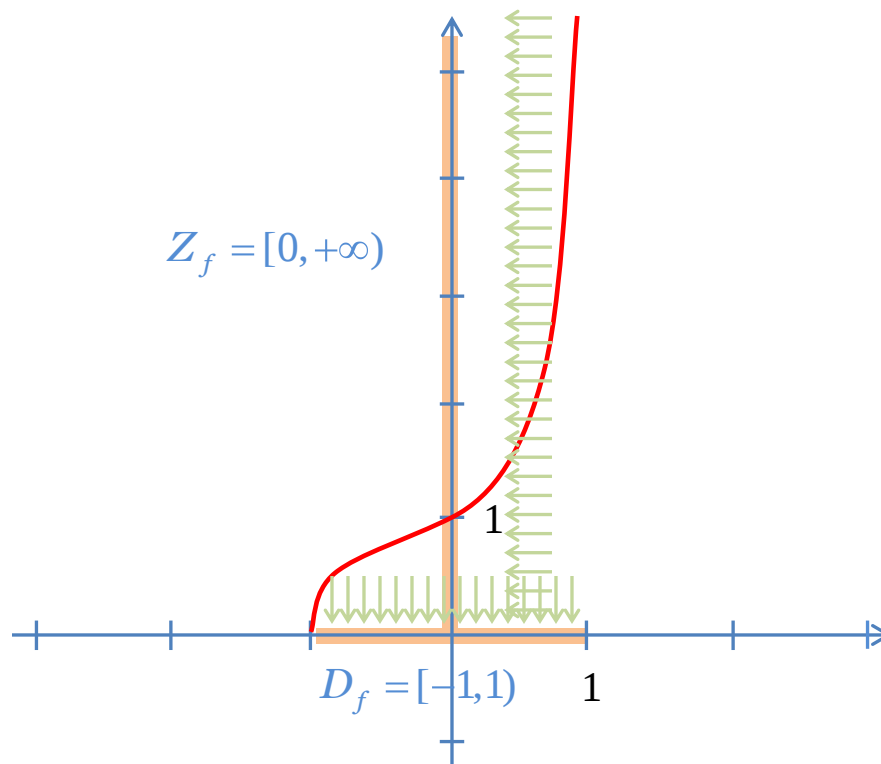


ZNAČILNOSTI FUNKCIJE, KI SO RAZVIDNE IZ GRAFA

1. Definijsko območje, zaloga vrednosti
2. Naraščanje in padanje, ekstremi
3. Ukrivljenost
4. Trend na robu definijskega območja
5. Periodičnost in simetrije

Definicijsko območje in zaloga vrednosti

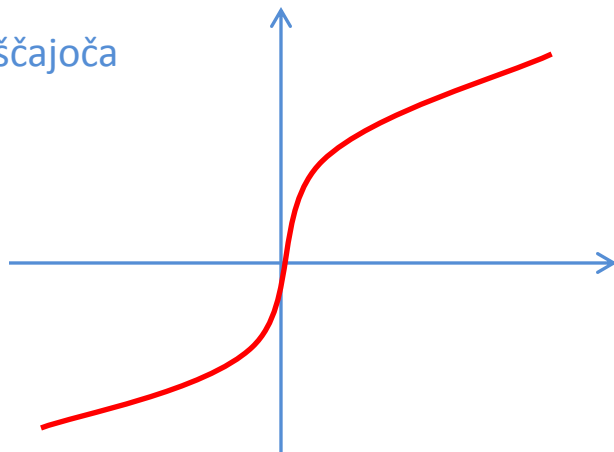
$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$



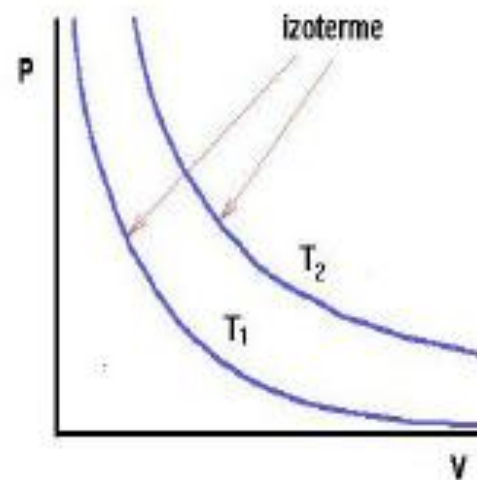
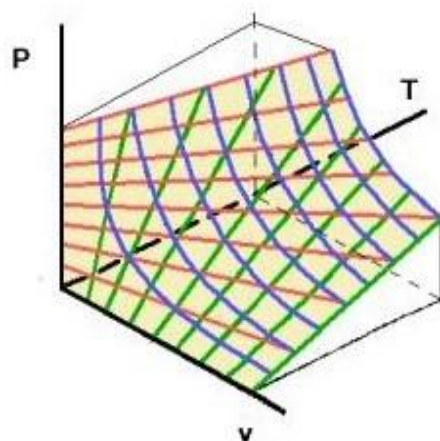
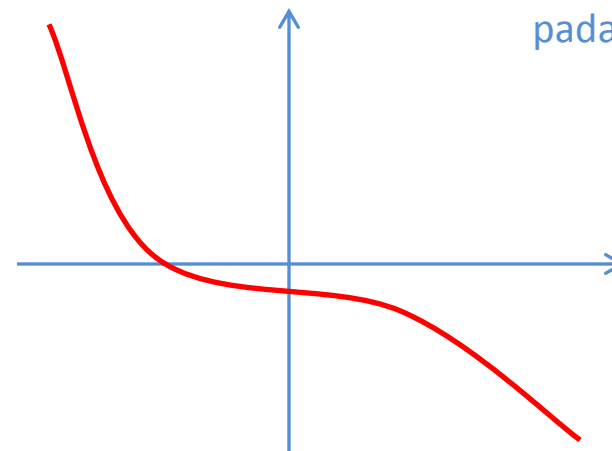
Definicijsko območje D_f je 'senca' (tj. slika projekcije) grafa na osi x , zaloga vrednosti Z_f pa je senca na osi y .

Naraščanje in padanje funkcije

naraščajoča



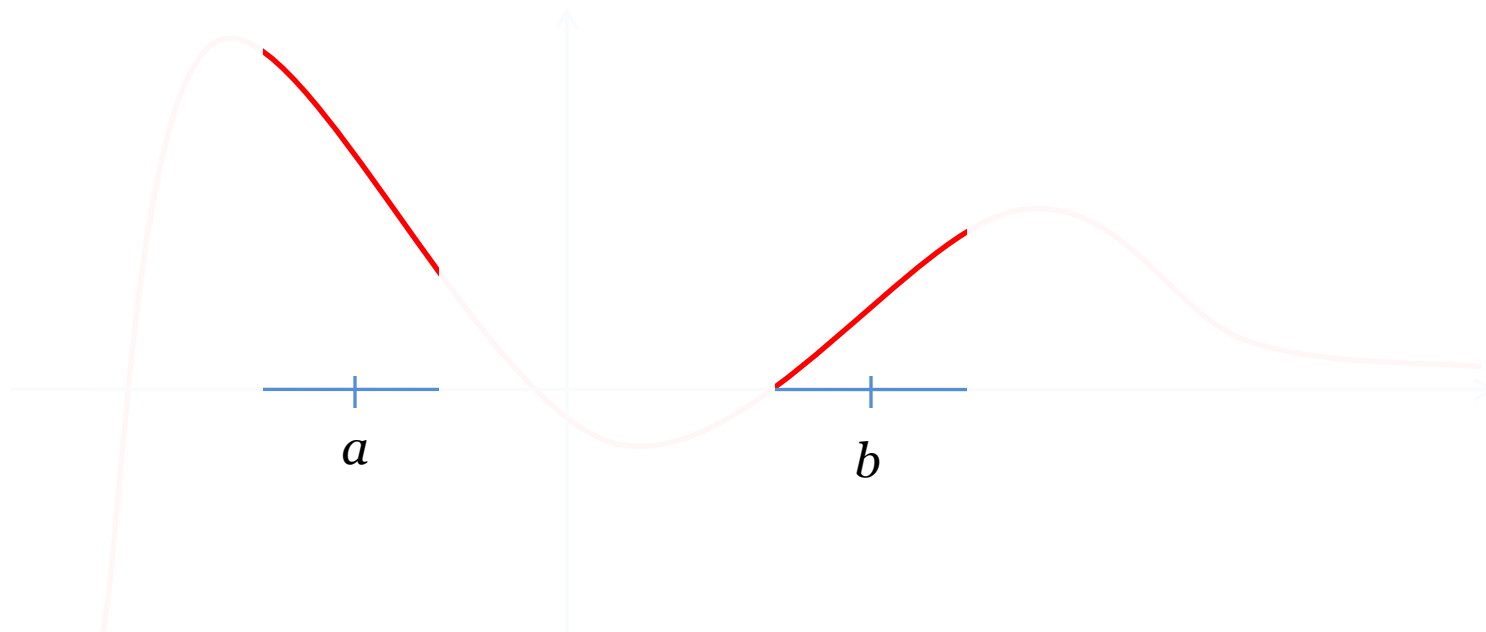
padajoča



Pri stalni temperaturi je tlak padajoča funkcija prostornine.

