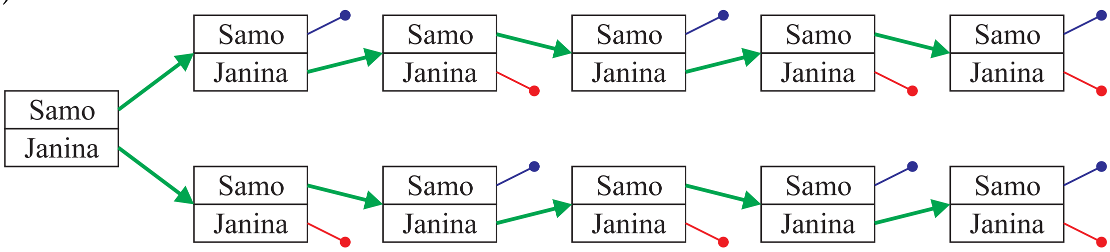
Rešitve za 9. razred

1. a) Narišemo kombinatorično drevo:



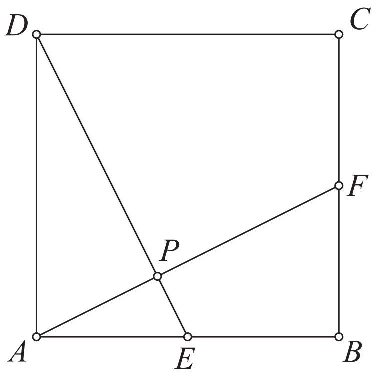
S preštevanjem ugotovimo, da je število vseh različnih potekov igre enako 12 ter da je Janina zmagala 6 krat.

b) Rešitev lahko razberemo iz drevesa: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Samo (6. set).

c) Recimo, da po 1. setu zmaga Samo, torej ima 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 2. setu zmagal Samo, se igra konča in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Kar ne ustreza zahtevam naloge, torej je zmagala Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 3. setu zmagala Janina, bi se igra končala in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Zmagal je Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 4. setu zmagal Samo, je igra končana in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Zmagala je Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 5. setu zmagala Janina, je igra končana in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Torej je zmagal Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 6. (zadnjem) setu zmagal Samo, bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Torej je zmagala Janina in oba imata po 10 pomaranč. Povzetek igre: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Janina (6. set). Podobno utemeljimo še drugo igro, ki ustreza zahtevam naloge: Janina (1. set), Samo (2. set), Janina (3. set), Samo (4. set), Janina (5. set) in Samo (6. set).

Zapisani vsi različni poteki iger. . . . . 2 točki
Odgovor, da je število vseh različnih iger enako 12. . . . . 1 točka
Odgovor, da je Janina zmagala šestkrat. . . . . 1 točka
Opis igre, ki se konča z drugo zaporedno zmago Sama v šestem setu. . . . . . 2 točki
Opisa obeh iger, ki se končata tako, da imata oba enako število pomaranč. 2 točki
(samo ena igra . . . . 1 točka)
Utemeljitev ene izmed obeh iger, ki ustrezata zahtevam naloge. . . . . 2 točki

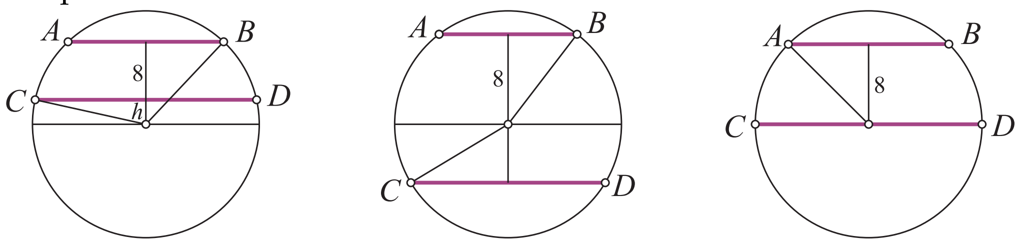
2. Narišimo skico.



Trikotnika AED in BFA sta skladna, torej sta tudi kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. Trikotnika AEP in AFB sta podobna, ker se ujemata v dveh kotih: skupen kot $\sphericalangle BAF$ ter skladna kota $\sphericalangle PEA$ in $\sphericalangle AFB$. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino daljice AF: $|AF|^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4}$ oziroma $|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Zapišemo razmerje enakoležnih stranic v obeh podobnih trikotnikih $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. Upoštevamo dolžine daljic in dobimo $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. Iz razmerja izrazimo $|AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Izračunamo še dolžino $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Iskano razmerje je enako $|AP| : |PF| = 2 : 3$.

