55. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 6. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A	B	D	B	E	D	B	E

A1. Izračunajmo:
$45{,}3 : (3 \cdot (2^2 + 3^2 \cdot 2 + 0{,}81 : 0{,}027 : 10) : 10) = 45{,}3 : \big(3 \cdot \big(4 + 18 + \frac{810}{27} : 10\big) : 10\big) =$
$= 45{,}3 : \big(3 \cdot \big(22 + \frac{81}{27}\big) : 10\big) = 45{,}3 : (3 \cdot (22 + 3) : 10) = 45{,}3 : (3 \cdot 25 : 10) = 45{,}3 : 7{,}5 =$
$= \frac{453}{75} = \frac{151}{25} = \frac{604}{100} = 6{,}04$

A2. Zapis MCDLXXV predstavlja število 1475. Prištejemo 2019 in dobimo 3494, kar z rimsko številko zapišemo kot MMMCDXCIV. Pravilen je odgovor (**B**).

A3. S števkama 3 in 0 lahko sestavi le eno pravo 6-mestno število: $300\,000$. S števkami 1, 2 in 0 lahko sestavi pet pravih 6-mestnih števil, ki se začnejo z 1: $120\,000, 102\,000, 100\,200, 100\,020, 100\,002$, ter pet takih, ki se začnejo z 2: $210\,000, 201\,000, 200\,100, 200\,010, 200\,001$. Mija lahko uporabi tri kartončke s števko 1 ter tri kartončke s števko 0. S temi kartončki lahko sestavi:
– štiri števila, ki se začnejo z 11: $111\,000, 110\,100, 110\,010, 110\,001$,
– tri števila, ki se začnejo s 101: $101\,100, 101\,010, 101\,001$,
– dve števili, ki se začneta s 1001: $100\,110, 100\,101$ in
– število $100\,011$.
Vsega skupaj Mija lahko sestavi: $1 + 5 + 5 + 10 = 21$ števil.

A4. Prva štiri števila so $8, 4, 2$ in 1. Zadnje med njimi je liho, zato naslednjega dobimo kot vsoto zadnjega in predzadnjega: $2+1 = 3$. Sledi število, ki je vsota zadnjih dveh: $1+3 = 4$. Opazimo, da se števila začnejo ponavljati v naslednjem vrstnem redu: $8, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, \ldots$ Brez upoštevanja števila 8 je v 2019. kvadratku število, ki stoji na 2018. mestu v vzorcu $4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, \ldots$. Ker pri deljenju 2018 s 4 ostane 2, je iskano število na drugem mestu v nizu $4, 2, 1, 3$. Pravilen je odgovor (**B**).

A5. Ploščina manjšega kvadrata predstavlja $\frac{4}{3}$ ploščine preseka, ploščina večjega kvadrata pa $\frac{16}{9}$. Razmerje ploščin je zato enako $\frac{4}{3} : \frac{16}{9} = \frac{3}{4} = 3 : 4$.

A6. Za števke na mestu enic velja: $A + B + A + B = 2 \cdot A + 2 \cdot B$, za števke na mestu desetic pa: $10 \cdot A + 10 \cdot A + 10 \cdot B + 10 \cdot B = 20 \cdot A + 20 \cdot B$. Skupaj je to enako: $22 \cdot A + 22 \cdot B$. Delimo število 352 z 22 in dobimo 16, torej je $A + B = 16$.

A7. Gredica, dolga 5 m in široka 5 m, predstavlja četrtino pravokotnega vrta, dolgega 10 m in širokega 10 m. Zato bo zanjo potreboval le četrtino časa, ki ga potrebuje za vrt, torej $1{,}5$ ure oziroma 90 minut.

A8. V kvadratu na sliki najdemo 16 kvadratkov s ploščino $1\ \text{cm}^2$, 9 kvadratov s ploščino $4\ \text{cm}^2$, 4 kvadrate s ploščino $9\ \text{cm}^2$ ter enega s ploščino $16\ \text{cm}^2$. Vsota vseh ploščin je enaka: $16 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 104\ \text{cm}^2$.

B1. Devet posod razdelimo v vsaj dve skupini, tako da jih damo v 3 skupine po tri oziroma v 9 skupin z eno posodo. Druga možnost odpade, ker v nobeni skupini ne bo enaka količina soka. Skupna prostornina posod je $1+2+3+\ldots+9=45\ \ell$, zato je prostornina posod v vsaki skupini $45:3=15$ litrov. V prvo skupino damo najmanjšo posodo, tako ostane 14 litrov soka za preostali dve posodi. Edini dve možnosti sta: $1+6+8$ in $1+5+9$. V prvem primeru sta ostali skupini $2+4+9$ in $3+5+7$. V drugem primeru pa $2+6+7$ in $3+4+8$.

Ugotovitev, da posode razporedimo v 3 **skupine ali** 9 **skupin.** .... 1 **točka**
Sklep, da razporeditev v 9 **skupin ne pride v poštev.** .... 1 **točka**
Izračunana skupna prostornina posod. .... 1 **točka**
Sklep, da je skupna količina soka v vsaki skupini 15 **litrov.** .... 1 **točka**
Zapisana prva razporeditev. .... 1 **točka**
Zapisana druga razporeditev. .... 1 **točka**

B2. Dolžina stranice srednjega kvadrata je enaka trikratniku dolžine stranice malega kvadrata. Zato je obseg srednjega kvadrata enak trikratniku obsega malega kvadrata. Podobno je obseg velikega kvadrata enak štirikratniku obsega malega kvadrata, saj je dolžina stranice velikega kvadrata enaka štirikratniku dolžine stranice malega kvadrata. Vsota obsegov malega, srednjega in velikega kvadrata je torej enaka osemkratniku obsega malega kvadrata. Ker je ta vsota enaka 80 cm, je obseg malega kvadrata enak 10 cm, dolžina njegove stranice pa $2{,}5$ cm. Ena stranica osenčenega pravokotnika je enako dolga kot stranica velikega kvadrata, torej 10 cm. Dolžina druge stranice pravokotnika pa je enaka sedemkratniku dolžine stranice malega kvadrata, to je $17{,}5$ cm. Obseg senčenega pravokotnika je $2 \cdot 10 + 2 \cdot 17{,}5 = 55$ cm.

Ugotovitev, da je dolžina stranice srednjega kvadrata enaka trikratniku dolžine stranice malega kvadrata. ...... 1 **točka**
Ugotovitev, da je dolžina stranice velikega kvadrata enaka štirikratniku dolžine stranice malega kvadrata. ...... 1 **točka**
Ugotovitev, da je vsota obsegov 32-kratnik obsega malega kvadrata. ...... 1 **točka**
Izračunana dolžina stranice malega kvadrata: $2{,}5$ **cm.** ...... 1 **točka**
Izračunani dolžini stranic celotnega pravokotnika: 10 **cm in** $17,5$ **cm.** ...... 1 **točka**
Izračunan obsega celotnega pravokotnika: 55 **cm.** ...... 1 **točka**

Opomba: Rešitev pridobljena z ugibanjem ali poskušanjem je vredna največ 4 **točke.**