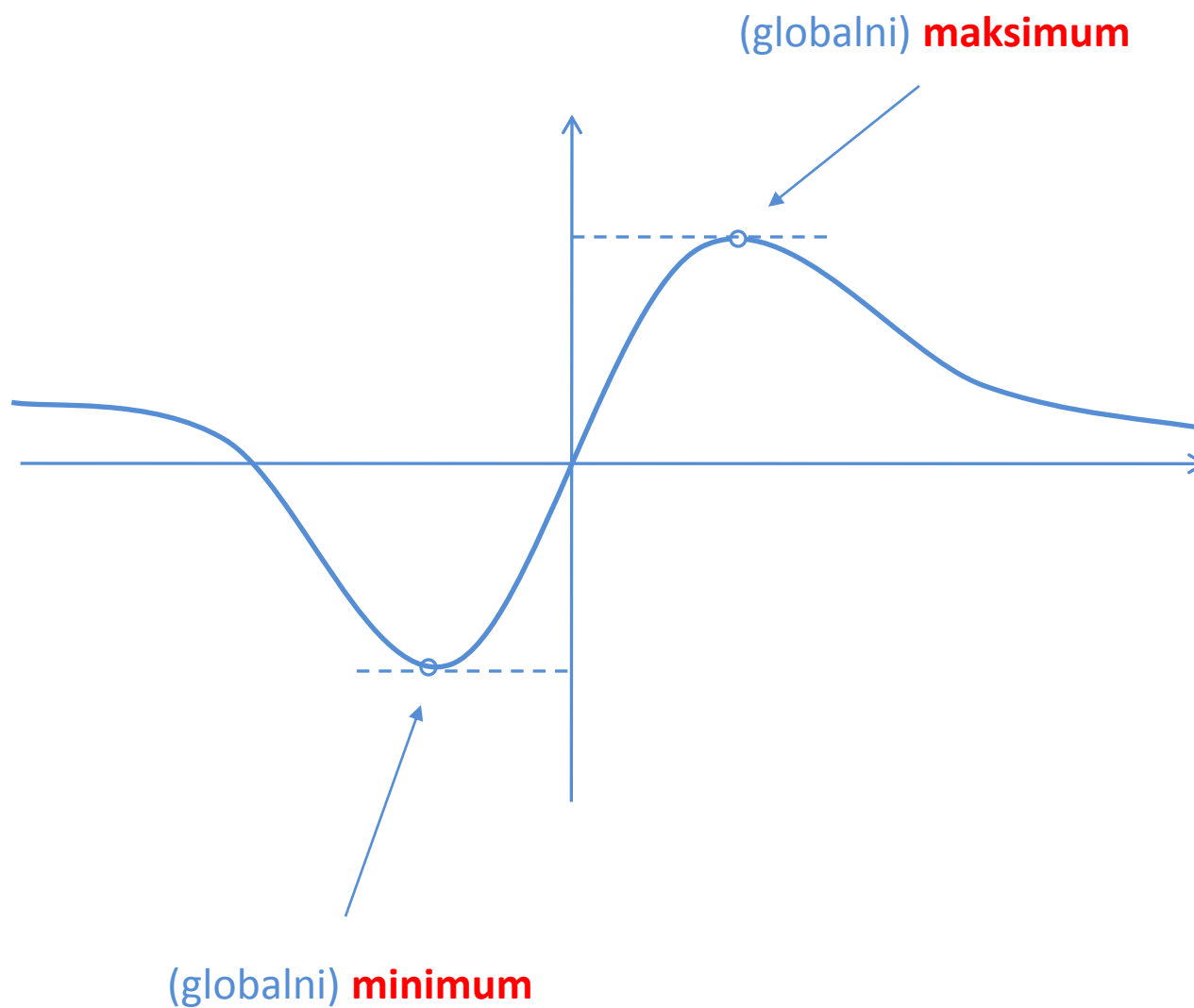
Lokalno naraščanje in padanje funkcije

pri a je funkcija **padajoča**

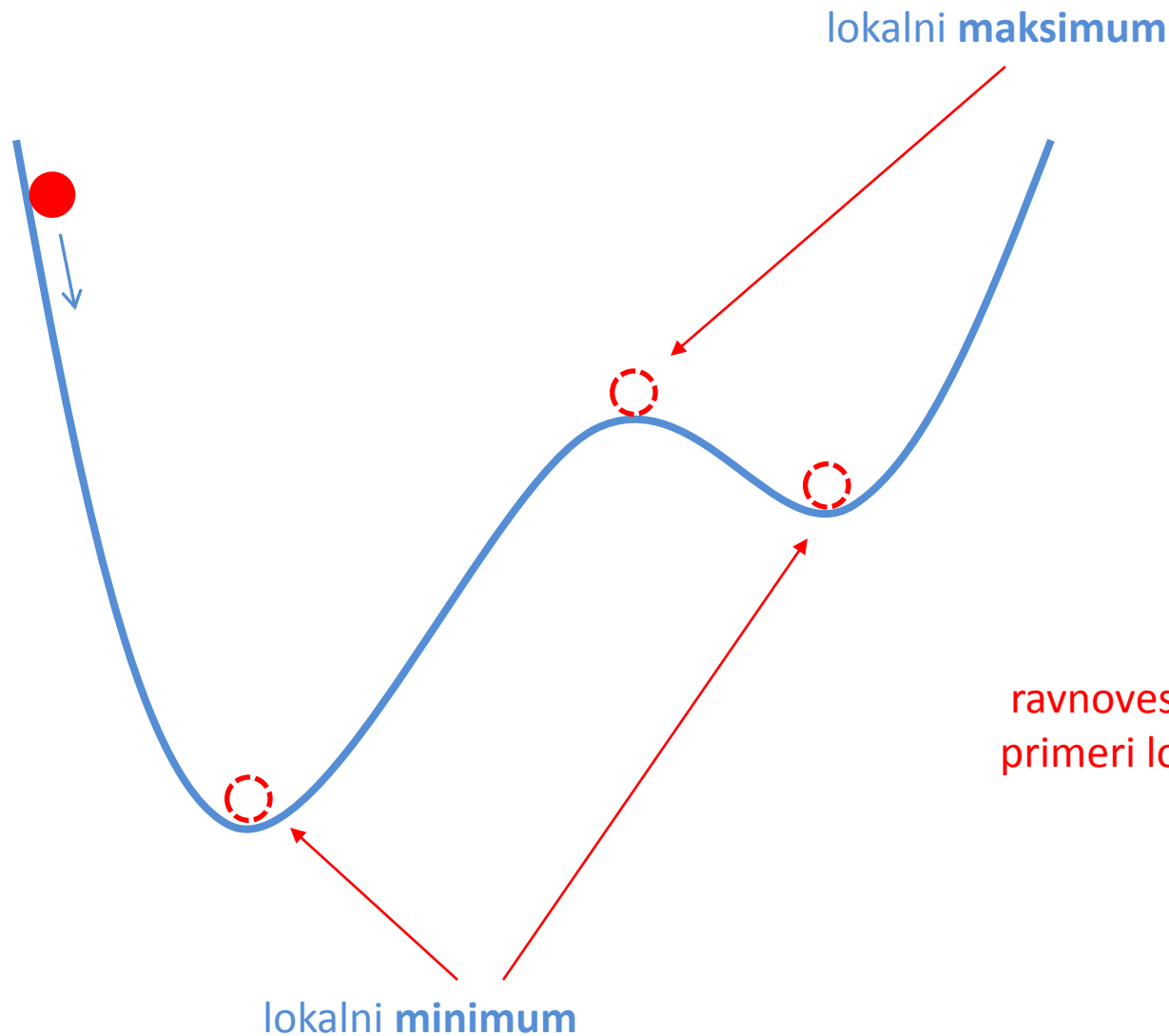


pri b je funkcija **naraščajoča**

Globalni ekstremi

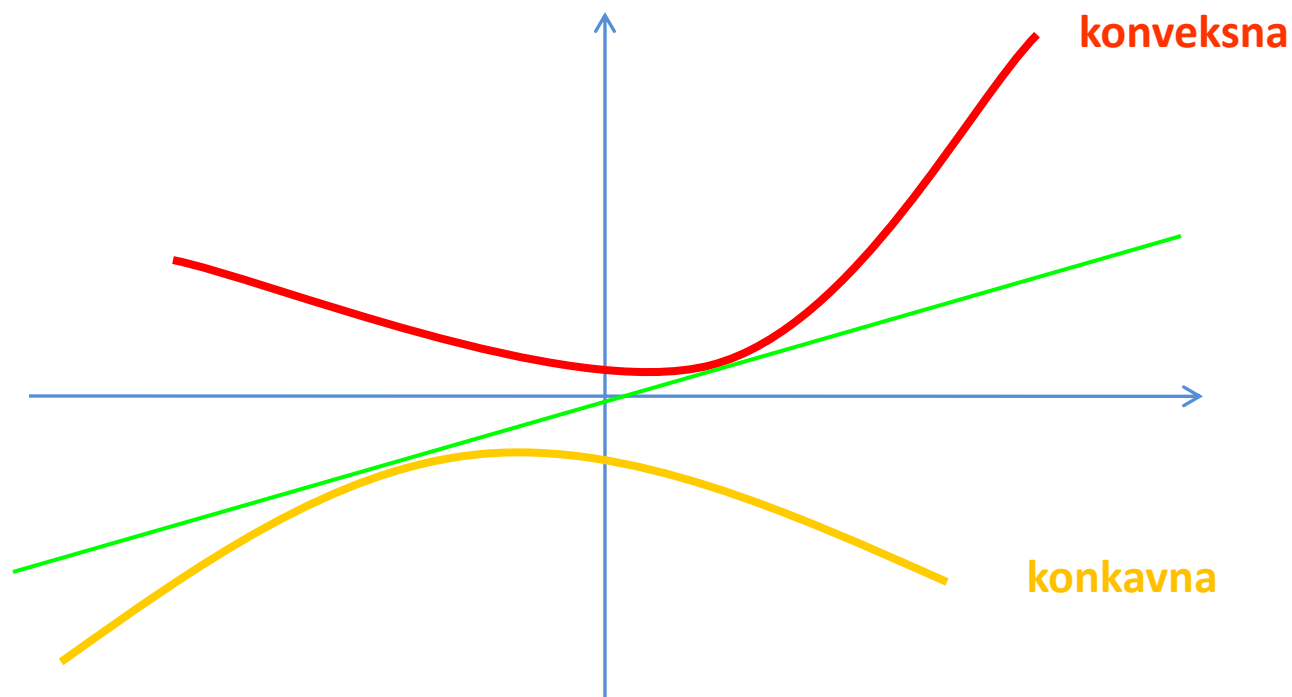


Lokalni ekstremi



Konveksnost in konkavnost

Funkcija je **konveksna**, če se njen graf krivi navzgor in **konkavna**, če se graf krivi navzdol.

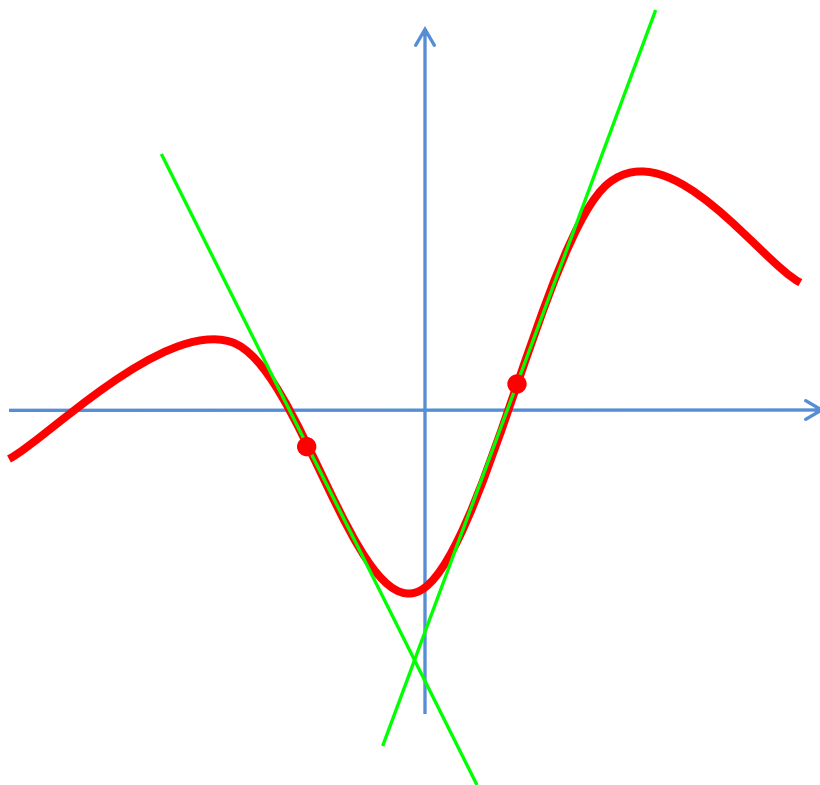