Ugotovitev, da sta kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. .... 1 točka
Sklep, da sta trikotnika AEP in AFB podobna. .... 2 točki
Izračunana dolžina daljice $|AF|$. .... 1 točka
Zapisano razmerje enakoležnih stranic $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. .... 1 točka
Zapisano razmerje $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice $|AP|$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice $|PF|$. .... 2 točki
Zapisano razmerje $|AP| : |PF| = 2 : 3$. .... 1 točka

3. Ločimo tri možnosti: obe tetivi sta v istem polkrogu ali pa je vsaka v svojem ali pa je tetiva CD premer krožnice.



Označimo s h oddaljenost središča krožnice od tetive CD. V prvem primeru, ko sta obe tetivi v istem polkrogu, je tetiva AB od središča oddaljena $8 + h$. Polmer krožnice izrazimo s pomočjo Pitagorovega izreka $r^2 = 9^2 + h^2$, če upoštevamo tetivo CD. Upoštevajoč tetivo AB velja $r^2 = 7^2 + (8 + h)^2$. Izenačimo obe enačbi in dobimo: $81 + h^2 = 49+64+16h+h^2$. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $16h = -32$ z rešitvijo $h = -2$. Rešitev odpade, saj je razdalja nenegativno število. V drugem primeru je vsaka tetiva v svojem polkrogu. Tetiva AB je od središča krožnice oddaljena $8 - h$. Podobno kot v zgornjem primeru s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo r ter izenačimo obe enačbi. Dobimo enačbo $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$ z rešitvijo $h = 2$. Torej je polmer krožnice enak $r = \sqrt{85}$ cm. Če je tetiva CD premer, je polmer krožnice enak 9 cm. Ta možnost odpade, saj ne velja enakost $9^2 = 7^2 + 8^2$.

Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive CD. .... 1 točka
Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive AB v istem polkrogu. ... 1 točka
Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 + 16h + h^2$. .... 1 točka
Ugotovitev, da je rešitev enačbe $h = -2$, ki seveda odpade. .... 1 točka
Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive AB v drugem polkrogu. 1 točka
Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$. .... 1 točka
Izračunan rešitev enačbe $h = 2$. .... 1 točka
Izračunan polmer krožnice $r = \sqrt{85}$ cm. .... 2 točki
Izločitev možnosti, da je tetiva CD premer. .... 1 točka

4. Večkotnik z manj oglišči ima tudi manj diagonal. Označimo z n število oglišč večkotnika z manj diagonalami. Število diagonal v tem večkotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$. Razberemo, da ima drugi večkotnik $n+6$ oglišč, torej ima $\frac{(n+6)(n+6-3)}{2} = \frac{(n+6)(n+3)}{2}$ diagonal. Zapišemo razliko diagonal večkotnikov: $\frac{(n+6)(n+3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 63$. Odpravimo oklepaje ter ulomka in dobimo: $n^2 + 3n + 6n + 18 - n^2 + 3n = 126$ oziroma $12n + 18 = 126$. Rešitev enačbe je $n = 9$ torej gre za 9-kotnik in 15-kotnik.

Sklep o številu diagonal. .... 1 točka
Zapisani števili oglišč obeh večkotnikov: n in $n+6$. .... 1 točka
Zapisani števili diagonal obeh večkotnikov. .... 2 točki
Zapisana enačba, ki pripada razliki diagonal. .... 2 točki
Zapis enakovredne enačbe. .... 2 točki
Rešitev enačbe: $n = 9$. .... 1 točka
Odgovor, da gre za 9-kotnik in 15-kotnik. .... 1 točka

Opomba: Če je tekmovalec reševal nalogo s poskušanjem, prejme največ 6 točk.

5. 12 jabolk v Danovi košari na koncu predstavlja $\frac{3}{4}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{4}$ dal v Žanovo košaro. Torej je dal Žanu 4 jabolka. Ostalih 8 jabolk v Žanovi košari na koncu predstavlja polovico vseh, ki jih je imel na začetku. Kar pomeni, da je imel Žan na začetku 16 jabolk ter jih je 8 dal v Lanovo košaro. Tudi Lan je imel na koncu 12 jabolk, kar predstavlja $\frac{2}{3}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{3}$ dal v Danovo košaro. Torej je Danu dal 6 jabolk, kar pomeni, da je imel Dan na začetku $12 + 4 - 6 = 10$ jabolk. Lan pa je imel $12 + 6 - 8 = 10$ jabolk.

Ugotovitev: Dan je dal v Žanovo košaro 4 **jabolka. ....2 točki**
Sklep, da je imel Žan na začetku 16 **jabolk. .... 2 točki**
Ugotovitev: Lan je dal v Danovo košaro 6 **jabolk. ....2 točki**
Sklep, da je imel Dan na začetku $12 + 4 - 6 = 10$ **jabolk. .... 2 točki**
Sklep, da je imel Lan na začetku $12 + 6 - 8 = 10$ **jabolk. ....2 točki**

Opomba: Če tekmovalec rešitev ugane in preveri, prejme največ 2 točki.