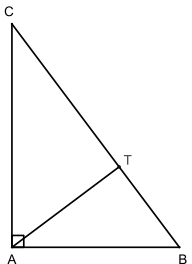


### Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkrožen nepravilen odgovor pol točke odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu priznajo začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	E	B	E	D	E	B	C

Utemeljitev:

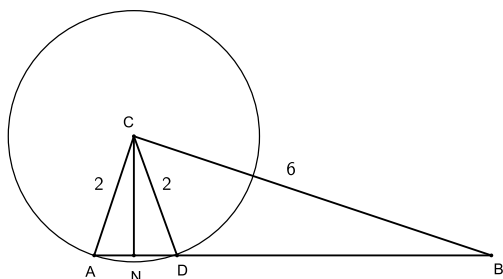
- A1.** Aritmetična sredina bo najmanjša v primeru, ko Jure na tablo zapiše le števila 1, 2 ali 3. Ker je modus enak 3, je enk oziroma dvojk največ 5. Skupno število enk in dvojk je  $15 - 6 = 9$ . Torej bo aritmetična sredina najmanjša v primeru, ko je Jure na tablo zapisal 5 enk in 4 dvojke. Le ta je enaka  $\frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{15} = \frac{31}{15}$ .
- A2.** Trikotnik  $ABC$  je pravokoten s pravim kotom v oglišču  $A$ . Trikotniki  $ABC$ ,  $TAC$  in  $TBA$  so si podobni. S primerjavo prvega in drugega zapišemo razmerje  $|CT| : |AC| = |AC| : |BC|$  oziroma  $|CT| : 4 = 4 : 5$ . Torej je  $|CT| = \frac{16}{5}$ . Za prvi in tretji trikotnik lahko zapišemo razmerje  $|TB| : |AB| = |AB| : |BC|$  oziroma  $|TB| : 3 = 3 : 5$ . Od tod je  $|TB| = \frac{9}{5}$ . Iskano razmerje je enako  $9 : 16$ .
- 
- A3.** V danem izrazu izračunamo levo stran in dobimo  $a^2 - 31a + 58 = 89$ . Preoblikujemo ga v  $a^2 = 31 + 31a$ , izpostavimo 31 in zapišemo  $\frac{a^2}{a+1} = 31$ .
- A4.** Naj bo  $a$  dolžina prve katete danega trikotnika. Dolžina druge katete je enaka  $a - 10$ , dolžina hipotenuze pa  $a + 10$ . Upoštevamo Pitagorov izrek in dobimo enačbo  $a^2 + (a - 10)^2 = (a + 10)^2$ . Preoblikujemo jo v  $a(a - 40) = 0$ . Torej sta kateti dolgi 40 cm in 30 cm, ploščina trikotnika pa je enaka  $600 \text{ cm}^2$  oziroma  $6 \text{ dm}^2$ .
- A5.** Zapišimo ploščine mejnih ploskev  $S_1 = ab = 2 \text{ m}^2$ ,  $S_2 = bc = 3 \text{ m}^2$  in  $S_3 = ac = 6 \text{ m}^2$ . Pomnožimo vse tri enakosti in dobimo  $a^2 b^2 c^2 = 6^2$ . Od tod je prostornina enaka  $V = abc = 6 \text{ m}^3$ .
- A6.** Število  $a^b$  mora biti čim manjše, število  $c^d$  pa čim večje. Drugo število je zato zagotovo pozitivno, kar velja le v primerih  $d = -2$  ali  $d = -4$ . Po velikosti primerjajmo števila  $(-1)^{-2} = 1$ ,  $(-1)^{-4} = 1$ ,  $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$ ,  $(-3)^{-4} = \frac{1}{81}$ ,  $(-4)^{-2} = \frac{1}{16}$  in  $(-2)^{-4} = \frac{1}{16}$ . Torej je  $c = -1$ . Prvo število bo čim manjše, če bo negativno. To se zgodi, če je  $b$  liho število in zato je  $b = -3$ . Primerjamo med sabo še števili  $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$  in  $(-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$ . Sledi, da je  $a = -2$ . Iskani zmnožek števil je enak  $bd = -3 \cdot (-4) = 12$ .
- A7.** Zapišemo Pitagorov izrek za višino pravilne enakorobe štiristrane piramide:  $v_1^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ . Piramida je zato visoka  $v_1 = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ . Prostornina razporejenega voska je enaka prostornini kvadra:  $V_2 = a^2 v_2 = 36v_2$ , kjer je  $v_2$  višina, do katere sega vosek. Prostornini piramide in kvadra sta enaki, zato velja  $\frac{36v_1}{3} = 36v_2$ . Torej je  $v_2 = \sqrt{2} \text{ cm}$ .

