44. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Državno tekmovanje, 19. april 2008

Rešitve za 7. razred

1. Računajmo

$$\Bigg(\overbrace{1:\frac{0.2-0.05}{0.8-0.65}}^{=1\cdot\frac{0.15}{0.15}=1}\Bigg):\left(\left(\overbrace{2-0.2\cdot\frac{10}{3}}^{=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}}\right):\frac{4}{3}-\left(\overbrace{1+\frac{1}{2008}}^{=\frac{2009}{2008}}\right):\frac{2009}{2007}\right)=$$

$$=\quad 1:\left(\frac{4}{3}:\frac{4}{3}-\frac{2009}{2008}:\frac{2009}{2007}\right)=1:\left(1-\frac{2007}{2008}\right)=1:\frac{1}{2008}=2008.$$

$1:\frac{0.2-0.05}{0.8-0.65}=1\cdot\frac{0.15}{0.15}=1$ .... **1 + 1 točka**
$2-0.2\cdot\frac{10}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ .... **1 + 1 točka**
$\frac{4}{3}:\frac{4}{3}=1$ .... **1 točka**
$1+\frac{1}{2008}=\frac{2009}{2008}$ .... **1 točka**
$\frac{2009}{2008}:\frac{2009}{2007}=\frac{2009}{2008}\cdot\frac{2007}{2009}=\frac{2007}{2008}$ .... **1 + 1 točka**
$1-\frac{2007}{2008}=\frac{1}{2008}$ .... **1 točka**
$1:\frac{1}{2008}=2008$ .... **1 točka**

2. Ker je $130=2\cdot5\cdot13$, največji skupni delitelj števila x in 130 pa je $26=2\cdot13$, mora biti število x deljivo z 2 in s 13, ne pa tudi s 5. Po predpostavki je število x deljivo z 8 in z enim izmed števil 3 ali 5, torej je število x deljivo z $2^3\cdot3\cdot13$. Ker ima število $312=2^3\cdot3\cdot13$ natanko 16 deliteljev (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 24, 26, 39, 52, 78, 104, 156, 312), je to iskano število. (Vsak njegov večkratnik bi namreč imel več deliteljev.)

   Iskano število je torej 312.

   Ugotovitev, da je število x deljivo s 3 .... **2 točki**
   Zapis iskanega števila v obliki $8\cdot3\cdot13$ (ali $2^3\cdot3\cdot13$) .... **2 točki**
   Zapis deliteljev tega števila .... **4 točke**
   Ugotovitev, da je njegovih deliteljev 16 .... **1 točka**
   Odgovor: $x=312$ .... **1 točka**

3. Zmagovalna knjiga je dobila vsaj 13 glasov, saj bi v nasprotnem primeru vse knjige skupaj dobile največ $12+11+10=33$ glasov. Števili glasov za knjigi *Grozni Gašper* in *Pet prijateljev* se razlikujeta za 2, zato je njuno skupno število sodo.

   Ker je glasovalo 34 učencev in je knjiga *Harry Potter* prejela vsaj 13 in največ 18 glasov, jih je prejela 14, 16 ali 18. Možne razporeditve glasov so torej: 14, 11, 9; 16, 10, 8 ali 18, 9, 7.

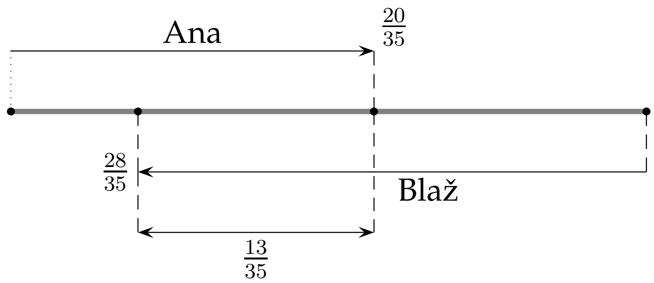
   Razporeditve glasov so take, da je pri dveh izmed njih število glasov za tretjeuvrščeno knjigo sodo, pri eni pa liho.

Da bi Anže iz Markovega odgovora sklepal, katera rešitev je prava, mu je moral Marko odgovoriti, da ima tretjeuvrščena knjiga sodo število glasov.

