51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 18. april 2015

Rešitve za 7. razred

1. Računajmo:

$$\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4=$$

$$=\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{7}{3}}\right)\right)\cdot 4=$$

$$=(7-1)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{1}{7}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(3+\frac{3}{7}\right)\right)\cdot 4=$$

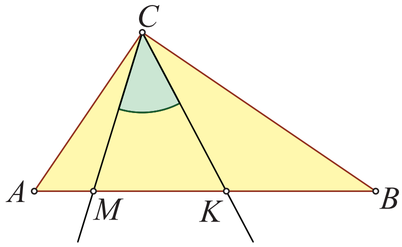
$$=6\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{24}{7}\right)\cdot 4=2-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{24}\right)\cdot 4=2-\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$. .... 1 točka
Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. .... 1 točka
Izračunani vsi štirje dvojni ulomki. .... 2 točki
Izračunana vrednost prvega člena: 2. .... 1 točka
Izračunana vrednost prvega količnika v drugem členu: $\frac{6}{7}$. .... 2 točki
Izračunana vrednost vsote obeh dvojnih ulomkov v drugem členu: $\frac{7}{24}$. .... 1 točka
Izračunan prvi faktor v drugem členu: $\frac{1}{4}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost izraza: 1. .... 1 točka

2. Leto 2014 je imelo 365 dni, saj ni prestopno. Število vseh dni označenih s številom, ki je deljivo s tri je enako $\frac{1}{3}$ od 365, torej 121. V teh dnevih je Miha privarčeval $121 \cdot 0.3$ EUR $=$ 36.3 EUR. Število vseh dni, ki jim pripada sodo število, je enako 182. Pri tem je potrebno izvzeti dneve, ki jim pripada število deljivo s šest, takih je $\frac{1}{6}$, torej 60. Število dni, ko je Miha dal v hranilnik 20 centov, je enako 122 $(182 - 60 = 122)$. Skupno je v teh dnevih privarčeval $122 \cdot 0.2$ EUR $= 24.4$ EUR. Ostanejo le še dnevi, ko je dal v hranilnik 10 centov, število le-teh je enako $365 - 121 - 122 = 122$. V teh dnevih je Miha privarčeval 12.2 EUR. Torej je v celem letu 2014 privarčeval $36.3 + 24.4 + 12.2 = 72.9$ EUR.

Ugotovitev, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik 30 centov, enako 121. 2 točki
Izračun števila vseh dni s sodo oznako. ....1 točka
Ugotovitev, da je potrebno izvzeti dneve s števili, ki so deljiva s 6. .... 2 točki
Sklep, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik 20 centov, enako 122. ....1 točka
Sklep, da je število dni, ki ustrezajo tretji lastnosti, enako 122.. .... 2 točki
Izračunan končni znesek privarčevanega denarja. ....2 točki

3. Označimo kota v trikotniku ABC: $\sphericalangle BAC = \alpha$ in $\sphericalangle CBA = \beta$.



Razberemo, da je trikotnik MBC enakokrak z osnovnico MC. Torej sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. Kot $\sphericalangle CBM$ je enak kotu β, zato je velikost kota $\sphericalangle BMC$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta)$. Podobno velja za trikotnik AKC, ki je enakokrak z osnovnico CK in v katerem sta kota $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$ skladna. Kot $\sphericalangle KAC = \alpha$, torej je velikost kota $\sphericalangle CKA$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha)$. Velikost kota $\sphericalangle MCK$ je enaka $180^\circ - \sphericalangle BMC - \sphericalangle CKA$. Upoštevamo, kar smo že izpeljali in dobimo: $180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta) - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. Vemo, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita 90°. Torej je velikost kota $\sphericalangle MCK$ enaka: $\frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

Enako velja, če obrnemo orientacijo trikotnika ali če je kateta a krajša od obeh katet.

