50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 12. april 2014

Rešitve za 7. razred

1.

$$\frac{\frac{3}{5}}{1\frac{1}{5}}+3\frac{3}{8}\cdot 3\frac{3}{7}:\frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}}{7\frac{5}{12}-5.75}-\frac{13}{14}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}+\frac{27}{8}\cdot\frac{24}{7}:\frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{\frac{3}{2}}}}{7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}}-\frac{13}{14}=$$

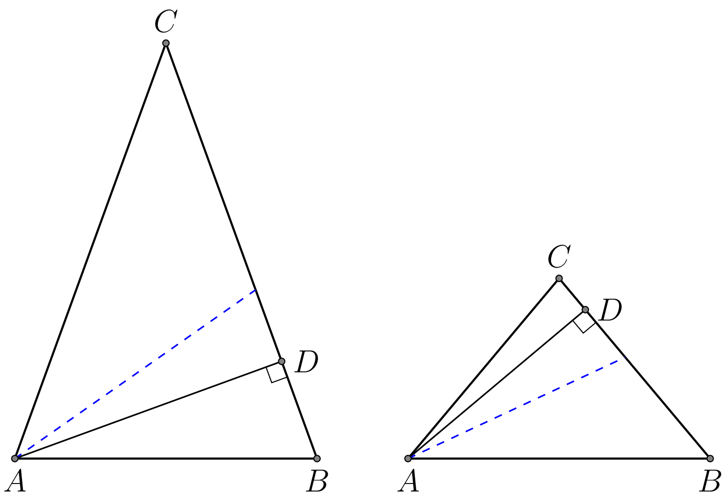
$$=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 6}+\frac{27\cdot 3}{1\cdot 7}:\frac{2-\frac{1}{2-\frac{2}{3}}}{7\frac{5}{12}-5\frac{9}{12}}-\frac{13}{14}=\frac{1}{2}+\frac{81}{7}:\frac{2-\frac{1}{\frac{4}{3}}}{1\frac{8}{12}}-\frac{13}{14}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{81}{7}:\frac{2-\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}}-\frac{13}{14}=\frac{1}{2}+\frac{81}{7}:\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}}-\frac{13}{14}=\frac{1}{2}+\frac{81}{7}:\frac{3}{4}-\frac{13}{14}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{81}{7}\cdot\frac{4}{3}-\frac{13}{14}=\frac{1}{2}+\frac{108}{7}-\frac{13}{14}=\frac{7}{14}+\frac{216}{14}-\frac{13}{14}=\frac{210}{14}=15$$

Izračunana vrednost prvega člena: $\frac{\frac{3}{5}}{1\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$. .... 1 točka
Izračunan zmnožek faktorjev v drugem členu: $3\frac{3}{8}\cdot 3\frac{3}{7}=\frac{81}{7}$. .... 1 točka
Izračunan števec delitelja v drugem členu: $2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}}=\frac{5}{4}$. .... 2 točki
Zapis decimalnega števila z ulomkom: $5.75=5\frac{3}{4}$. .... 1 točka
Izračunan imenovalec delitelja v drugem členu: $7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}=\frac{5}{3}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost delitelja v drugem členu: $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{4}$. .... 1 točka
Izračunana vrednost drugega člena: $\frac{81}{7}:\frac{3}{4}=\frac{108}{7}$. .... 1 točka
Zapisan skupni imenovalec vseh treh členov: $\frac{7}{14}+\frac{216}{14}-\frac{13}{14}$. .... 1 točka
Rezultat: $\frac{210}{14}=15$. .... 1 točka

2. Upoštevamo dve možnosti: simetrala kota lahko leži nad višino na stranico a oziroma pod njo.



Trikotnik ABC je enakokrak z osnovnico AB, torej je kot z vrhom A skladen s kotom z vrhom B. Označimo ju z α. V prvem primeru so notranji koti trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika je $180°$: $\frac{\alpha}{2} - 15° + \alpha + 90° = 180°$. Torej je $\alpha = 70°$. V tem primeru je kot z vrhom C velik $40°$. Velikosti notranjih kotov trikotnika so $70°$, $70°$ in $40°$.

V drugem primeru so notranji trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. Zopet upoštevamo, da je vsota velikosti notranjih kotov trikotnika enaka $180°$, in dobimo $\alpha = 50°$. Kot z vrhom C je velik $180° - 50° - 50° = 80°$. Notranji koti trikotnika so torej veliki $50°$, $50°$ in $80°$.

Narisani obe možnosti: simetrala nad višino, simetrala pod višino. ......2 točki
Sklep, da sta kota z vrhoma A in B skladna. ....1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v prvem primeru: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Upoštevanje vsote velikosti notranjih kotov trikotnika. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 70°$. .... 1 točka
Izračunana velikost kota z vrhom C ter zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $70°$, $70°$ in $40°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v drugem primeru: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 50°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $50°$, $50°$ in $80°$. .... 1 točka

3. Število prodanih parov v januarju označimo s k, torej je januarski prihodek enak $48k$. Na februarskih razprodajah je bilo za 50% več prodanih parov, torej $1.5k$. Ceno para čevljev na razprodajah označimo z x in dobimo, da je prihodek v februarju enak $1.5k{\cdot}x$. Ker je bil februarja prihodek višji za $\frac{1}{4}$ glede na januar, velja $\frac{1}{4} \cdot 48k = 12k$. Sklepamo, da je bil prihodek februarja enak: $48k + 12k = 60k$. Izenačimo oba izraza za prihodek in dobimo enačbo: $1.5k \cdot x = 60k$. Enačbo delimo z $1.5k$ in dobimo rešitev $x = 40$. Torej je en par čevljev na razprodajah stal 40 EUR.

