t je sorazmerna kvadratu mase prisotne snovi A v času t , t.j. $y'(t) = k(2 - y(t))^2$, kjer je $y(t)$ masa snovi B v času t , k pa neka konstanta. Kako se v odvisnosti od časa spreminja masa snovi B ? (Pri ustreznih začetnih pogojih rešite omenjeno diferencialno enačbo.)

2. Dana je diferencialna enačba pri začetnem pogoju:

$$y' = (x + y)^2, \quad y(0) = 0.$$

- (a) [5] Z Eulerjevo metodo poiščite približno rešitev dane naloge; napravite 3 korake dolžine $\frac{1}{2}$.
(b) [5] (KOLOKVIJ) Ali se približki, ki jih dobivamo z Eulerjevo metodo, bolj približajo rešitvi naloge po velikem številu korakov ali po korakih krajše dolžine? Ali je tako tudi pri Picardovi iteraciji? Odgovora natančno utemeljite.

3. Dan je sistem linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 7y_2 + f(x), \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2 + g(x). \end{aligned}$$

- (a) [6] Poiščite splošno rešitev homogenega sistema, t.j. za $f(x) = g(x) = 0$.
(b) [4] V primeru, ko je $f(x) = -8x - 5$ in $g(x) = 4x - 3$, najprej z uporabo nastavka $y_1 = Ax + B$ in $y_2 = C$, kjer so A , B in C realne konstante, poiščite partikularno rešitev danega nehomogenega sistema, ter nato zapišite še splošno rešitev.

4. [9] (KOLOKVIJ) Poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe 2. reda:

$$y'' + 2y' + 2y = xe^x.$$

5. (a) [6] (IZPIT) Za vsako izmed funkcij $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3y - 3 + i(y^3 + 3x^2y - 3x + 1)$ in $g(z) = \sin(\bar{z})$ ugotovite, ali je holomorfná povsod, kjer je definirana.
(b) [6] (IZPIT) Izračunajte integral po daljici L od $-i$ do 2, ter integral po pozitivno orientirani krožnici z enačbo $|z - i| = 2$:

$$\int_L z|z|dz, \quad \int_K \frac{z}{z^2 + 4} dz.$$

- (c) [6] (IZPIT) Naj za holomorfnó funkcijo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ velja, da je $f(z) = 3$, če je le $|z| = 3$. Kaj lahko sklepate o funkciji f ? Odgovor utemeljite.

6. (a) [6] (IZPIT) Funkcijo $h(z) = \frac{3}{z+2}$ razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke $z_0 = i$ in določite območje njene konvergence.

- (b) [6] (IZPIT) Ugotovite, ali drži naslednja trditev:

Trditev: Obstaja holomorfná funkcija na enotskem disku, ki ni analitična?

Ali velja realna verzija zgornje trditve, t.j. ali obstaja taka realna neskončnokrat odvedljiva funkcija na intervalu $(-1, 1)$, ki je ne moremo razviti v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = 0$? (Če obstaja, zapišite tudi primer take funkcije.)