konveksnost grafa ponazarja
pospeševanje procesa

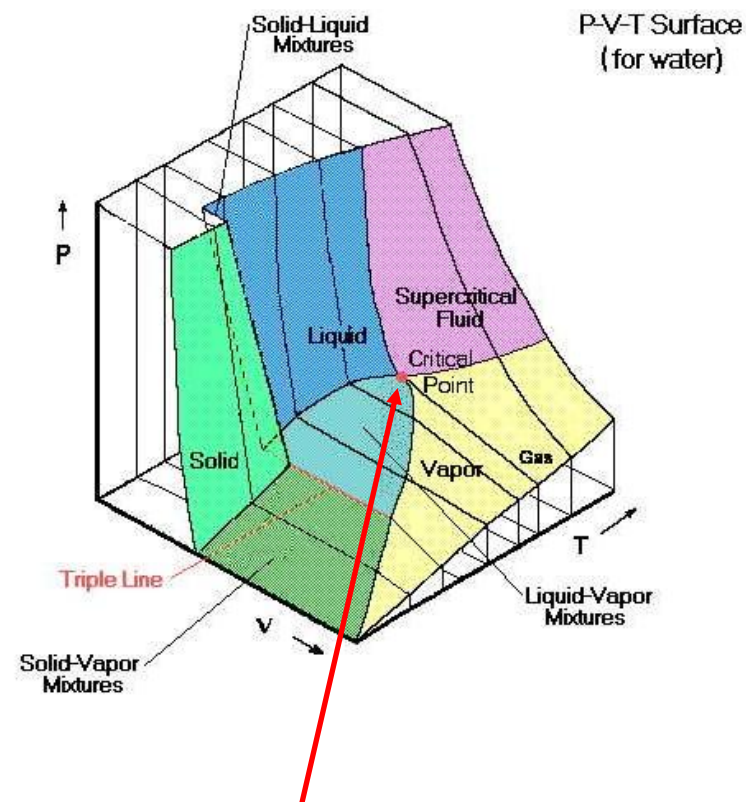
konkavnost grafa ponazarja
pojemanje procesa

Prevoji

Prevoji so točke, pri katerih funkcija preide iz konveksne v konkavno, ali obratno.



Prevoj je točka, pri kateri proces preide iz pospeševanja v zaviranje ali obratno.

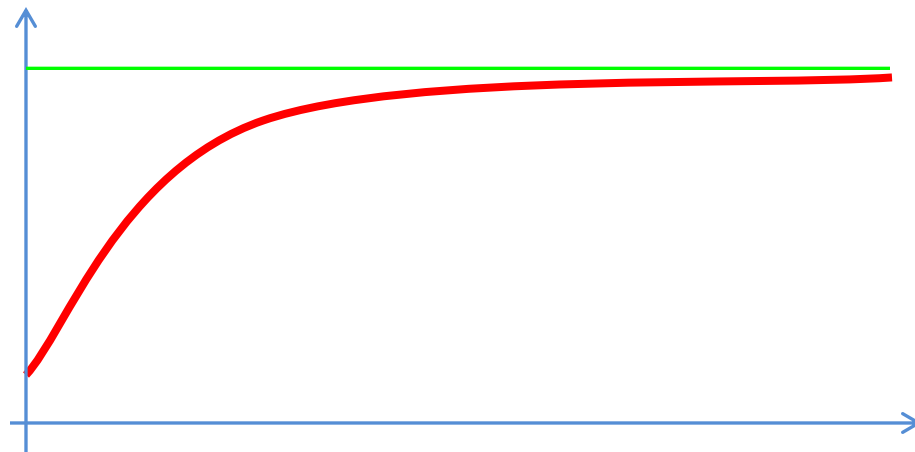


Kritična točka snovi je prevoj na kritični izotermi.