Če želimo dobiti prvotno ceno enega para čevljev, jo je potrebno zvišati za 8 EUR. V odstotkih to pomeni $\frac{8}{40} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$

Zapis prihodka v januarju: $48k$. .... 1 točka
Ugotovitev števila prodanih parov čevljev na razprodaji: $1.5k$. .... 1 točka
Sklep o višini prihodka glede na ceno para čevljev v februarju x: $1.5k \cdot x$. 1 točka
Ugotovitev, da je bil prihodek v februarju višji za $12k$. ....1 točka
Zapisana enačba: $1.5k \cdot x = 60k$. .... 2 točki
Izračunana rešitev enačbe: $x = 40$. ....1 točka
Odgovor: En par čevljev je februarja stal 40 EUR. .... 1 točka
Sklep, da je ceno para čevljev potrebno zvišati za 8 EUR, kar pomeni $\frac{8}{40} = 20\%$. 2 točki

Opomba: reševanje izključno z izmišljenim številskim primerom prinese največ 5 točk.

4. Eno izmed petih zaporednih naravnih števil je deljivo s 5, najmanj dve izmed teh števil pa sta sodi. Torej je njihov zmnožek deljiv z 10, zato je bila na mestu enic zapisana števka 0. Poleg tega je zmnožek deljiv s 3, saj je med petimi zaporednimi števili vsaj eno deljivo s 3. Po kriteriju o deljivost s 3 je vsota števk števila $55s40$ deljiva s 3. Vsota števk je enaka $14 + s$, torej je števka na mestu stotic lahko enaka 1, 4 ali 7.

Med petimi zaporednimi naravnimi števili je eno zagotovo deljivo s 4, to pa pomeni, da je njihov zmnožek deljiv tudi z 8. Torej mora biti tromestni konec zmnožka deljiv z 8, kar velja le v primeru števila 55440. Dobljeno število je zmnožek števil 7, 8, 9, 10 in 11.

Ugotovitev, da je eno izmed petih zaporednih naravnih števil deljivo s 5**. 1 točka**
Ugotovitev, da sta najmanj dve izmed iskanih števil sodi. ....1 točka
Sklep, da je zmnožek deljiv z 10 **in da na mestu enic stoji števka** 0**. ......1 točka**
Ugotovitev, da je vsaj eno izmed iskanih števil deljivo s 3**. ....1 točka**
Sklep, da je zapisano število deljivo s 3 **ter da na mestu stotic stoji** 1, 4 **ali** 7**. ..2 točki**
Sklep, da je število deljivo z 8**, saj je en faktor deljiv s** 4**. ....1 točka**
Ugotovitev, da temu ustreza le 55440**. ....1 točka**
Zapis iskanih števil: 7**,** 8**,** 9**,** 10 **in** 11**. ....2 točki**

Opomba: Uganjena rešitev brez utemeljitve prinese največ 2 točki.

5. Razberemo, da je Neža poleg 32 minut porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki sta ga Tina in Ana pustili na razpolago Pii ter Neži. Seštevek Pijinih 88 minut ter Nežinih 32 minut je enak 120 minut, kar predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga prvi dve sestri nista porabili. Torej sta Tina in Ana ostalima dvema pustili 160 minut. Podobno je Ana porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki ga Tina ni porabila, ter še dodatnih 32 minut. Potemtakem 192 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga je Tina pustila ostalim trem. Najstarejša hči ni porabila 256 minut. Za računalnikom je prebila $\frac{1}{4}$ časa, ki jim ga je namenila mama, ter dodatnih 32 minut. Sklepamo podobno kot prej: 288 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ skupnega časa. Mama je svojim hčeram namenila 384 minut. Iz tega lahko izračunamo čas za vsako izmed sester, ki ga je prebila za računalnikom. Tina $\frac{1}{4}$ od 384 minut ter 32 minut, torej 128 minut. Ana $\frac{1}{4}$ od 256 minut ter 32 minut, kar pomeni 96 minut. Neža je porabila $\frac{1}{4}$ od 160 minut ter 32 minut časa, skupaj 72 minut. Pia je porabila vseh preostalih 88 minut.

Ugotovitev, da 120 **minut predstavlja** $\frac{3}{4}$ **časa, ki ga Tina in Ana nista porabili. ..2 točki**
Izračunan čas, ki sta prvi dve sestri pustili ostalima dvema: 160 **minut. .1 točka**
Sklep, da Aninih 32 **minut ter** 160 **minut skupaj predstavlja** $\frac{3}{4}$ **časa, ki ga Tina ni porabila. ....2 točki**
Izračun časa, ki ga je Tina pustila mlajšim sestram: 256 **minut. ....1 točka**
Ugotovitev, da 256 **minut skupaj s Tininimi** 32 **minutami predstavlja** $\frac{3}{4}$ **časa, ki jim ga je namenila mama. ....1 točka**
Izračunan skupni čas, ki so ga lahko vse skupaj prebile za računalnikom: 384 **minut. ....1 točka**
Izračunani ter zapisani časi za vsako izmed sester: Tina je porabila 128 **minut, Ana** 96 **minut, Neža** 72 **minut in Pia** 88 **minut. ....2 točki**