Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilen odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkrožen nepravilen odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu priznajo začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	C	D	B	D	C	A

Utemeljitve:

A1. Izračunajmo $\frac{2017^2-2015^2}{8^2-1} = \frac{(2017-2015)\cdot(2017+2015)}{63} = \frac{2\cdot 4032}{63} = 2 \cdot 64 = 2^7$.

A2. Vseh dvobojev je bilo 63, saj vsak od 64 igralcev razen zmagovalca izgubi en dvoboj.

A3. Označimo z x znesek računa v januarju, torej je bila višina računa februarja enaka $1.15x$. Dobimo enačbo $2.15x = 22.36$ z rešitvijo $x = 10.4$. Račun je februarja znašal 11.96 €.

A4. Potenco 2^{2017} lahko zapišemo kot $(2^{10})^{201} \cdot 2^7 = 1024^{201} \cdot 2^7$. Pravilni odgovor je D.

A5. Obseg nove krožnice predstavlja $\frac{5}{12}$ obsega prve krožnice. V enakem razmerju sta tudi njuna polmera, zato je polmer druge krožnice enak $\frac{5}{12} \cdot 6 = 2.5$ cm.

A6. V predpisanem zaporedju so 4 števila manjša od 10. Naslednja števila imajo na mestu desetic števko 2 in takih je 5. Sledijo jim števila, ki imajo na mestu desetic 4, 6 ali 8. Takih je $3 \cdot 5 = 15$. Nato so na vrsti števila, ki imajo na mestu stotic števko 2: $200, 202, 204, 206, 208, 220, \ldots$. Takih je $5 \cdot 5 = 25$ in vseh skupaj je zaenkrat 49. Naslednje je na vrsti število 400.

A7. Ker je razmerje med širino in višino kvadra enako $7 : 6$ in je razlika med njima 3 cm, je širina kvadra 21 cm, višina pa 18 cm. Torej je dolžina kvadra 25 cm, njegova prostornina pa je enaka 9450 cm^3 oziroma 9.45 dm^3.

A8. Verjetnost, da iz druge škatle izvlečemo modro kroglico, je $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Ker izbiramo škatlo naključno, izberemo pravo škatlo z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Verjetnost je torej enaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

B1. 1. *način*

Dolžino stranice kvadrata označimo z a. Ker je trikotnik DEF pravokoten, zadošča, da izrazimo dolžini njegovih katet EF in DF z a. Trikotnik EFB je pravokoten in enakokrak, zato predstavlja pol kvadrata z diagonalo EB. Dolžina daljice EB je enaka $\frac{a}{2}$ oziroma $\sqrt{2} \cdot |EF|$. Torej je $|EF| = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Diagonala DB je dolga $a\sqrt{2}$ in zato je $|DF| = a\sqrt{2} - \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Ploščina trikotnika EFD je enaka $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \left(a\sqrt{2} - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8}\right) = \frac{3a^2}{16}$. Ploščina kvadrata $ABCD$ je enaka a^2, torej so osenčene $\frac{3}{16}$ kvadrata.

Zapisana dolžina stranice EF .... 2 točki
Zapisana dolžina stranice FD .... 2 točki
Izračunana ploščina trikotnika EFD .... 1 točka
Rešitev .... 1 točka

2. *način*

Dolžino stranice kvadrata označimo z a. Točko E prezrcalimo čez diagonalo BD in dobljeno točko označimo z G. Nastali trikotnik DEG je enokrak s podvojeno ploščino glede na trikotnik DEF. Izrazimo ploščino trikotnika DEG s ploščino kvadrata in ploščinami trikotnikov AED, CDG in EBG. Prvi in drugi trikotnik sta skladna s ploščinama $\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$, ploščina zadnjega pa je enaka $\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$. Ploščina trikotnika DEG je zato enaka $a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$. Ker je ploščina trikotnika DEF enaka polovici ploščine trikotnika DEG, so osenčene $\frac{3}{16}$ kvadrata.

Ugotovitev, da je trikotnik DEG enakokrak s podvojeno ploščino .... 2 točki
Izračunana ploščina trikotnika AED oziroma CDG .... 1 točka
Izračunana ploščina trikotnika EBG .... 1 točka
Izračunana ploščina trikotnika DEG .... 1 točka
Rešitev .... 1 točka

B2. Število rdečih točk označimo z x. Vseh možnih daljic med rdečimi točkami je zato $\frac{x(x-1)}{2}$. Dobimo enačbo $\frac{x(x-1)}{2} = 15$ oziroma $x(x-1) = 30$ z rešitvijo $x = 6$. Iz besedila razberemo, da je Anja narisala 136 daljic. Število vseh narisanih točk označimo z y in dobimo enačbo $\frac{y(y-1)}{2} = 136$ oziroma $y(y-1) = 272 = 17 \cdot 16$. Od tod sledi, da je $y = 17$. Torej je število modrih točk enako $17 - 6 = 11$.

Zapisana formula za izračun števila daljic med točkami .... 1 točka
Izračunano število rdečih točk .... 1 točka
Ugotovitev o skupnem številu vseh daljic in smiselna uporaba le-tega .. 1 točka
Izračunano število vseh točk .... 2 točki
Izračunano število modrih točk .... 1 točka

Opomba 1: ***Če je naloga reševana s poskušanjem (brez uporabe enačb), lahko dobi tekmovalec največ 4 točke, ker ni dokazal enoličnosti rešitve.***

Opomba 2: Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Naj bo x število rdečih točk in y število modrih točk. Ker je rdečih daljic 15, dobimo enačbo $\frac{x(x-1)}{2} = 15$, od koder sledi $x = 6$. Podobno lahko izrazimo še število modrih in zelenih daljic: $121 = xy + \frac{y(y-1)}{2}$. Od tod dobimo enačbo $y^2 + 11y - 242 = 0$, ki jo lahko razstavimo v $(y+22)(y-11) = 0$. Edina smiselna rešitev te enačbe je $y = 11$, torej je Anja narisala 11 modrih točk.

B3. Rešimo enačbo:

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 + y^2 &= (x+y)^2 \\
x^2 + 8x + 16 + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\
8x + 16 &= 2xy \\
x &= \frac{16}{2y-8}
\end{aligned}$$

Količnik $x = \frac{8}{y-4}$ mora biti naravno število. Števili x in $y-4$ sta delitelja števila 8: 1, 2, 4 in 8. Zato so možnosti za število y: 5, 6, 8 in 12. Torej enačbo rešijo naslednji pari (x, y): $(1, 12)$, $(2, 8)$, $(4, 6)$, $(8, 5)$.

Zapisana enakovredna enačba: $2xy - 8x = 16$ .... **1 točka**
Izražen x ali y ali sklepanje o deliteljih števila 8. .... **1 točka**
Zapisani vsi iskani pari .... **4 točke**

Opomba: ***Za vsaki dve napačni rešitvi poleg pravilnih rešitev tekmovalec izgubi 1 točko.***