52. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 16. april 2016

Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor pol točke odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	C	D	C	B	C	D	B

Utemeljitve:

A1. Računajmo $\frac{1}{\sqrt{18}}\left(\sqrt{8}+\sqrt{32}\right)=\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)=2$.

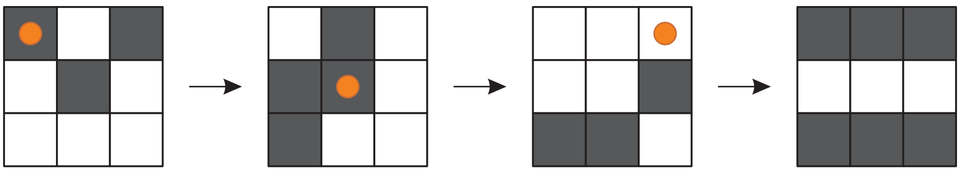
A2. Vrednost izraza 3^6-2^6 je enaka 665. Razcepimo število na prafaktorje, dobimo $665=5\cdot 7\cdot 19$. Vsota teh faktorjev je enaka 31.

A3. Zapišemo enačbo $n+\frac{n(n-3)}{2}=45$ in jo preoblikujemo v $n(n-1)=90$. Rešitev enačbe je $n=10$.

A4. Izračunamo: $|8\cdot(-4)-(-(-(-4))+(-8))|=|8\cdot(-4)-(-4-8)|=|-32+12|=20$.

A5. Zapišemo račun za prvo aritmetično sredino: $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{11}}{11}=4850$. Ko od vsakega števila odštejemo 10, dobimo:
$\frac{a_1-10+a_2-10+\ldots+a_{11}-10}{11}=4850-\frac{110}{11}=4840$.

A6. Na koncu je črno obarvanih 6 kvadratkov.



A7. Vseh zapisov časa oblike $11{:}1x$, kjer je x element množice $\{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, je 9. Podobno velja v zapisih $22{:}2x$ in $00{:}0x$. Pri zapisu oblike $1x{:}xx$ je le 5 možnosti, saj je x element množice $\{0,2,3,4,5\}$. Podobno velja v zapisu oblike $0x{:}xx$. Zapisi oblike $2x{:}xx$ so le trije: $20{:}00$, $21{:}11$ in $23{:}33$. Vseh ustreznih zapisov je $3\cdot 9+2\cdot 5+3=40$.

A8. Naj bo a dolžina pravokotnika in b njegova širina. Dolžina stranice PR je enaka $\frac{a}{3}$. Višina na stranico PR trikotnika PRS pa je enaka $\frac{b}{2}$. Torej je ploščina trikotnika PRS enaka $\frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}}{2}$, kar je $\frac{1}{12}$ ploščine pravokotnika.

B1. Izračunamo

$$4^{2016} : 4^{2015} : (5 \cdot 2^3 + \frac{16^5}{8^5} - 3^5 : 3^3 : \frac{1}{9} - \sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{8^2 + 6^2}) =$$

$$= 4 : (5 \cdot 8 + (\frac{16}{8})^5 - 3^2 \cdot 9 - \sqrt{\frac{25}{16}} + \sqrt{64 + 36}) =$$

$$= 4 : (40 + 2^5 - 81 - \frac{5}{4} + 10) = 4 : (40 + 32 - 81 - 1\frac{1}{4} + 10) = 4 : (-\frac{1}{4}) = 4 \cdot (-4) = -16$$

Izračunana vrednost prvega količnika: $4^{2016} : 4^{2015} = 4$**. .... 1 točka**

Izračunana vsota prvih dveh členov v oklepaju: $5 \cdot 2^3 + \frac{16^5}{8^5} = 40 + 32$**. .... 1 točka**
Izračunan tretji člen v oklepaju: $3^5 : 3^3 : \frac{1}{9} = 3^4 = 81$**. .... 1 točka**
Izračunani vrednosti korenov: $-\sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{8^2 + 6^2} = -1\frac{1}{4} + 10$**. .... 1 točka**
Izračunana vrednost izraza v oklepaju: $40 + 32 - 81 - 1\frac{1}{4} + 10 = -\frac{1}{4}$**. ..... 1 točka**

Rezultat: $4 : (-\frac{1}{4}) = -16$**. .... 1 točka**

B2. V razredu je x deklet in x fantov. Število svetlolasih fantov je enako eni četrtini vseh svetlolascev, torej $25\ \%$ od $40\ \%$ od $2x$, kar je enako $20\ \%$ od x. Temnolasih fantov je tedaj $x - 20\ \%$ od $x = 80\ \%$ od x. To število delimo z $2x$ in dobimo delež temnolasih fantov v razredu, ki je $40\ \%$.

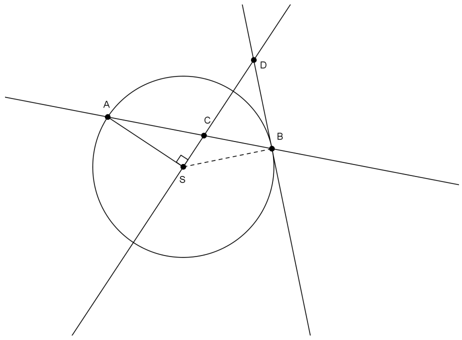
Ugotovitev, da je delež svetlolasih fantov enak $\frac{1}{4}$ vseh svetlolascev. .... 1 točka

Izračunano število svetlolasih fantov glede na vse fante: $20\ \%x$**. .... 2 točki**

Izračunano število temnolasih fantov glede na vse fante: $80\ \%x$**. .... 1 točka**

Izračunan delež temnolasih fantov glede na vse: $40\ \%$**. .... 2 točki**

B3. Narišemo skico.



Označimo: $\sphericalangle SAB = \alpha$. Trikotnik ABS je enakokrak, saj sta daljici SA in SB polmera krožnice. Torej sta kota $\sphericalangle SAB$ in $\sphericalangle ABS$ skladna. Kot $\sphericalangle DBS$ je pravi, zato je velikost kota $\sphericalangle DBC$ enaka $90° - \alpha$. Kot $\sphericalangle BCD$ je sovršen s kotom $\sphericalangle ACS$ in je zato velik $90° - \alpha$. Torej je trikotnik BCD res enakokrak.

Narisana skica z oznakami. .... 1 točka

Sklep, da sta kota $\sphericalangle SAB$ in $\sphericalangle ABS$ skladna. .... 1 točka

Ugotovitev, da je $\sphericalangle DBC$ velik $90° - \alpha$. .... 1 točka

Sklep, da je $\sphericalangle BCD$ velik $90° - \alpha$. .... 2 točki

Zaključek trikotnik BCD je enakokrak. .... 1 točka

Opomba: Kandidat, ki je napačno narisal skico (namesto središča kroga je upošteval središče polmera), vse ostale sklepe pa pravilno zapisal, dobi največ 5 točk.