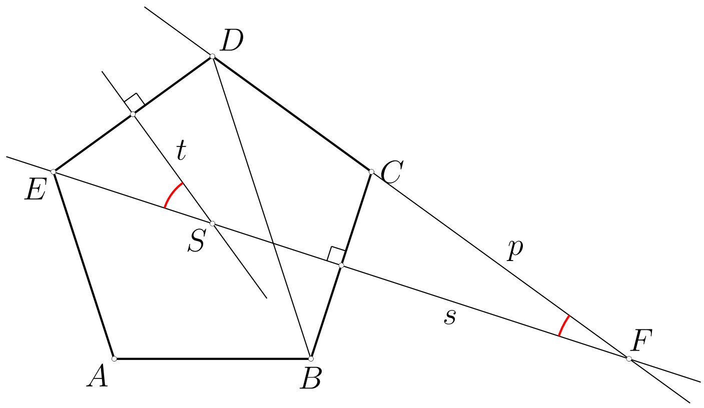
Rešitve za 8. razred

1. Notranji kot pravilnega petkotnika meri $108°$. Trikotnik BCD je enakokrak, torej kot $\sphericalangle BCD$ meri $(180° - 108°) : 2 = 36°$. Zunanji kot pravilnega petkotniku meri $72°$, premica s je pravokotna na stranico BC, torej kot med premicama p in s meri $90° - 72° = 18°$. Premica s je tudi simetrala notranjega kota, torej kot med premicama s in t meri $90° - 54° = 36°$, saj je premica t pravokotna na stranico ED.



Skica s pravilno narisanimi premicami p, s in t ter označenima kotoma. . 2 točki
Ugotovitev, da je trikotnik BCD enakokrak. .... 1 točka
Upoštevanje velikosti notranjega kota, $108°$ ter izračunan kot $\sphericalangle CBD = (180° - 108°) : 2 = 36°$. .... 2 točki
Ugotovitev, da zunanji kot meri $72°$. ....1 točka
Upoštevanje, da je premica s pravokotna na BC, ter izračunan kot med premicama: $90° - 72° = 18°$. ....2 točki
Upoštevanje, da simetrala s razdeli notranji kot na dva enaka dela. ..... 1 točka
Izračunan kot med premicama s in t: $90° - 54° = 36°$. ....1 točka

2. Označimo z x število vprašanj iz posameznega dela, na katera je Lana pravilno odgovorila. Zbrala je celo število točk, saj ostalih vprašanj ni reševala. Torej je zbrala $4x + 5x + 6x = 15x$ točk, prav toliko pa jih je zbral tudi David. Imamo 3 možnosti za število pravilnih Davidovih odgovorov po posameznih delih: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5. V prvem primeru bi zbral: $1 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2.5 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3$ točk, kar ni celo število, podobno pa velja tudi v tretjem primeru. Zato je edina možnost, da je David pravilno odgovoriti na 2 vprašanji iz prvega dela, 3 iz drugega in 4 iz tretjega. Skupaj je tako prejel: $2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2.5 + 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$. Torej jih je Lana zbrala 45. V vsakem delu je rešila tri naloge, skupno pa 9.

Ugotovitev, da je Lana zbrala $15x$ točk. .... 1 točka
Sklep, da sta oba zbrala celo število točk. ....1 točka
Ugotovitev, da je David lahko po delih pravilno rešil: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5 odgovorov. ....2 točki
Izračunano število točk v prvem primeru in izločitev le tega. ....2 točki
Ugotovitev, da tudi v tretjem primeru število točk ni celo število. ....1 točka
Izračunano število točk, ki jih je dosegel David. ....1 točka
Sklep, da je Lana dosegla 45 točk. ....1 točka

Odgovor: Lana je pravilno odgovorila na 9 vprašanj. ....1 točka

3. Količino peska označimo z x. Cena pred znižanjem je znašala $\frac{120}{x}$, po 30% znižanju pa $0.7 \cdot \frac{120}{x}$. Prav tako je znižana cena enaka $\frac{105}{x+1.25}$. Zapišemo enačbo $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$. Upoštevamo zakonitost o enakosti ulomkov in dobimo enačbo $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$, Katere rešitev je $x = 5$. Torej je bila cena peska pred znižanjem 24 EUR.

