Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

2-106 2021-04-09 15:45

1. $U = 24$ kV, $a = 18$ cm, $d = 1{,}2$ cm, $\varepsilon = 4$, $E_0 = 30$ kV/cm.

a) V primeru (a) kondenzator v mislih razdelimo na dva dela: del z in del brez dielektrika. Ker je vsaka od plošč obema skupna, in je električni potencial vzdolž vsake od plošč konstanten, je napetost na obeh delih kondenzatorja med ploščama enaka. Gre torej za "vzporedno vezana" kondenzatorja.

Označimo naboj na prvem kondenzatorju na začetku z e, napetost na njem z U, njegovo kapaciteto pa s C. Analogne oznake uporabimo za oba kondenzatorja v novi situaciji vzporedne vezave, le da uporabimo v oznakah indekse 1 in 2.

Začetni naboj na ploščah se lahko le prerazporedi, torej velja $e = e_1 + e_2$. Naboj lahko na vsakem od kondenzatorjev povežemo z napetostjo na njem prek

$$e = CU, \quad e_1 = C_1 U', \quad e_2 = C_2 U'.$$

Upoštevali smo, da pri vzporedni vezavi kondenzatorjev velja $U_1 = U_2 = U'$.

Kapacitete kondenzatorjev izrazimo z dimenzijami plošč in njuno medsebojno razdaljo. Za začetni kondenzator, kjer poznamo U, velja

$$e = CU = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d}.$$

Za kondenzatorja v vzporednem vezju pa velja

$$C_1^{(a)} = \frac{\varepsilon_0 a x}{d}, \qquad C_2^{(a)} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a(a-x)}{d},$$

Do preboja pride prek zraka, torej tam, kjer ni dielektrika. Za tisti kondenzator lahko napetost U' na njem izrazimo z razdaljo med ploščama, in jakostjo električnga polja med ploščama, ki ima ravno prebojno vrednost E_0. Ko upoštevamo kapacitete v različnih primerih v enačbi ohranitve naboja ter povezavo s kapacitetami, sledi

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d} = (C_1^{(a)} + C_2^{(a)})U'^{(a)} = \left(\frac{\varepsilon_0 a x}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a(a-x)}{d}\right) E_0 d,$$

in od tod

$$x = \frac{\varepsilon a(E_0 d - U)}{E_0 d(\varepsilon - 1)} = 8{,}0 \text{ cm}.$$

[6 t.]

b)

Enako kot pri **a)** sta oba kondenzatorja na enaki napetosti, naboj na začetnem kondenzatorju pa se porazdeli med oba kondenzatorja, tako da se skupni naboj ohranja. V obeh primerih gre torej za "vzporedno vezana" kondenzatorja. Za kapaciteti velja

$$C_1^{(b)} = C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{d}, \qquad C_2^{(b)} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d'}.$$

Tako kot pri **a)** do preboja pride prek zraka, torej tam, kjer ni dielektrika:

$$U'^{(b)} = E_0 d'.$$

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2 U}{d} = (C_1^{(b)} + C_2^{(b)})U'^{(b)} = \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{d} + \frac{\varepsilon_0 a^2}{d'}\right) E_0 d',$$

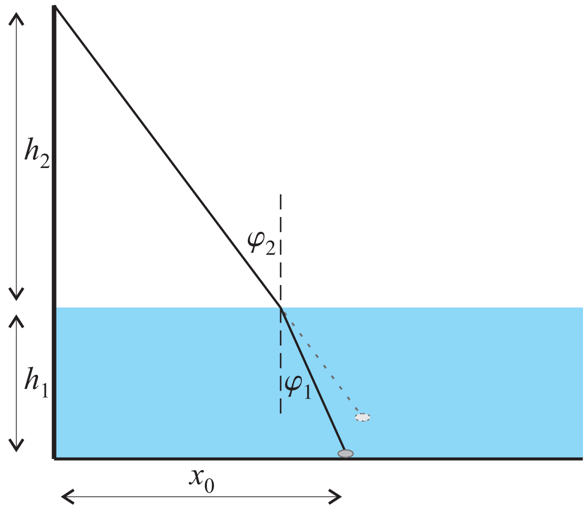
in od tod

$$d' = \frac{U}{E_0} - \frac{d}{\varepsilon} = 5{,}0 \text{ mm}.$$

[4 t.]