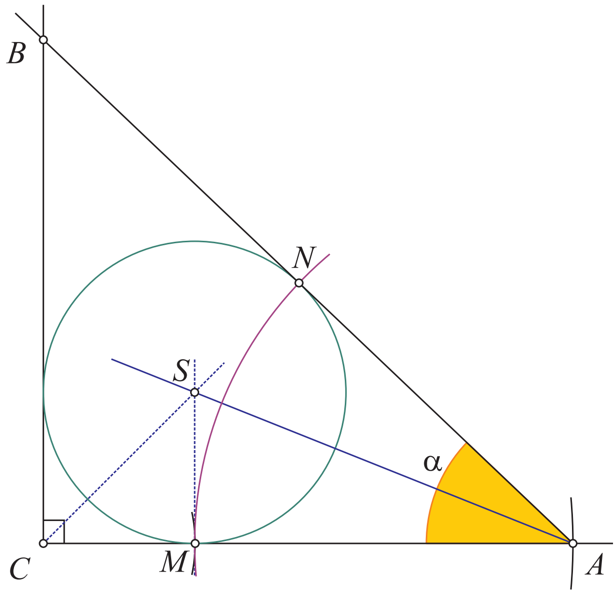
Narisana skica z označenima točkama K in M. .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik MBC enakokrak. .... 1 točka
Sklep, da sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. .... 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle BMC$. .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik AKC enakokrak s skladnima kotoma $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$. 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle CKA$. .... 1 točka
Zapisana velikost kota $\sphericalangle MCK = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. .... 2 točki
Upoštevanje, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita 90° ter izračunana velikost kota $\sphericalangle MCK = 45^\circ$. .... 2 točki

4. Število $5b3$ je deljivo s 3, kar pomeni, da je seštevek števk deljiv s 3. Torej je števka b lahko 1, 4 ali 7. Obravnavajmo vse tri možnosti. Če je $b=1$, velja $2a4+329=513$. Izračunamo $2a4$ in dobimo $513-329=184$. Ta rešitev ne ustreza. Če je $b=4$, je razlika $2a4$ enaka $543-329=214$. Torej je števka a enaka 1. V zadnjem primeru je $b=7$. Razlika $2a4$ je enaka $573-329=244$ in števka a je enaka 4.

Upoštevanje kriterija za deljivost s 3**. .... 1 točka**
Zapisane vse tri možnosti za števko b**. .... 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b=1$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4=184$**. . 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b=4$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4=214$**. . 2 točki**
Obravnavna možnost, če je $b=7$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4=244$**. . 2 točki**
Sklep, da sta edini možni vrednosti za števko a**:** 1 **in** 4**. .... 1 točka**

5. Postopek:

1. Konstruiramo pravi kot in označimo oglišče C.
2. S šestilom iz točke C odmerimo 7 cm in dobimo točko A.
3. Na kraku AC pravega kota iz točke C s šestilom odmerimo 2 cm in dobimo točko M, ki je dotikališče stranice AC z včrtano krožnico.
4. Konstruiramo simetralo pravega kota.
5. Skozi točko M konstruiramo vzporednico p drugemu kraku pravega kota.
6. Presek simetrale pravega kota in premice p je središče trikotniku včrtane krožnice, točka S.
7. Narišemo poltrak AS, ki je po definiciji simetrala notranjega kota trikotnika z vrhom v točki A.
8. Točko M prezrcalimo čez nosilko daljice AS in dobimo točko N. Dobljena točka je dotikališče iskane stranice AB in včrtane krožnice.
   Utemeljitev: trikotnika SAM in SAN sta skladna, ker leži daljica AS na simetrali kota $\sphericalangle NAM = \alpha$. Kota $\sphericalangle SAM$ in $\sphericalangle NAS$ sta skladna, torej je poltrak AS simetrala kota $\sphericalangle NAM = \alpha$.
9. Presečišče poltraka AN z drugim krakom pravega kota označimo s točko B in dobili smo trikotnik ABC, saj velja $\sphericalangle NAM = \alpha$.



Konstrukcija pravega kota. .... 1 točka
Odmerjeni točki A in M. .... 1 točka
Konstrukcija simetrale pravega kota. .... 1 točka
Konstrukcija vzporednice in oznaka središča trikotniku včrtane krožnice. . 2 točki
Sklep, da je poltrak AS simetrala kota z vrhom v točki A. .... 1 točka
Zrcaljenje točke M čez nosilko daljice A. .... 1 točka
Utemeljitev, da je dobljena točka N, dotikališče iskane stranice in včrtane krožnice. 2 točki
Označeno presečišče poltraka AN in drugega kraka pravega kota ter trikotnik ABC. .... 1 točka