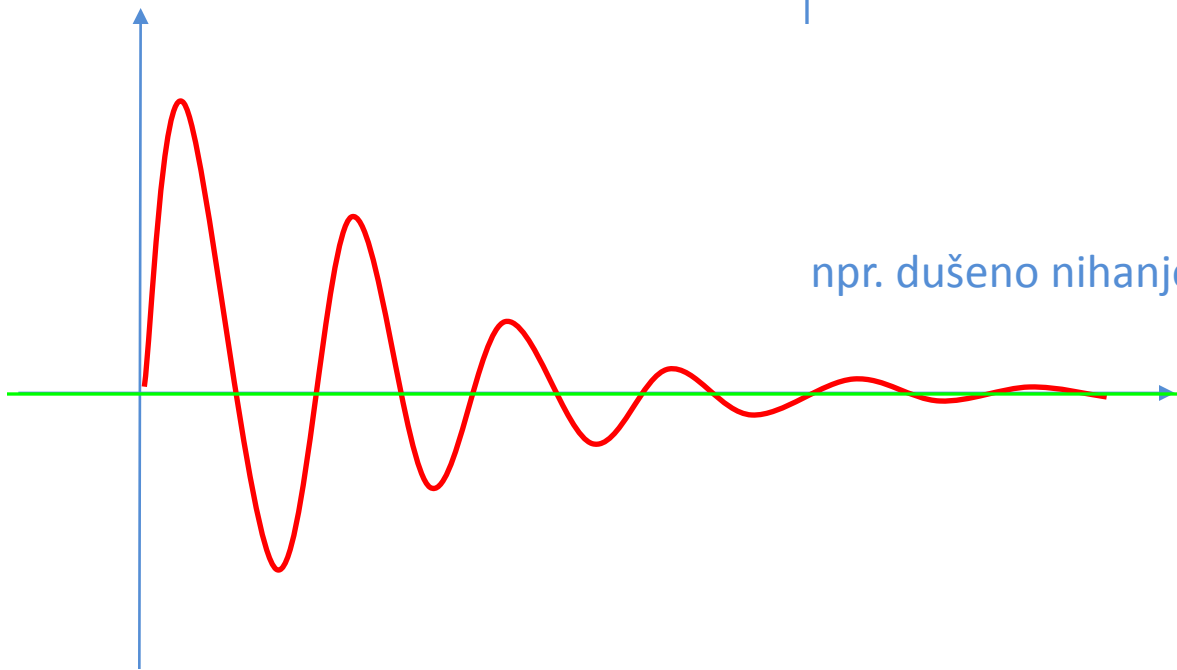
Asimptote

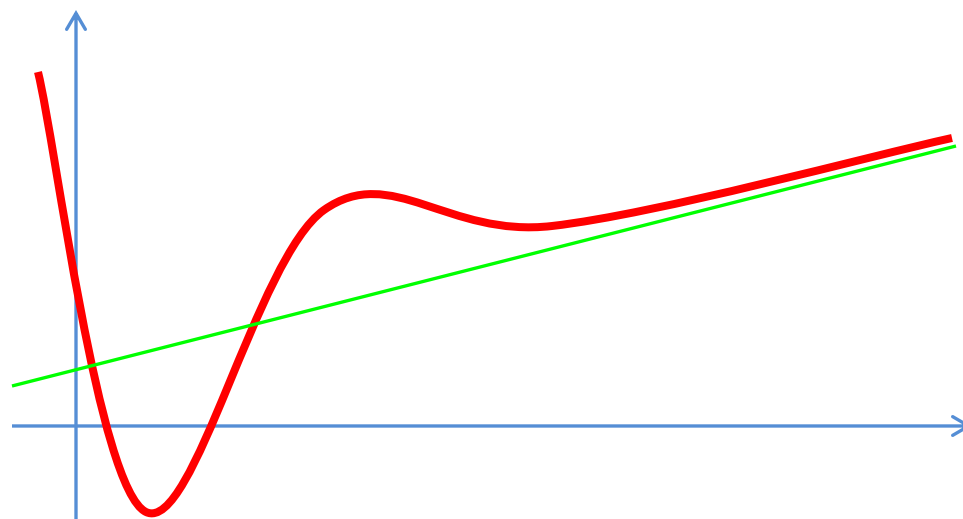
Vodoravna asimptota

npr. temperatura posode, ki se segreje le
do temperature vira



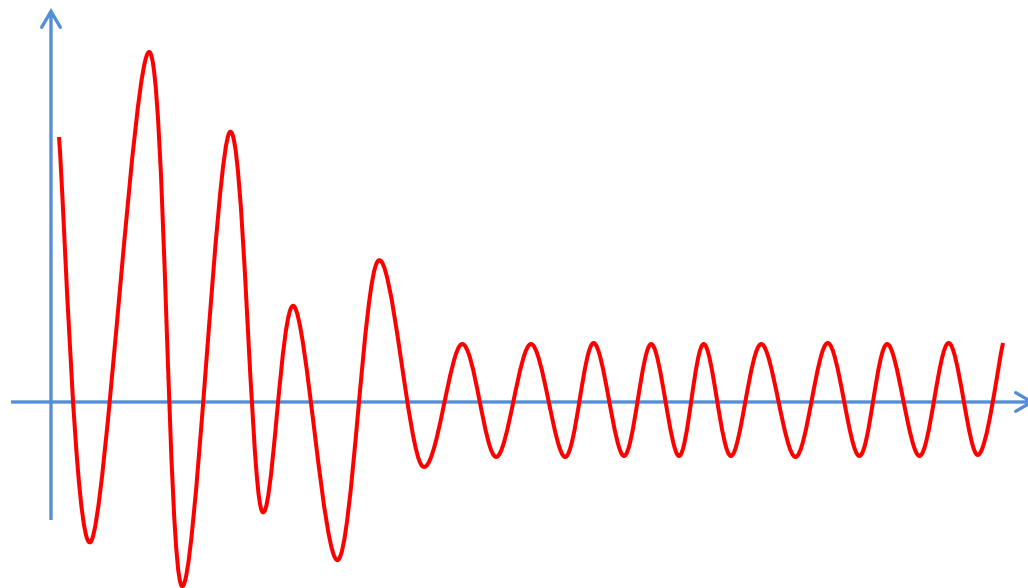
npr. dušeno nihanje



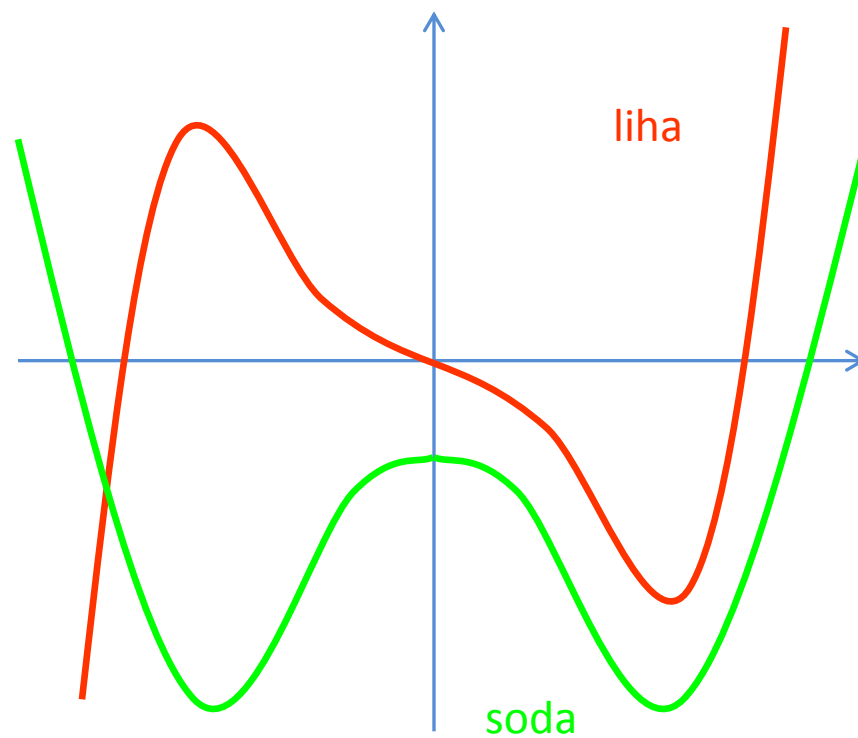
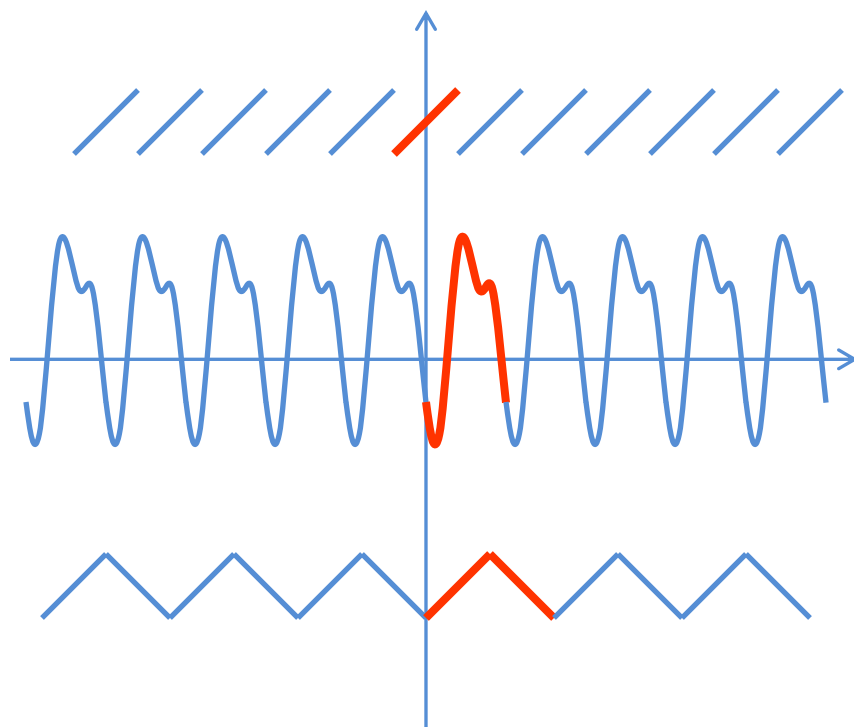


