Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	D	C	D	B	E	B

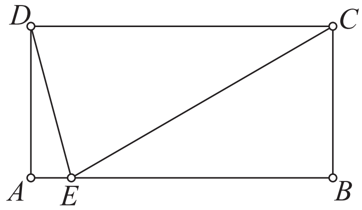
Utemeljitve:

A1. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino hipotenuze: $c = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Ploščina pravokotnega trikotnika je enaka: $p = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ cm^2. Upoštevamo formulo za ploščino poljubnega trikotnika $p = \frac{cv_c}{2}$ in dobimo $v_c = \frac{2 \cdot 12}{\sqrt{52}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

A2. Tomaž je pravilno odgovoril na 4 vprašanja iz sklopa A, 12 vprašanj iz sklopa B ter 3 vprašanja iz sklopa C. Torej je pravilno odgovoril na 19 vprašanj od 40, kar predstavlja 47.5 %.

A3. Označimo z x število deklet oziroma fantov na začetku šolske ure. Po odhodu je ostalo $x - 8$ deklet. Zapišemo enačbo $x = 2(x - 8)$ z rešitvijo $x = 16$. Torej je bilo na začetku šolske ure skupaj 32 deklet in fantov.

A4. Kot $\sphericalangle DEA$ je skladen s kotoma $\sphericalangle EDC$ in $\sphericalangle CED$, zato je trikotnik CDE enakokrak z osnovnico DE in velja $|CD| = |CE|$. Pravokotni trikotnik EBC je polovica enakostraničnega trikotnika, saj velja $2|BC| = |CE|$. Torej je velikost kota $\sphericalangle BEC$ enaka $30°$, velikost kota $\sphericalangle DEA$ pa je enaka $75°$.



A5. Tri zaporedna liha števila lahko zapišemo kot $2n - 1$, $2n + 1$ in $2n + 3$. Vsota njihovih kvadratov je enaka $4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 = 12n^2 + 12n + 11$. Od vsote odštejemo 5 in izpostavimo 6: $12n^2 + 12n + 6 = 6(2n^2 + 2n + 1)$, zato je izraz zagotovo deljiv s 6.

A6. Polkroga s premeroma BS in AS sta skladna. Ploščina osenčenega območja je zato enaka razliki ploščin polkrogov s premeroma AD in AC: $\frac{\pi(\frac{3}{4})^2}{2} - \frac{\pi(\frac{1}{4})^2}{2} = \frac{\pi}{4}$.

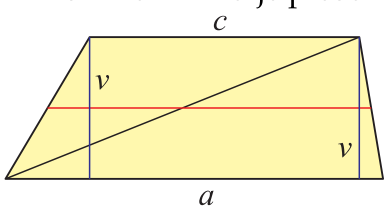
A7. Vemo, da je $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Število 2015 zapišemo kot zmnožek dveh naravnih števil le na 4 načine: $1 \cdot 2015$, $5 \cdot 403$, $13 \cdot 155$ in $31 \cdot 65$. Za vsakega izmed 4 zmnožkov obstaja par naravnih števil m in n, da je število $m - n$ enako prvemu, $m + n$ pa drugemu faktorju v naštetih zmnožkih.

A8. Iz prvega razmerja izrazimo $x = \frac{9y}{4}$ ter iz drugega $z = \frac{3y}{5}$. Razlika $x - y$ je enaka $\frac{5y}{4}$, razlika $y - z$ pa $\frac{2y}{5}$. Vrednost iskanega razmerja je $\frac{\frac{5y}{4}}{\frac{2y}{5}} = \frac{25}{8}$.

B1. Za prvo števko imamo štiri možnosti: 2, 4, 6 in 8. Za drugo števko imamo tudi štiri možnosti: $2, 3, 5, 7$. Na tretjem mestu lahko stoji katerakoli izmed petih števk: $1, 3, 5, 7$ in 9. Števka na zadnjem mestu ima najmanj 3 delitelje. Take števke so štiri: $4, 6, 8$ in 9. Torej lahko na tak način sestavimo 320 štirimestnih števil, saj je $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

Naštete štiri možnosti za prvo mesto. .... 1 točka
Naštete štiri možnosti za drugo mesto. .... 1 točka
Naštetih pet možnosti za tretje mesto. .... 1 točka
Naštete štiri možnosti za zadnje mesto. .... 1 točka
Sklep, da je vseh možnih števil 320. .... 2 točki

B2. Upoštevamo razmerje ploščin obeh trikotnikov in dobimo $\frac{cv}{2} : \frac{av}{2} = 5 : 7$, kjer sta a in c osnovnici trapeza, v pa njegova višina. Torej sta osnovnici trapeza v razmerju $a : c = 7 : 5$. Iz razmerja sklepamo, da je dolžina srednjice trapeza enaka $s = \frac{7t+5t}{2} = 6t$. Vemo, da srednjica razdeli trapez na dva trapeza z enakima višinama. Ploščina večjega je enaka $p_1 = \frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{7t+6t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{13t}{4} \cdot v$, ploščina manjšega pa je enaka: $p_2 = \frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{6t+5t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{11t}{4} \cdot v$. Iskano razmerje ploščin je enako $13 : 11$.



Zapisano razmerje ploščin trikotnikov. .... 1 točka
Sklep, da sta osnovnici v razmerju $7 : 5$. .... 1 točka
Ugotovitev, koliko je dolga srednjica trapeza. .... 1 točka
Izraženi ploščini obeh manjših trapezov. .... 2 točki
Sklep, da je iskano razmerje ploščin enako $13 : 11$. .... 1 točka

B3. Ker sta števili zaporedni, je razlika med njima enaka 1. Recimo, da je prvo omenjeno število večje. Torej velja: $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$. Odpravimo oklepaje in dobimo: $2n^2-4n-6-(2n^2-5n+2)=1$ oziroma $n-8=1$. Rešitev te enačbe je $n=9$. Druga možnost je, da je drugo število večje, zato velja enačba: $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$. Po odpravljanju oklepajev dobimo $2n^2-5n+2-(2n^2-4n-6)=1$ oziroma $-n+8=1$. Tej enačbi ustreza $n=7$.

Ugotovitev, da je razlika med iskanima številoma enaka 1. .... 1 točka
Zapisana prva enačba, recimo: $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$. ..... 1 točka
Rešitev enačbe: $n=9$. .... 2 točki
Zapisana druga enačba: $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$. .... 1 točka
Rešitev enačbe: $n=7$. .... 1 točka