Zapisana cena pred znižanjem: $\frac{120}{x}$. ....1 točka
Ugotovitev, da je ta cena po znižanju enaka: $0.7 \cdot \frac{120}{x}$. ....2 točki
Zapis znižane cene: $\frac{105}{x+1.25}$. ....1 točka
Zapisana enačba: $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$. ....1 točka
Upoštevanje zakonitosti o enakosti ulomkov in zapisana enačba $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$. ....2 točki
Izračunana rešitev enačbe: $x = 5$. ....2 točki
Odgovor: Cena pred znižanjem je bila 24 EUR. ....1 točka

4. 1. način
Velikost notranjega kota v pravilnem n-kotniku je: $180° - \frac{360°}{n}$, v $2n$-kotniku pa: $180° - \frac{360°}{2n}$. Razlika med drugim in prvim kotom je $6°$, torej je potrebno rešiti enačbo: $180° - \frac{360°}{2n} - 180° + \frac{360°}{n} = 6°$. Levo stran enačbe preoblikujemo v $\frac{360°}{n} - \frac{180°}{n} = 6°$ oziroma $\frac{180°}{n} = 6°$. Rešitev enačbe je $n = 30$.

Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem n-kotniku: $180° - \frac{360°}{n}$. ....2 točki
Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem $2n$-kotniku: $180° - \frac{360°}{2n}$. ......2 točki
Zapisana enačba: $180° - \frac{360°}{2n} - 180° + \frac{360°}{n} = 6°$. ....2 točki
Preoblikovanje enačbe do enačbe: $\frac{180°}{n} = 6°$. ....2 točki
Rešitev enačbe: $n = 30$. ....2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

2. način
Nad vsako stranico pravilnega n-kotnika narišemo enakokraki trikotnik in tako dobimo pravilni $2n$-kotnik. Koti tega enakokrakega trikotnika merijo $3°$, $3°$ in α_{2n}, zato velja $6° + \alpha_{2n} = 180°$ oziroma $\alpha_{2n} = 174°$. Notranji kot pravilnega $2n$-kotnika izračunamo s formulo $180° - \frac{360°}{2n} = 174°$. Rešitev enačbe $\frac{360°}{2n} = 6°$ je $n = 30$.

Ugotovitev, da z risanjem enakokrakega trikotnika nad vsako stranico dobimo pravilni $2n$-kotnik. ....2 točki
Koti tega trikotnika merijo: $3°$, $3°$ in α_{2n}. ....2 točki
Zapisana zveza $6° + \alpha_{2n} = 180°$ oziroma $\alpha_{2n} = 174°$. ....1 točka
Zapisana formula za velikost notranjega kota pravilnega n-kotnika. ......2 točki
Zapisana enačba $180° - \frac{360°}{2n} = 174°$ oziroma $\frac{360°}{2n} = 6°$. ....1 točka
Izračunana rešitev $n = 30$. ....2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za

sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

5. Datume v letu 2013 zapišemo s številom oblike $abcd13$, kjer je ab dan v mesecu, cd pa predstavlja mesec. Števka a je lahko 0, 1, 2 ali 3, b pa je lahko katerakoli števka (odvisno od a). Števka c je lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli števka (odvisno od c). Ker je produkt števk na lihih mestih enak produktu števk na sodih, velja zveza: $ac = 3bd$.

- Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$, saj d ne more biti hkrati s c enak 0. To pomeni vse datume v mesecih od januarja do septembra, ki se končajo z 0: 10, 20, 30, takih je skupaj $27 - 1 = 26$ (saj februarja ni 30. dne).
- Če je $c = 1$ (meseci od oktobra do decembra), je $a = 3bd$, torej je števka a deljiva s 3. Ločimo dve možnosti:
  - $a = 0$ (potem b ni 0), torej je tudi $d = 0$. To so vsi dnevi v oktobru od $1.$ do $9.$ oktobra, torej jih je 9.
  - $a = 3$, potem sta b in d oba enaka 1, kar bi pomenilo datum $31.11.$, ki pa seveda ne obstaja.

Posebnih dni je zato v letu 2013 skupaj 35.

Ugotovitev, da je števka a lahko samo 0, 1, 2 ali 3, b pa katerakoli števka odvisna od nje. .... 1 točka
Ugotovitev, da je števka c lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli števka odvisna od c. .... 1 točka
Zapisana zveza: $ac = 3bd$. .... 1 točka
Sklep: Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$. .... 1 točka
Ugotovitev, da to pomeni vse datume od januarja do septembra, ki se končajo z 0, in da je le-teh 26. .... 1 točka
Sklep: Če je $c = 1$, je a lahko le 0 ali 3. .... 1 točka
Sklep: Če je $a = 0$, je tudi $d = 0$. .... 1 točka
Ugotovitev, da so to vsi datumi od 1. do 9. oktobra, torej jih je 9. .... 1 točka
Sklep: Če je $a = 3$, sta b in d oba enaka 1. Takega datuma pa ni. .... 1 točka
Odgovor: Posebnih dni v letu 2013 je 35. .... 1 točka