Linearna asimptota

Vsiljeno nihanje, asimptota je sinusoida



Periodičnost in simetrija



ELEMENTARNE FUNKCIJE

Polinomi

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 1$$

Racionalne funkcije

$$Q(x) = \frac{x^2 - 3x - 5}{x^3 + x + 1}$$

Algebrajske funkcije

$$A(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^2-1}}{x + \sqrt[5]{x^2} + \sqrt{x}}$$

Eksponentne

in

logaritmske funkcije

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{-x}$$

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Kotne

in

ločne funkcije

$$u(x) = \sin(2x-1) - 3\cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$v(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-x} \qquad w(x) = \operatorname{arctg}(1+x^2)$$

Elementarne funkcije dobimo s pomočjo računskih operacij in sestavljanja iz osnovnih funkcij.

Osnovne funkcije:

potence $x^n, n \in \mathbb{Z}$

eksponentna e^x

koreni $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{Z}$

logaritemska $\ln x$

sinus $\sin x$

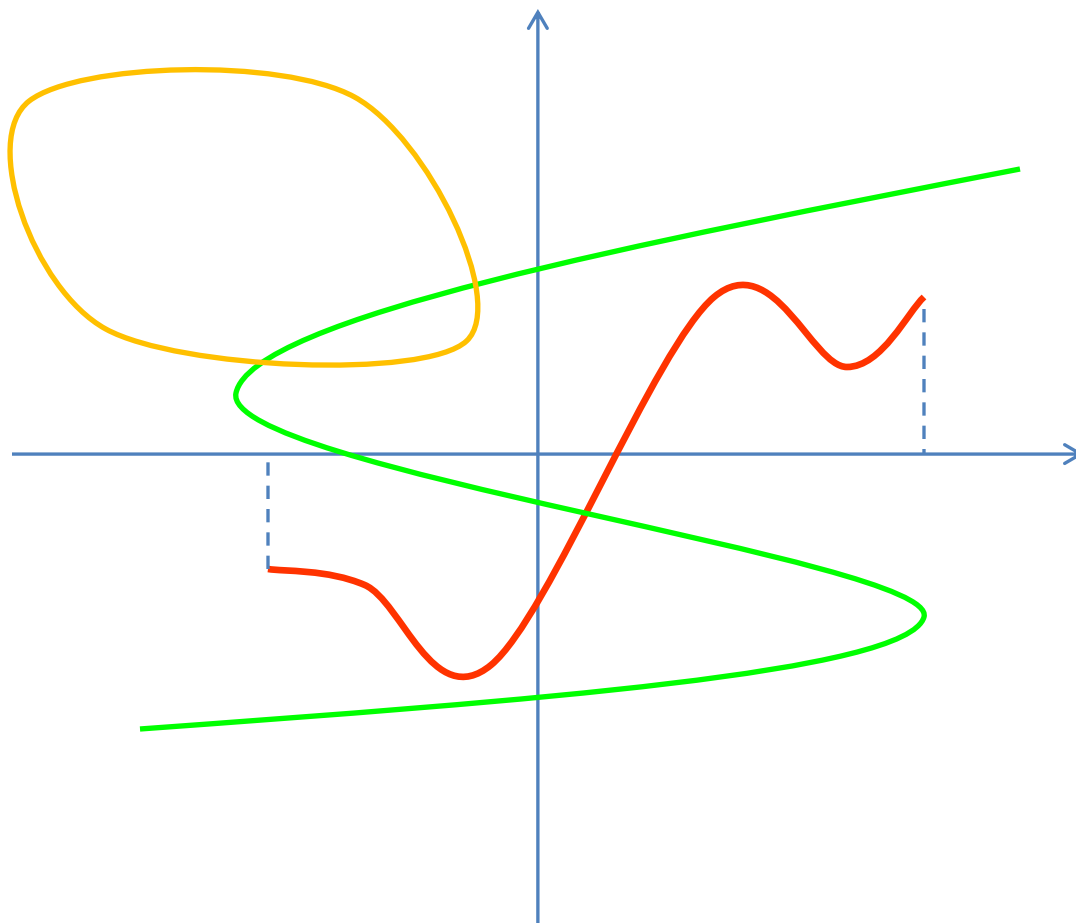
arkus sinus $\arcsin x$

arkus tangens $\arctg x$

Funkcije podane z grafom

Funkcija $f:A \rightarrow B$ je predpis, ki vsakemu argumentu priredi eno funkcijsko vrednost.

Krivulja v ravnini je graf neke funkcije če jo vsaka navpična premica seka največ enkrat.



OBRATNE FUNKCIJE

$$f:A\rightarrow B$$

Praslika $f^{-1}(b)=\{a\in A\mid f(a)=b\}$ (množica rešitev enačbe $f(a)=b$)

Predpis $b \mapsto f^{-1}(b)$ določa funkcijo, če imajo množice $f^{-1}(b)$ natanko en element za vse $b\in B$.

Tedaj je f **bijektivna**, predpis

$$f^{-1}:B\rightarrow A, \quad b \mapsto f^{-1}(b)$$

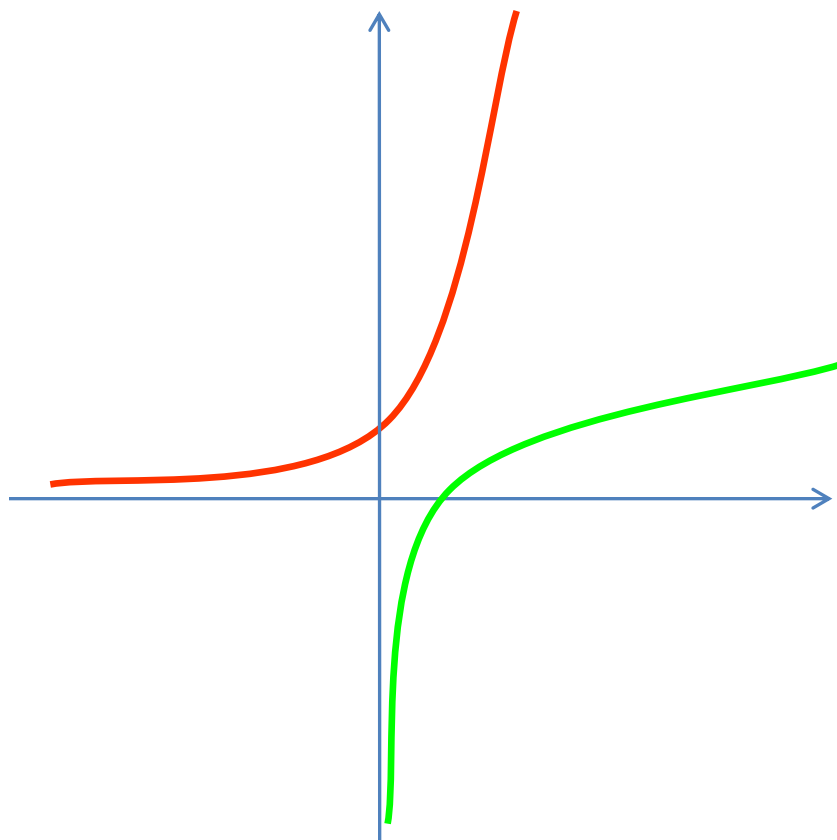
pa je **obratna** (inverzna) funkcija za f .

f je **surjektivna**, če imajo $f^{-1}(b)$ vsaj en element.

f je **injektivna**, če imajo $f^{-1}(b)$ največ en element.

