

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis, kopiranje in uporabo gradiva v tem dokumentu izključno za izvedbo ustreznega tekmovanja v skladu s pravilnikom in ob času, določenim z razpisom. **Najkasneje v 7 dneh po tekmovanju je potrebno vse elektronske verzije tega dokumenta izbrisati, vse neizkoriščene tekmovalne pole (razen manjšega števila izvodov za arhiv tekmovalne komisije), pa uničiti.** Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Referenčna koda datoteke je zapisana ob vsaki strani tega dokumenta.

1. $v_0 = 50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s}$, $t_0 = 2,0 \text{ s}$, $k_t = 0,30$.

a)

$$x_1 = v_0 t_0 = 27,78 \text{ m} \approx 28 \text{ m}$$

Če je $x > x_1$, avtomobil ne uspe prepeljati križišča, preden se prižge rdeča luč.

Avtomobil lahko zavira s pojemkom, ki je največ $a = k_t g$, kjer je $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ težni pospešek. Iz enačbe za enakomerno pospešeno gibanje $2ax_2 = v_0^2$ dobimo

$$x_2 = \frac{v_0^2}{2k_t g} = 32,81 \text{ m} \approx 33 \text{ m} .$$

Za oddaljenosti $x_1 < x < x_2$ se avtomobil ne more niti ustaviti pred semaforjem niti prepeljati križišča preden se prižge rdeča luč, torej je iskani interval med 28 m in 33 m.

[4 t.]

b) Da se bo voznik lahko povsod odločil ali prevoziti ali ustaviti, mora biti omejitev hitrosti v taka, da sta meji x_1 in x_2 iz vprašanja a) enaki in ni "nevarnega" intervala.

$$x'_1 = x'_2 \quad \iff \quad vt_0 = \frac{v^2}{2k_t g}$$

Kar nam da

$$v = 2k_t g t_0 = 11,76 \text{ m/s} = 42,34 \text{ km/h} \approx 42 \text{ km/h} .$$

[3 t.]

c) Da bo standardna omejitev hitrosti po mestu zadoščala, mora biti koeficient trenja k' tak, da bosta meji x_1 in x_2 enaki pri hitrosti v_0 , kar nam da

$$v_0 t_0 = \frac{v_0^2}{2k' g} \quad \implies \quad k' = \frac{v_0}{2g t_0} = 0,354 \approx 0,35 .$$

[3 t.]

2. $a = 10$ cm, $v = 5$ cm, $l = 50$ cm, $h = 4$ cm, $\rho_o = 800$ kg/m³, $d = 2$ cm.

a) V ravnovesju je teža klade enaka teži izpodrinjene tekočine. Težo klade izrazimo z gostoto lesa kot $m_k g = Sl\rho_l g = \frac{1}{2}av\rho_l g$, težo izpodrinjene vode pa kot $m_v g = \frac{1}{2}bh\rho_v g$. Tu sta b vodoravna stranica in h višina prečnega preseka klade, ki je potopljen v vodo, in ima obliko enakokrakega trikotnika, podobnega osnovni ploskvi klade. Zaradi podobnosti obeh trikotnikov velja: $b/h = a/v$ in $b = ah/v$. Izenačimo teži in dobimo

$$\frac{av}{2} l\rho_l g = \frac{bh}{2} l\rho_v g = \frac{ah^2}{2v} l\rho_v g.$$

Po okrašanju sledi

$$v\rho_l = \frac{ah^2}{v} \rho_v, \quad \rho_l = \frac{h^2}{v^2} \rho_v = 640 \text{ kg/m}^3.$$

[3 t.]

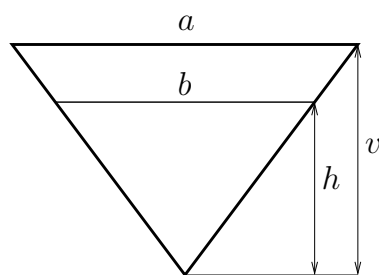
b) V olju se razsežnosti potopljenega trikotnega preseka spremenijo, še vedno pa velja, da je trikotnik podoben trikotniku prečnega preseka klade. Če njegovo višino, ki je hkrati tudi enaka iskani globini, označimo z x , je vodoravna osnovna stranica enaka $c = ax/v$. Iz enačbe za ravnovesje, v kateri se sedaj pojavi gostota olja namesto gostote vode, sledi:

$$\frac{av}{2} l\rho_l g = \frac{cx}{2} l\rho_o g = \frac{ax^2}{2v} l\rho_o g$$

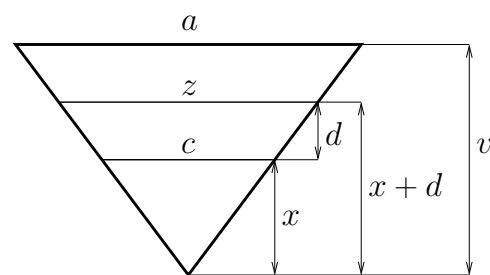
in za globino potopljenega roba dobimo

$$x = \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_o}} v = 4,5 \text{ cm}.$$

