55. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog za 8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
B	A	B	B	C	E	C	E

A1. Izračunajmo $\sqrt{\frac{49}{48}} - \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{7}{4\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{49-48}{7\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{28\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{84}$.

A2. V številu 201^9 na mestu enic stoji 1. Število $9^{200} = (9^2)^{100} = 81^{100}$ ima na mestu enic 1, torej se število 9^{201} konča z 9. Zadnja števka vsote $201^9 + 9^{201}$ je 0.

A3. Označimo s φ največji notranji kot petkotnika. Seštejmo $\frac{3}{8}\varphi + \frac{9}{16}\varphi + \frac{11}{16}\varphi + \frac{3}{4}\varphi + \varphi = \frac{54}{16}\varphi$. Vsota velikosti notranjih kotov petkotnika je enaka $540°$, torej je kot φ velik $160°$.

A4. Večje kot je število, manjša je njegova nasprotna vrednost. Manjše kot je število, večja je njegova obratna vrednost. Čim večje je število, tem večja je obratna vrednost njegove nasprotne vrednosti. Torej je rešitev največje število med naštetimi. Vseh pet števil se ujema v prvih štirih decimalkah. Največje število je zato $0{,}201\overline{9}$, katerega peta decimalka je enaka 9 in je največja izmed petih decimalk naštetih števil.

A5. Za ceno 49 kg jabolk lahko kupimo 70 kg grozdja in 7 kg breskev. Ker 7 kg breskev stane toliko 1 kg jabolk in 2 kg grozdja skupaj, bi za 49 kg jabolk plačali toliko kot za 72 kg grozdja in 1 kg jabolk. Torej 48 kg jabolk stane toliko kot 72 kg grozdja in za ceno 12 kg jabolk lahko dobimo $\frac{72}{4} = 18$ kg grozdja.

A6. Število diagonal v n-kotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$, v večkotniku s $3n$ stranicami pa $\frac{3n(3n-3)}{2}$. Zapišemo enačbo $\frac{3n(3n-3)}{2} = 10 \cdot \frac{n(n-3)}{2}$ in jo preoblikujemo v $3(3n-3) = 10(n-3)$ oziroma $9n - 9 = 10n - 30$. Rešitev enačbe je $n = 21$, torej je Janja opazovala 63-kotnik.

A7. Višino gladine jezera pred sušo označimo z x. Iz besedila lahko zapišemo enačbo: $x \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}15 = x + 35$. Izračunamo in dobimo enačbo $x \cdot 1{,}035 = x + 35$ oziroma $x \cdot 0{,}035 = 35$. Rešitev je $x = 1000$ cm $= 10$ m.

A8. Zapišimo število 12 kot zmnožek petih različnih celih števil $12 = 3 \cdot 4 = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-1)$. Vsota množencev iz zadnjega številskega izraza je enaka 3.

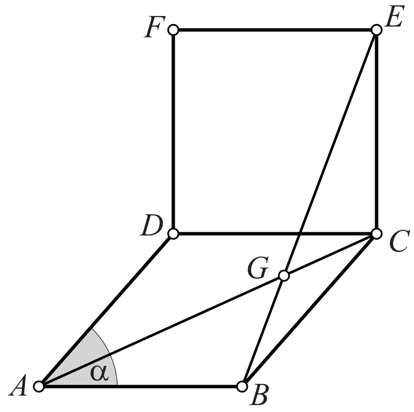
B1. Izračunajmo $\sqrt{\frac{2019-(-2)^5-3\cdot 2^0}{(-8)^2}}:\sqrt{2}+\frac{2019^2-81}{2^3}:(4^3+3)=$
$=\sqrt{\frac{2019-(-32)-3\cdot 1}{64}}:\sqrt{2}+\frac{(2019-9)\cdot(2019+9)}{8}:(64+3)=$
$=\sqrt{\frac{2048}{64\cdot 2}}+\frac{2010\cdot 2028}{8\cdot 67}=$
$=\sqrt{\frac{128\cdot 16}{128}}+\frac{3\cdot 670\cdot 4\cdot 507}{8\cdot 67}=$
$=\sqrt{16}+\frac{3\cdot 10\cdot 507}{2}=$
$=4+7605=7609$

Izračunana vrednost števca prvega korenjenca. ...... 1 **točka**
Izračunana vrednost ulomka v drugem členu. ...... 1 **točka**
Izračunana vrednost izraza v oklepaju. ...... 1 **točka**
Izračunana vrednost količnika korenov. ...... 1 **točka**
Izračunana vrednost drugega člena. ...... 1 **točka**
Izračunana vrednost izraza. ...... 1 **točka**

B2. Označimo število kvadratov z x, torej je ostalih pravokotnikov $3x$. Vseh rombov je $8x$, število tistih, ki niso kvadrati, je potem $8x - x = 7x$. Podobno je število deltoidov, ki niso rombi, enako $12x - 8x = 4x$. Zapišimo enačbo za vse štirikotnike skupaj: $4x + 7x + 4x = 15x = 75$. Rešitve enačbe je $x = 75 : 15 = 5$ in kvadratov je v množici 5.

Ugotovitev, da je vsak romb deltoid in da kvadrat spada v vse množice omenjenih štirikotnikov. ...... 1 **točka**
Sklep o številu pravokotnikov. ...... 1 **točka**
Sklep o številu rombov, ki niso kvadrati. ...... 1 **točka**
Sklep o številu deltoidov. ...... 1 **točka**
Zapisana enačba o številu štirikotnikov. ...... 1 **točka**
Izračunana rešitev enačbe in zapisano število kvadratov. ...... 1 **točka**

B3.



Označimo z $\alpha = \measuredangle BAD = \measuredangle DCB$, torej je velikost kota $\measuredangle ECB = 90° + \alpha$. Trikotnik EBC je enakokrak s krakoma EC in BC, zato za velikosti kotov velja $\measuredangle BEC = \measuredangle CBE = \frac{180° - (90° + \alpha)}{2} = 45° - \frac{\alpha}{2}$. Ker diagonala AC romba $ABCD$ razpolavlja notranji kot $\measuredangle DCB$, je en notranji kot trikotnika EGC velik $\measuredangle ECG = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Upoštevamo še $\measuredangle BEC = 45° - \frac{\alpha}{2}$, torej je velikost tretjega notranjega kota trikotnika enaka $\measuredangle CGE = 180° - (90° + \frac{\alpha}{2}) - (45° - \frac{\alpha}{2}) = 45°$. Kota $\measuredangle CGE$ in $\measuredangle AGB$ sta sovršna in zato je kot $\measuredangle AGB$ velik $45°$.

Sklep o velikosti kota $\measuredangle ECB$. ...... 1 **točka**
Zapisani velikosti kotov $\measuredangle BEC$ in $\measuredangle CBE$. ...... 1 **točka**
Upoštevanje lastnosti o diagonali v rombu. ...... 1 **točka**
Sklep o velikosti kota $\measuredangle ECG$. ...... 1 **točka**
Izračunana velikost kota $\measuredangle CGE$. ...... 1 **točka**
Sklep in zapisana velikost kota $\measuredangle AGB$. ...... 1 **točka**

Opombi:
– Če si je tekmovalec izbral velikost kota v rombu in nalogo rešil na konkretnem primeru, dobi največ 4 točke.
– Rešitev pridobljena z merjenjem se točkuje z 0 točkami.