Kadar funkcija ni bijektivna, lahko včasih zožimo njeno domeno ali kodomeno in tako dobimo sorodno funkcijo, ki je bijektivna.

EKSPONENTNA FUNKCIJA



injektivna



surjektivna

Zošimo kodomeno na $(0, +\infty)$. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ je bijektivna.

Obratna funkcija je

$$\exp^{-1} = \ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

TANGENS

injektivna



surjektivna



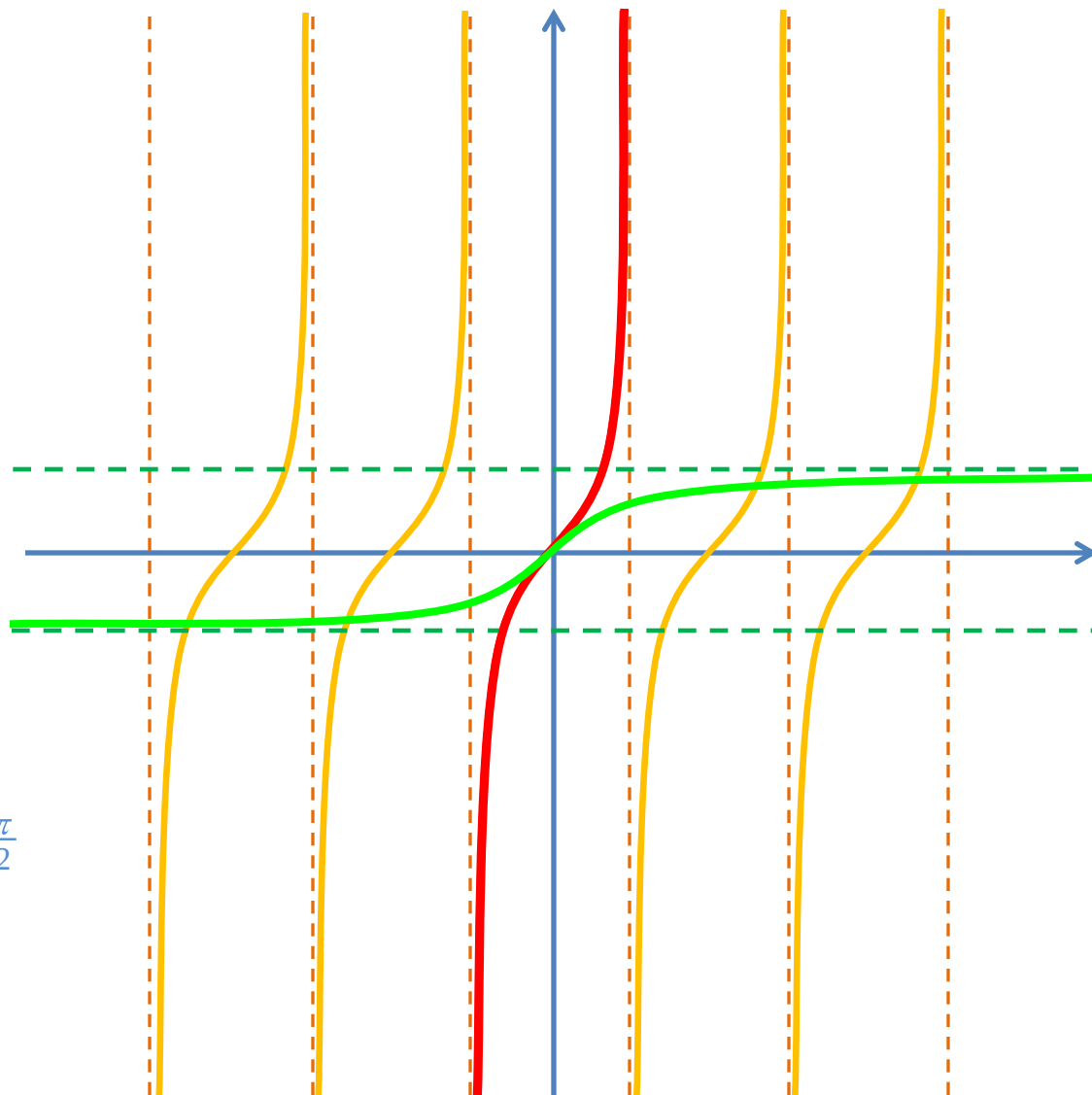
Zožitev $\text{tg} : -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbb{R}$

je bijektivna.

Obratna funkcija

$\text{arc tg} = \text{tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

je strogo naraščajoča, ima
vodoravni asimptoti $y = \pm \frac{\pi}{2}$



SINUS

injektivna

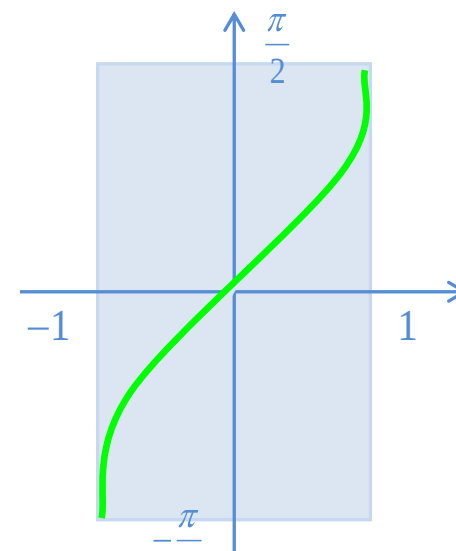
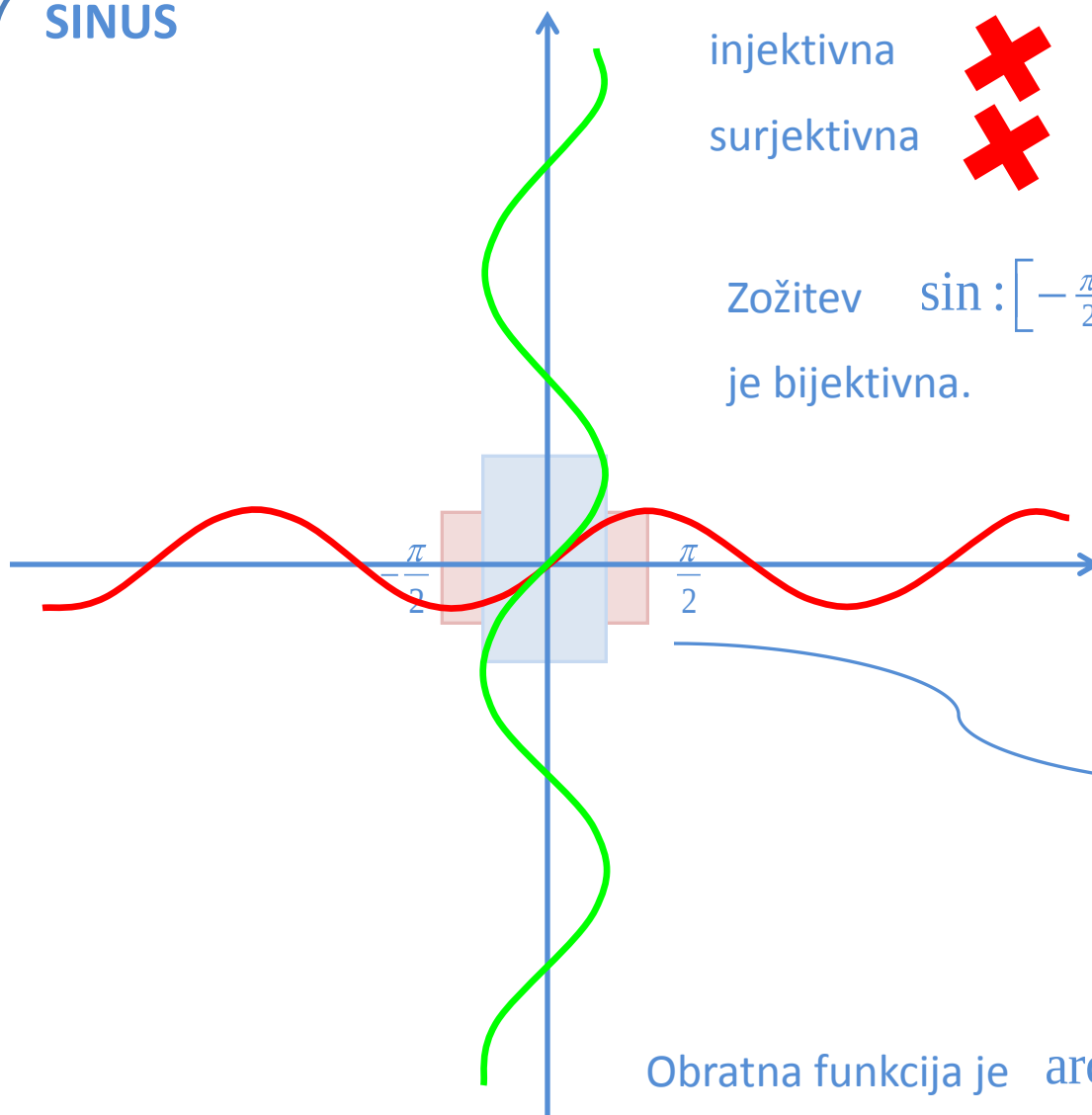


surjektivna



Zožitev $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

je bijektivna.



