55. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 7. razred

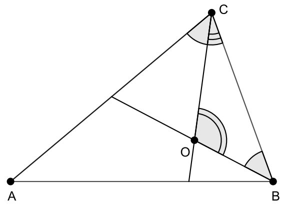
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
D	D	A	B	D	B	C	A	D	D

A1. Ploščina enega osenčenega štirikotnika je enaka $\frac{1}{4} \cdot (4^2 - 2 \cdot 1^2) = \frac{7}{2}$.

A2. Izračunajmo: $\frac{3}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}} = \frac{3}{3+\frac{1}{\frac{10}{3}}} = \frac{3}{3+\frac{3}{10}} = \frac{3}{\frac{33}{10}} = \frac{10 \cdot 3}{33} = \frac{10}{11}$.

A3. V prvem pravokotniku neosenčeni del predstavlja $\frac{3}{8}$ pravokotnika. Torej je osenčenih $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$ tretjega pravokotnika.

A4. Večje kot je število, manjša je njegova obratna vrednost. Torej je rešitev največje število med naštetimi. Vseh pet števil se ujema v prvih štirih decimalkah. Največje število je zato $0{,}201\overline{9}$, katerega peta decimalka je enaka 9 in je največja izmed petih decimalk naštetih števil.



A5.
Trikotnik ABC je enakokrak z osnovnico BC, torej sta kota β in γ skladna in sta velika $\frac{180° - 40°}{2} = 70°$. Kot $\measuredangle CBO$ je po velikosti enak kotu $\measuredangle ACO$, zato velja $\measuredangle CBO + \measuredangle OCB = \measuredangle ACO + \measuredangle OCB = \gamma$. Velikost kota $\measuredangle BOC = 180° - \measuredangle CBO - \measuredangle OCB = 180° - 70° = 110°$.

A6. Cena čevljev je enaka $\frac{3}{2}$ cene hlač, zato hlače in čevlji skupaj stanejo $\frac{5}{2}$ cene hlač. Plašč stane $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$ cene hlač oziroma hlače stanejo $\frac{3}{5} \cdot 120 = 72$ EUR.

A7. Zapišimo računski izraz za zaporedje ukazov in končno višino zmaja: $1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}75 = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{486}{500}$. Od tod sledi, da je bila začetna višina zmaja 500 m.

A8. Izjava B ni pravilna; desna stran enakosti v izjavi B ni večkratnik števila 5, leva pa je. Niti izjava C ni pravilna; leva stran enakosti je večkratnik števila 2, na desni strani enakosti pa je liho število. Prav tako ni pravilna izjava D; leva stran enakosti je večkratnik števila 9, vsota števk števila na desni strani enakosti pa je enaka 33 in ni deljiva z 9. Izjava A je pravilna, saj je na levi strani enakosti večkratnik števila 6, na desni pa sodo število, katerega vsota števk je enaka 33. Sodo število na desni strani enakosti je deljivo z 2 in s 3, torej je deljivo s 6 oziroma je večkratnik števila 6.

A9. Ko so izdelali 4 stole in 2 mizi, je bilo stolov dvakrat toliko kot miz. Ko so izdelali še 6 miz, so bili v skladišču 4 stoli in $2 + 6 = 8$ miz, torej je bilo miz dvakrat toliko kot stolov. Ko so izdelali vseh 12 miz in še 2 stola, je bilo v skladišču 12 miz in $4+2=6$ stolov, torej je bilo dvakrat toliko miz kot stolov. Ko so izdelali še 18 stolov, je bilo v skladišču 12 miz in $6+18=24$ stolov; tedaj je bilo stolov dvakrat toliko kot miz. Zapovrstjo zapišimo vse ugodne možnosti: 4 stoli in 2 mizi, 4 stoli in 8 miz, 6 stolov in 12 miz ter 24 stolov in 12 miz.

A10. Trimestno število, sestavljeno iz treh enakih neničelnih števk, zapišimo v obliki $\underline{aaa}$ oziroma $a \cdot 111$. Iz razcepa $111 = 3 \cdot 37$ uvidimo, da je 37 iskano praštevilo.

B1.

Rešitev 1.

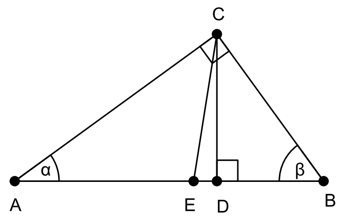
Število prodanih kart je enako razmerju med višino izkupička in ceno karte. Izkupiček letošnje sezone je $1{,}05$-krat tolikšen kot lani, cena karte pa je $1{,}68$-krat tolikšna. Izračunajmo razmerje in ga zapišimo z %: $\frac{1{,}05}{1{,}68} = \frac{105}{168} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0{,}625 = 62{,}5$

Rešitev 2.

V prejšnjem letu so prodali n vozovnic po ceni c, izkupiček je bil enak $n \cdot c$. Nova cena je za 68 % višja oziroma je enaka $1{,}68 \cdot c$. Izkupiček pa je enak $1{,}05 \cdot n \cdot c$. Število prodanih vstopnic je torej enako $1{,}05 \cdot n \cdot c : (1{,}68 \cdot c)$ oziroma $0{,}625 \cdot n$, kar je enako $62{,}5$ % prodanih kart v preteklem letu. Število prodanih kart je upadlo za $37{,}5$ %.

Zapisana višina cene karte v letošnji sezoni glede na lansko. ...... 1 **točka**
Zapisan sklep o izkupičku lanske sezone. ...... 1 **točka**
Zapisan sklep o izkupičku letošnje sezone. ...... 1 **točka**
Upoštevanje zveze med izkupičkoma. ...... 1 **točka**
Izračunano razmerje med izkupičkom in višino cene karte v letošnji sezoni. ...... 1 **točka**
Odgovor, da je število prodanih kart upadlo na $62{,}5$ **% oziroma za** $37{,}5$ **%.** ...... 1 **točka**

Opomba: Če je tekmovalec reševal nalogo na konkretnem primeru, dobi največ 4 **točke.**



B2.
Za trikotnik CED velja: $\measuredangle DEC + \measuredangle ECD = \measuredangle DEC + \frac{1}{9}\measuredangle DEC = \frac{10}{9}\measuredangle DEC = 90°$. Od tod sledi, da je kot $\measuredangle DEC$ velik $81°$ in $\measuredangle CEA = 99°$. Ker je daljica CE simetrala pravega kota, za velikost kota α velja: $\alpha + 99° + 45° = 180°$ oziroma $\alpha = 36°$. Iz enačbe: $\beta + \alpha = 90°$ pa sledi, da je kot β velik $54°$.

Opomba: Podobno dobimo, če vzamemo, da je kateta a daljša od katete b.

Zapisana enačba za vsoto velikosti kotov $\measuredangle DEC$ in $\measuredangle ECD$. ...... 1 **točka**
Izračunana velikost kota $\measuredangle DEC$. ...... 1 **točka**
Izračunana velikost kota$\measuredangle CEA$. ...... 1 **točka**
Sklep, da zaradi daljice CE velja: $\alpha + 99° + 45° = 180°$. ...... 1 **točka**
Izračunana velikost kota α. ...... 1 **točka**
Izračunana velikost kota β. ...... 1 **točka**