51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 1. april 2015

Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	A	A	E	D	C	A

Utemeljitve:

A1. Z vrtenjem okrog točke S za 90° prvi lik preslikamo v drugega.

A2. Urna kazalca se prekrivata ob 12.00, kot 180° pa oklepata ob 6.00 oziroma ob 18.00. V 12 urah se kazalca 11-krat prekrivata in prav tolikokrat oklepata iztegnjeni kot. Kazalca se premikata s konstantno hitrostjo. Torej bo časovna razlika med položajema, ko se kazalca prekrivata med 8. in 9. uro oziroma oklepata kot 180° enkrat med 14. in 15. uro enaka 6 ur.

A3. Števila, ki so hkrati deljiva s 3, 4 in 5, so deljiva s 60. Med prvimi 500 naravnimi števili je natanko 8 večkratnikov števila 60.

A4. Izračunajmo $\frac{1}{3} \cdot 246 - 9 \cdot (14 - 5) = 82 - 9 \cdot 9 = 1$.

A5. Praštevilski razcep je enak $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, torej je število 2015 deljivo z 8 naravnimi števili: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403 in 2015.

A6. Moštvo mora v desetih tekmah doseči najmanj 5 zmag, če želi zbrati 15 točk. S 5 zmagami zbere 10 točk, preostalih 5 točk pa dobi s 5 neodločenimi izidi.

A7. Prvi ulomek je enak $\frac{x}{\frac{1}{15}}$, drugi pa $\frac{\frac{7}{30}}{\frac{4}{75}}$. Ulomka izenačimo in dobimo enačbo $x \cdot \frac{4}{75} = \frac{1}{15} \cdot \frac{7}{30}$, katere rešitev je $\frac{7}{24}$.

A8. Stranica c ter simetrali kotov α in β določajo trikotnik, za katerega velja $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 100^\circ = 180^\circ$. Od tod sledi $\alpha + \beta = 160^\circ$ in $\gamma = 20^\circ$.

B1. Označimo notranji kot ob vrhu z γ, zunanji kot pa z γ'. Zapišemo enačbo $\frac{3}{5}\cdot\gamma' = 52^\circ\ 6'$, katere rešitev je enaka $\gamma' = 86^\circ\ 50'$. Velikost kota γ je enaka $\gamma = 180^\circ - \gamma' = 93^\circ\ 10'$. Kota ob osnovnici sta skupaj velika $86^\circ\ 50'$, torej velja $\alpha = \beta = 43^\circ\ 25'$.

Zapisana enačba $\frac{3}{5}\cdot\gamma' = 52^\circ\ 6'$. .... 1 točka
Rešitev enačbe $\gamma' = 86^\circ\ 50'$. .... 1 točka
Izračuna velikost kota $\gamma = 93^\circ\ 10'$. .... 2 točki
Sklep: $\alpha = \beta = 43^\circ\ 25'$. .... 2 točki

B2. Iz naloge razberemo, da sta obe števili deljivi s 45, torej sta deljivi s 5 in 9. Kar pomeni, da na mestu enic stoji števka 0 ali 5, vsota števk pa je deljiva z 9. Število 270 je edino, ki se konča z 0 in je deljivo z 9, saj je vsota števk enaka 9. Trimestno število oblike $x70$ z vsoto števk 18 ne obstaja. Podobno je število 675 edino, ki se konča s 5 in je deljivo z 9. Iskana telefonska številka je torej $270\ 675$, saj mora biti prvo trimestno število manjše od drugega.

Sklep, da morata biti obe števili deljivi s 5 in 9. .... 1 točka
Upoštevanje kriterija za deljivost s 5. .... 1 točka
Upoštevanje kriterija za deljivost z 9. .... 1 točka
Sklep in utemeljitev, da sta 270 in 675 edini števili, ki ustrezata. .... 2 točki
Sklep, da je iskana številka $270\ 675$. .... 1 točka

B3. Iskani ulomek označimo z $\frac{m}{n}$. Iz naloge razberemo, da morajo biti količniki $\frac{12}{35} : \frac{m}{n} = \frac{12n}{35m}$, $\frac{16}{15} : \frac{m}{n} = \frac{16n}{15m}$ in $\frac{8}{21} : \frac{m}{n} = \frac{8n}{21m}$ naravna števila. Ker iščemo največji ulomek, mora biti m čim večje število, n pa čim manjše. Števila 8, 12 in 16 morajo biti deljiva z m, torej je $m = 4$, saj je njihov največji skupni delitelj. Število n mora biti deljivo s 15, 21 in 35, torej je $n = 105$, ker je njihov najmanjši skupni večkratnik. Ulomek, ki ga iščemo, je enak $\frac{4}{105}$.

Ugotovitev, da mora biti m čim večje število, n pa čim manjše naravno število. .... 1 točka
Ugotovitev, da je m največji skupni delitelj števil 8, 12 in 16. .... 1 točka
Izračunano število m. .... 1 točka
Ugotovitev, da je n najmanjši skupni večkratnik števil 15, 21, in 35. ...... 1 točka
Izračunano število n. .... 1 točka
Zapis iskanega ulomka. .... 1 točka

Opomba: Če tekmovalec poišče le najmanjši skupni imenovalec vseh treh ulomkov, prejme 1 točko.