Torej je knjiga *Harry Potter* dobila 16 glasov, *Grozni Gašper* 10 in *Pet prijateljev* 8 glasov.

Ugotovitev, da ima prvouvrščena knjiga med 13 in 18 glasov .... 2 točki
Druga in tretja skupaj imata sodo število glasov .... 2 točki
Zapis možnih trojic $14, 11, 9$; $16, 10, 8$; $18, 9, 7$ .... 3 točke
Ugotovitev, da ima tretjeuvrščena knjiga sodo število glasov .... 2 točki
Odgovor: $16, 10, 8$ .... 1 točka

4. Narišimo skico:

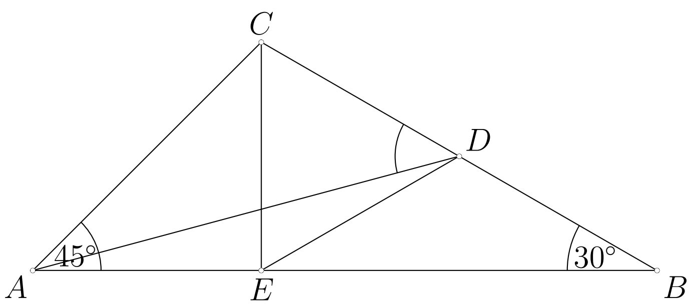


Ko Ana prebarva $\frac{3}{7}$ poti in še četrtino preostanka, prebarva $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{3}{7}) = \frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ ograje. Blaž prebarva $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ ograje. Del ograje, ki je prebarvan z obeh strani hkrati, meri $\frac{20}{35} + \frac{28}{35} - 1 = \frac{13}{35}$ cele ograje. Cela ograja je dolga $15.6 \cdot \frac{35}{13} = 42$ metrov.

Ugotovitev, da Ana prebarva $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ .... 2 točki
Zapis obeh deležev na skupnem imenovalcu (Ana $\frac{20}{35}$, Blaž $\frac{28}{35}$) .... 2 točki
Ugotovitev, da je na obeh straneh pobarvanih $\frac{13}{35}$ ograje .... 4 točke
Izračunana dolžina ograje 42 m .... 2 točki

(Skica pri nalogi se ne vrednoti.)

5. Narišimo skico:



Naj bo E nožišče višine na AB v trikotniku ABC. Trikotnik AEC je pravokoten in enakokrak, saj je $\sphericalangle ACE = 90° - \sphericalangle EAC = 45°$. Torej je $|AE| = |EC|$.

Trikotnik CEB je pravokoten in ker D razpolavlja njegovo hipotenuzo BC, velja: $|DC| = |DB| = |DE|$. Ker pa je trikotnik EBC polovica enakostraničnega trikotnika (uporabimo: $\sphericalangle CBE = 30°$), je $|EC| = \frac{1}{2}|BC| = |DE|$.

Sledi $|EC| = |DE| = |DC|$, trikotnik CED je enakostraničen in $\sphericalangle EDC = 60°$.

Ker je $|AE| = |EC| = |ED|$, je trikotnik AED enakokrak in njegov notranji kot pri vrhu E meri $\sphericalangle AEC + \sphericalangle CED = 90° + 60° = 150°$. Kot $\sphericalangle ADE$ pri osnovnici AD je potem $\frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AED) = 15°$ in $\sphericalangle ADC = \sphericalangle EDC - \sphericalangle ADE = 60° - 15° = 45°$.

Narisana skica z vsemi podatki .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $|AE| = |EC|$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je $|DE| = |DC|$ .... **2 točki**
Ugotovitev, da je $|EC| = |DE|$ **(ali** $|EC| = \frac{1}{2}|BC|$**)** .... **1 točka**
Ugotovitev, da je EDC **enakostraničen trikotnik** .... **1 točka**
Izračun kota $\sphericalangle EDC = 60°$ .... **1 točka**
Izračun kota $\sphericalangle AED = 150°$ .... **1 točka**
Izračun kota $\sphericalangle EDA = 15°$ .... **1 točka**
Rezultat: kot ADC **meri** $45°$ .... **1 točka**