[2 t.]



a) $a : v = b : h$



b, c) $a : v = c : x = z : (x + d)$

c) V vodi potopljeni del klade je podoben potopljenemu delu pri b), presek potopljenega dela v olju pa je trapez z višino d . Če obdržimo enake oznake kot pri b), je krajša vodoravna stranica enaka kar c , dolžino daljše vodoravne stranice (na gladini vode) pa označimo z z . V ravnovesju je teža klade enaka vsoti vzgona vode in olja:

$$\frac{av}{2} l\rho_l g = \frac{cx}{2} l\rho_v g + \frac{(c+z)d}{2} l\rho_o g.$$

Iz podobnosti celotnega potopljenega trikotnika in celotnega preseka klade velja sorazmerje $z/(x+d) = a/v$, od koder sledi za daljšo vodoravno stranico trapeza $z = a(x+d)/v$. Po okrašanju iz ravnovesne enačbe sledi:

$$av\rho_l = \frac{x^2 a}{v} \rho_v + \frac{(a(x+d) + ax)d}{v} \rho_o$$

in kvadratna enačba za x :

$$\rho_v x^2 + 2d\rho_o x + d^2\rho_o - v^2\rho_l,$$

s smiselno rešitvijo $x = 2,32$ cm. Spodnji rob je torej v globini

$$h' = x + d = 4,3 \text{ cm}.$$

[5 t.]

3. $m = 100 \text{ g}$, $a = 3 \text{ m/s}^2$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $k = 0,5$, $M' = 400 \text{ g}$.

a) Ko se klada giblje od škripca, se utež dviga s pospeškom a , vrstica je napeta s silo F_1 in velja

$$F_1 - mg = ma \quad \Longrightarrow \quad F_1 = m(g + a) = 1,28 \text{ N} \approx 1,3 \text{ N}.$$

Ko se klada giblje proti škripcu, se utež spušča s pospeškom a , vrstica je napeta s silo F_2 in velja

$$mg - F_2 = ma \quad \Longrightarrow \quad F_2 = m(g - a) = 0,68 \text{ N} \approx 0,7 \text{ N}.$$

[2 t.]

b) Naj bo razdalja od škripca do uteži l . Vrvica je, ko klada miruje in se utež giblje proti skrajni spodnji legi, napeta vse bolj, ko je utež vse nižje, saj se giblje z vse večjo hitrostjo in je hkrati tudi komponenta teže uteži v smeri vrvice vse večja. Sila v vrvici je zato največja, ko je utež v najnižji točki in je kot med vrvico in vodoravnico 90° oziroma je vrvica navpična. Hitrost uteži je takrat iz ohranitve energije, ker se spusti ravno za l , enaka $v = \sqrt{2gl}$. Na utež delujeta teža in sila vrvice F obe v navpični smeri. Ker se utež giblje po krožnici s polmerom l , velja

$$ma_c = m\frac{v^2}{l} = F - mg \quad \Longrightarrow \quad F = mg + m\frac{2gl}{l} = 3mg.$$

Sila vrvic se preko škripca prenese na klado, ki jo na mestu zadržuje sila lepenja, ki je lahko velika največ kMg . Sledi

$$3mg \leq kMg \quad \Longrightarrow \quad M \geq \frac{3m}{k} = 600 \text{ g}.$$

[4 t.]

c) Naloga je podobna primeru b), le da gledamo situacijo, kjer utež ni v najnižji lege, ampak je vrvica med gibanjem iz vodoravne lege opisala kot φ . Tedaj se je utež spustila za $h = l \sin \varphi$ in velja $v^2 = 2gl \sin \varphi$. Smer hitrosti je pravokotna na vrvico, lokalno utež kroži z obodno hitrostjo v po krožnici s polmerom l . Vrvico napenja tudi komponenta teže vzporedna z vrvico, ki ima velikost $F'_g = mg \sin \varphi$. Ker se utež giblje po krožnici, velja

$$ma_c = m\frac{v^2}{l} = F' - F'_g \quad \Longrightarrow \quad F' = mg \sin \varphi + m\frac{2gl \sin \varphi}{l} = 3mg \sin \varphi.$$

Klada ne zdrsne, dokler je sila vrvic F' manjša od maksimalne sile lepenja $kM'g$. Iz neenačbe

$$3mg \sin \varphi \leq kM'g$$

izrazimo $\sin \varphi$ kot

$$\sin \varphi \leq \frac{kM'}{3m} = \frac{2}{3},$$

kar nam da končno rešitev

$$\varphi = \arcsin \frac{2}{3} = 41,81^\circ \approx 42^\circ.$$

[4 t.]