Obratna funkcija je $\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

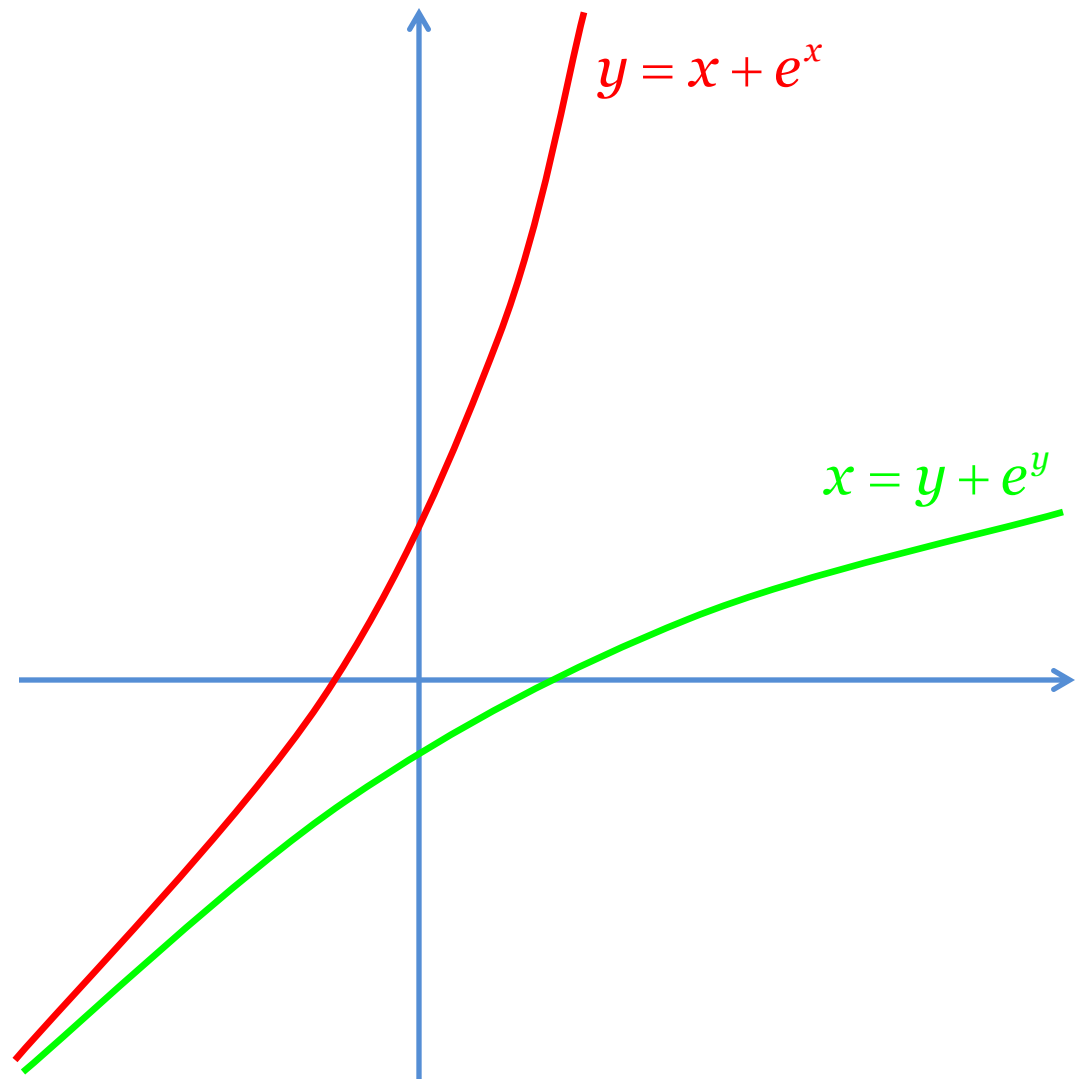
$$f(x) = x + e^x$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je bijekcija

Obratna funkcija

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ni elementarna funkcija.



FUNKCIJSKE ENAČBE, IMPLICITNE FUNKCIJE

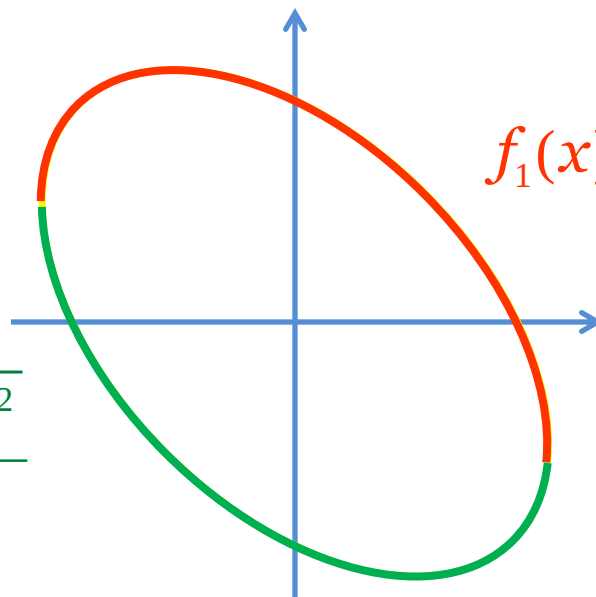
$$F(x,y)=0$$

$f : A \rightarrow B$ je **rešitev funkcijske enačbe**, če je $F(x,y)$ definirana za $x \in A$, $y \in B$ in je $F(x,f(x))=0$ za vse $x \in A$.

Za funkcijo f pravimo, da je podana **implicitno**.

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

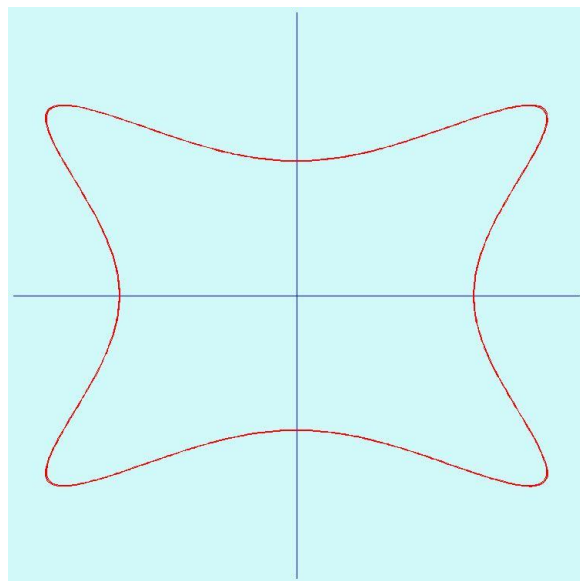
$$f_2(x) = \frac{-x - \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$$



$$f_1(x) = \frac{-x + \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$$

$$f_1, f_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^4 - 3x^2y^2 + 3y^4 = 1$$



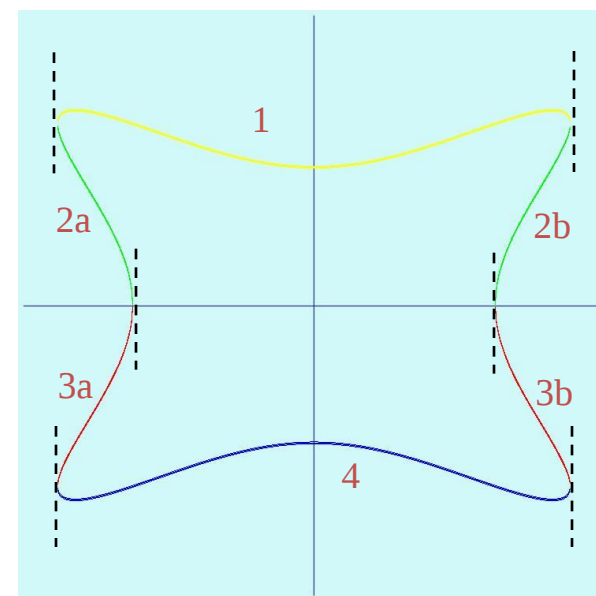
Implicitna enačba določa funkcijo
na odseku med dvema
navpičnima tangentama