2. $h_1 = 1{,}00$ m, $h_2 = 2{,}00$ m, $\varphi_2 = 25°$, $n = 1{,}33$, $v_0 = 5{,}00$ m/s, $v = 1{,}00$ m/s,

a) Lovec vidi sipo pod kotom φ_2, kar določa smer svetlobnega curka, ki prihaja od sipe do njegovih oči nad gladino vode. Vpadni kot na meji zrak-voda je v zraku torej φ_2, tistega v vodi označimo z φ_1. Kota povezuje lomni zakon $\sin\varphi_2 = n \sin\varphi_1$; $\varphi_1 = 18{,}53° \approx 18{,}5°$.



Iz skice je razvidno, da velja

$$x_0 = h_1 \tan\varphi_1 + h_2 \tan\varphi_2 = 93{,}26\,\text{cm} + 33{,}51\,\text{cm} = 126{,}77\,\text{cm} \approx 127\,\text{cm}\,.$$

[3 t.]

b) Iz skice je razvidno, da mora lovec sulico vreči pod kotom φ, da velja

$$\tan\varphi = \frac{x_0}{h_1 + h_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{x_0}{h_1 + h_2}\right) = 22{,}9°\,.$$

[2 t.]

c) Sipa beži s hitrostjo v ob dnu in je po času t od pričetka gibanja v vodoravni smeri od lovca oddaljena za $x = x_0 + vt$. Da bi sulica lovca zadela sipo, mora v istem času opraviti pot $s = v_0 t$. Tir leta sulice je hipotenuza pravokotnega trikotnika, katerega ena kateta je $H = h_1 + h_2 = 3{,}00$ m, druga kateta pa je ravno vodoravna oddaljenost sipe od lovca x. Pitagorov izrek $s^2 = H^2 + x^2$ da kvadratno enačbo za čas leta sulice

$$(v_0^2 - v^2) \cdot t^2 - 2x_0 v \cdot t - \left(H^2 + x_0^2\right) = 0$$

z rešitvama

$$t_{1,2} = \frac{x_0 v \pm \sqrt{(v_0^2 - v^2)(H^2 + x_0^2) + x_0^2 v^2}}{v_0^2 - v^2}\,.$$

Rešitev z negativnim predznakom pred korenom da negativen čas, kar fizikalno ni smisleno, medtem ko da rešitev s pozitivnim predznakom rešitev $t = 0{,}7197$ s$\approx 0{,}72$ s.

Kot proti navpičnici φ', pod katerim mora lovec vreči sulico, določa enačba

$$\tan\varphi' = \frac{x_0 + vt}{H}$$

z rešitvijo

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{x_0 + vt}{h_1 + h_2}\right) = 33{,}52° \approx 33{,}5°\,.$$

[5 t.]

Opomba: Vprašanje c) se da lepo in hitro ter seveda fizikalno smisleno rešiti tudi iterativno. Argument za tak pristop je dejstvo, da je sipa veliko počasnejša od sulice.

V prvem koraku izračunamo čas leta sulice, če bi se sipa ne premaknila. Dobimo čas (ničti približek) $t_0 = \sqrt{H^2 + x_0^2}/v_0 = 0{,}6514$ s. S tem časom izračunamo premik sipe in prvi približek za vodoravno oddaljenost sipe, ko naj bi jo zadela sulica, $x_1 = x_0 + vt_0 = 1{,}919$ m. S to oddaljenostjo izračunamo prvi približek časa leta sulice $t_1 = \sqrt{H^2 + x_1^2}/v_0 = 0{,}7123$ s, ki je od pravega časa, izračunanega iz kvadratne enačbe, manjši samo za 1 %, kar je že v okviru natančnosti podatkov, torej skoraj ni treba narediti naslednje iteracije, ampak lahko kot soliden približek φ' izračunamo kar kot

$$\varphi' = \arctan \frac{x_1}{H} = 32{,}6^\circ \, .$$

Rezultat se na dve števki ujema s "pravim" ($\approx 33^\circ$), za ujemanje na vsaj 3 števke je potrebno narediti še en korak iteracije, ki da rezultat $\varphi' = 33{,}51^\circ$, kar se od prave vrednosti razlikuje samo za 0,03 %.