**A8.** Absolutne razlike pik pri metu dveh kock so lahko: 0, 1, 2, 3, 4 in 5. Število vseh možnih izidov je pri metu dveh kock enako 36. Zanima nas le  $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$  možnosti. Razlika 0 se pojavi v šestih metih, 1 v desetih, 2 v osmih. Skupaj se vse tri pojavijo v 24 metih, torej je  $a > 2$  oziroma  $a = 3$ .

- B1.** Naj bo  $n$  število stranic večkotnika. Ker je število diagonal enako  $\frac{n(n-3)}{2}$ , zapišemo enačbo  $\frac{n(n-3)}{2} + 2n = 55$ . Preoblikujemo jo v  $n(n+1) = 110 = 10 \cdot 11$ . Edina možnost za  $n = 10$ . Vsota notranjih kotov je enaka  $(n-2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$ .

**Zapisano število diagonal** ..... 1 točka  
**Zapisana enačba za vsoto vseh diagonal, vseh stranic in vseh oglišč** ... 1 točka  
**Zapisana enačba in razcep števila  $n$ :  $n(n+1) = 10 \cdot 11$**  ..... 2 točki  
**Rešitev enačbe  $n = 10$**  ..... 1 točka  
**Izračunana vsota notranjih kotov** ..... 1 točka

- B2.** Dolžina hipotenuze  $|AB|$  v trikotniku  $ABC$  je enaka  $c^2 = 6^2 + 2^2 = 40$  oziroma  $c = 2\sqrt{10}$  cm. Izračunamo njegovo ploščino  $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$  cm<sup>2</sup>. Ploščina je enaka tudi  $S = \frac{c \cdot v}{2}$ , kjer je  $v$  višina trikotnika. Torej je višina enaka  $v = \frac{2 \cdot S}{c} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ . Trikotnik  $ADC$  je enakokrak z osnovnico  $AD$ . Njegova višina je enaka višini trikotnika  $ABC$ . Uporabimo Pitagorov izrek za dolžino daljice  $AN$ , kjer je točka  $N$  nožišče višine na stranico  $AD$  in hkrati tudi njeno razpolovišče:  $|AN|^2 = 2^2 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ . Dolžina stranice  $|AD| = 2 \cdot |AN| = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ . Razmerje  $|AD| : |AB| = \frac{2\sqrt{10}}{5} : 2\sqrt{10} = \frac{1}{5} : 1 = 1 : 5$ .



**Izračunana dolžina hipotenuze** ..... 1 točka  
**Izračunana ploščina** ..... 1 točka  
**Izračunana višina** ..... 1 točka  
**Ugotovitev, da je trikotnik  $ADC$  enakokrak** ..... 1 točka  
**Izračunana dolžina daljice  $|AN|$**  ..... 1 točka  
**Izračunana dolžina stranice  $|AD|$  ter zapisano razmerje** ..... 1 točka

**Opomba:** Rezultati, dobljeni z merjenjem, ne štejejo.

- B3.** Naj bo  $n$  število piškotov v eni škatli, število naročenih škatel pa  $\underline{a} \underline{b}$ . Razlika med naročenim številom in spakiranim je  $n(\underline{a} \underline{b} - \underline{b} \underline{a})$  oziroma  $n(10a + b - (10b + a)) = n(9a - 9b) = 9n(a - b)$ . Razcepimo število 4248 (najprej ga delimo z 9) in dobimo  $4248 = 9 \cdot 8 \cdot 59$  oziroma  $n(a - b) = 8 \cdot 59$ . Torej je  $n$  lahko samo 59 in  $a - b = 8$ , kar velja samo v primeru  $a = 9$  in  $b = 1$ . Naročili so 91 škatel piškotov.

**Z izrazom zapisana razlika med naročenim in spakiranim številom** ..... 1 točka  
**Zapisana razlika v desetiškem zapisu** ..... 1 točka  
**Razcep števila 4248 na prafaktorje** ..... 1 točka  
**Utemeljena ugotovitev, da je število piškotov v eni škatli enako 59** ..... 1 točka

**Zapisana razlika števk:  $a - b = 8$ ..... 1 točka**  
**Zapisana rešitev ..... 1 točka**

**Opomba:** Za rešitev s pomanjkljivo utemeljitvijo tekmovalec prejme 1 točko.