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

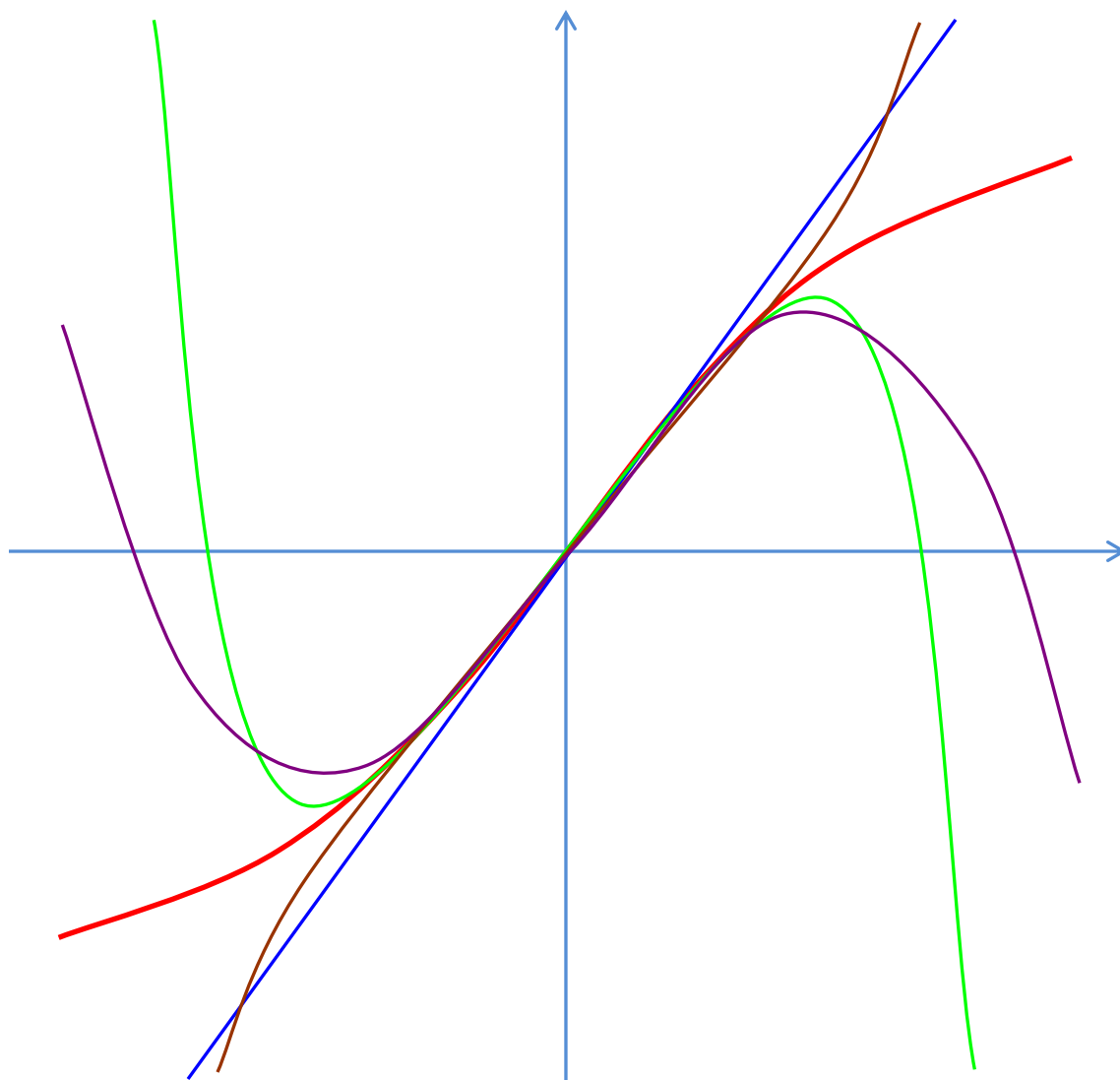
$$f_2(x) = \sqrt{\frac{3x^2 - \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

$$f_3(x) = -\sqrt{\frac{3x^2 - \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$

$$f_4(x) = -\sqrt{\frac{3x^2 + \sqrt{12 - 3x^4}}{6}}$$



ZAPOREDJA FUNKCIJ

Taylorjevi približki za funkcijo $\arctg(x)$

$$f_1(x) = x$$

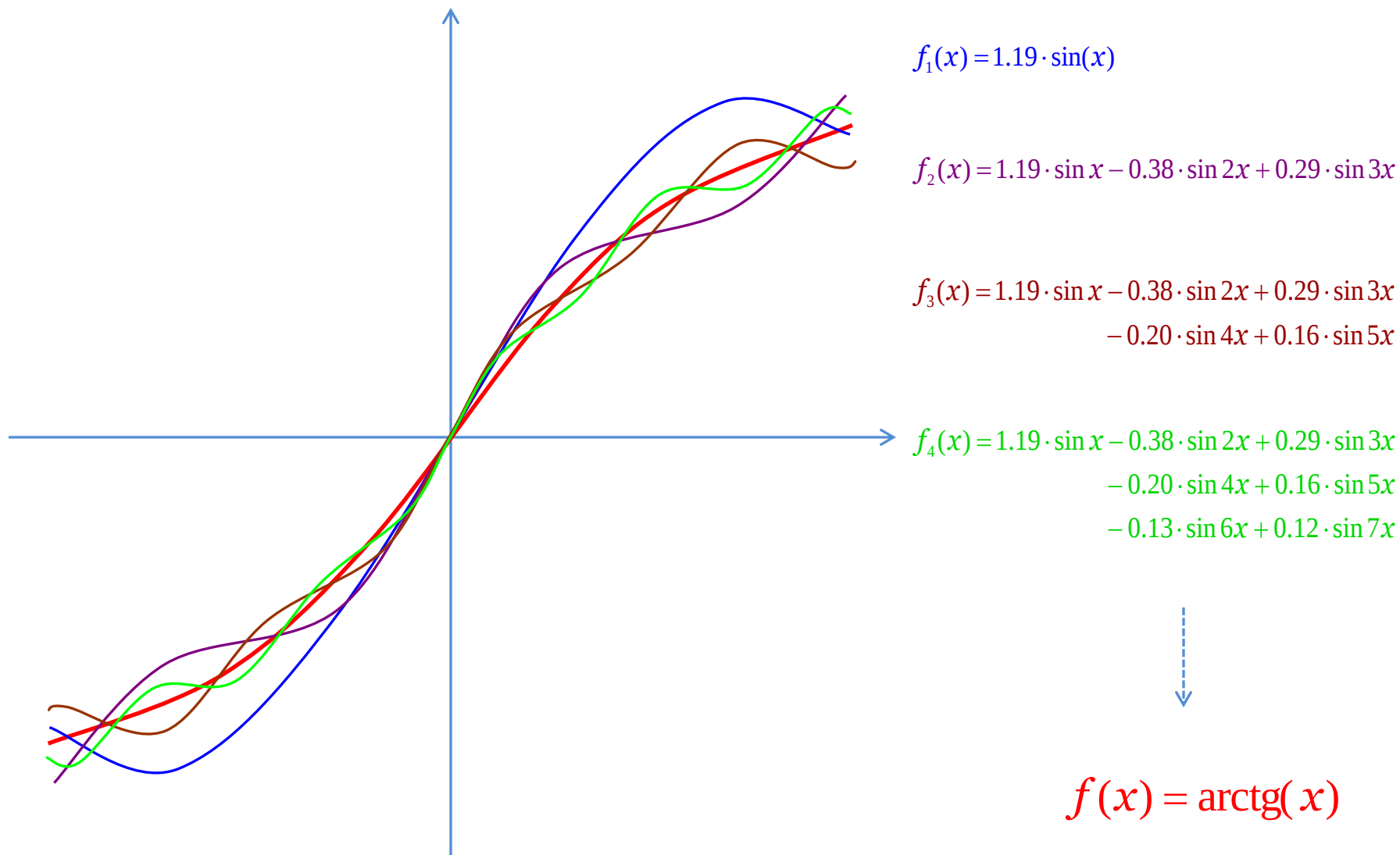
$$f_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

$$f_3(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

$$f_4(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$



$$f(x) = \arctg(x)$$



Fourierjevi približki za funkcijo $\text{arctg}(x)$