Kdor bi reševal iterativno in se ustavil po eni iteraciji, si zasluži pri tej nalogi vsaj 4 od 5 možnih točk, lahko dobi tudi vseh 5, saj je tak pristop bolj "fizikalen" kot reševanje kvadratne enačbe in premlevanje, katera od obeh rešitev je fizikalno smiselna.

3. $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k = 200$ N/m, $k_t = 0{,}1$, $k_l = 0{,}2$, $m = 100$ g, $h = 20$ cm.

a) Pri prostem padu z višine h utež doseže hitrost $v_u = \sqrt{2gh} = 1{,}98 \approx 2{,}0$ m/s. Ko je vrvica napeta, utež potegne prvo klado. Ker je vrvica toga, se v trenutku klada začne gibati s končno veliko hitrostjo v_1, uteži pa se v istem trenutku hitrost zmanjša z v_u do hitrosti klade v_1, tako kot pri neprožnem trku. Ker je čas kratek, je sunek teže zanemarljiv in ohranja se skupna gibalna količina klade in uteži:

$$m_u v_u = (m_1 + m_u) v_1\,, \qquad v_1 = \frac{m_u v_u}{m_1 + m_u} = \frac{m_u\sqrt{2gh}}{m_1 + m_u} = 0{,}18 \text{ m/s}\,.$$

[3 t.]

b) Takoj po tem, ko se klada začne gibati s hitrostjo v_1, deluje nanjo le sila vrvice in trenje, saj je sila vzmeti je zanemarljiva, ker je raztezek vzmeti zanemarljiv. Giblje je pospešeno s pospeškom a:

$$m_1 a = F - m_1 g k_t\,.$$

Z enakim pospeškom se giblje utež:

$$m_u a = m_u g - F = m_u g - m_1 a - m_1 g k_t\,.$$

Pospešek klade na začetku gibanja je torej enak

$$a = \frac{m_u g - m_1 g k_t}{m_1 + m_u} = 0\,.$$

[2 t.]

c) Da se druga klade premakne, mora biti sila vzmeti večja ali kvečjemu enaki največji sili lepenja:

$$k s_0 = m_2 g k_l\,.$$

Raztezek vzmeti mora biti enak najmanj

$$s_0 = \frac{m_2 g k_l}{k} = 1{,}96 \text{ cm} \approx 2{,}0 \text{ cm}\,.$$

[2 t.]

d) Vsota sprememb vseh energij, ki nastopajo v sistemu: kinetične energije prve klade in uteži, potencialne energije uteži ter prožnostne energije vzmeti, gre na račun izgub zaradi trenja med prvo klado in tlemi. „Trk“ med klado in utežjo je neprožen, zato energijski zakon zapišemo za spremembo od trenutka, ko se začne gibati prva klada, do trenutka, ko je vzmet raztegnjena za s_0 — kar je tudi enako premiku klade in uteži. Velja torej:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_1^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_2^2 + m_u g s_0 - \tfrac{1}{2}k s_0^2 = m_1 g k_t s_0\,.$$

Začetna hitrost v_1 je povezana z višino x, s katere moramo pred tem spustiti utež, kot $v_1 = \sqrt{2gx}\, m_u/(m_1 + m_u)$. Sledi

$$\frac{g x\, m_u^2}{m_1 + m_u} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_u)v_2^2 + \tfrac{1}{2}k s_0^2 - m_u g s_0 + m_1 g k_t s_0\,.$$

Višina je najmanjša možna, ko je končna hitrost prve klade enaka nič ($v_2 = 0$):

$$x = \frac{(k s_0^2 + 2 g s_0 (m_u - m_1 k_t))(m_1 + m_u)}{2 g m_u^2} = 43 \text{ cm}\,.$$

(Prva klada se ustavi le za hip, nato pa raztegnjena vzmet potegne obe kladi skupaj.)
(*Z vrednostjo $g = 10$ m/s^2 dobimo $x = 44$ cm.*)

[3 t.]