

Rešitve za 9. razred

1. Označimo njihove starosti:

x ... Janova starost

y ... Rokova starost

z ... Lukova starost

Glede na to kako si razdelijo denar, lahko zapišemo razmerji $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$. Iz prvega razmerja izrazimo $y = \frac{3}{4}x$, iz drugega pa $z = \frac{7}{6}x$. Upoštevamo vsoto njihovih starosti in zapišemo enačbo: $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$, katere rešitev je $x = 12$. Izračunamo še $y = 9$ in $z = 14$. Razmerje med stroškom letovanja in vsoto njihovih starosti je 22. Odgovorimo: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR.

Zapisani razmerji starosti $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$ 2 točki

Zapisana $y = \frac{3}{4}x$ in $z = \frac{7}{6}x$ 2 točki

Zapisana enačba $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$ 2 točki

Rešitev enačbe $x = 12$ 1 točka

Izračunane starosti: 12 let, 9 let in 14 let. 1 točka

Ugotovitev, da je razmerje med stroški letovanja in vsoto starosti enako 22. ... 1 točka

Odgovor: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR. 1 točka

2. Členi, ki vsebujejo x , naj bodo na levi strani enačbe, ostalo pa na desni strani: $25x - xa^2 = a - 5$. Izpostavimo x na levi strani in dobimo: $x(25 - a^2) = a - 5$. Na levi strani enačbe drugi faktor razstavimo: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$. Delimo jo z $(5 - a)(5 + a)$ in dobimo $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$. Upoštevamo, da velja $a - 5 = -(5 - a)$, zato je rešitev enačbe $x = -\frac{1}{5+a}$, kjer je a različen od -5 in 5 . Obravnavamo enačbo za primera $a = -5$ oziroma $a = 5$. V prvem primeru, $a = -5$, dobimo: $x \cdot 0 = -10$, ta enačba pa nima rešitev. V drugem primeru, $a = 5$, dobimo enačbo $x \cdot 0 = 0$, ki jo reši vsako realno število.

Preoblikovanje dane enačbe v $25x - xa^2 = a - 5$ 1 točka

Izpostavljanje x na levi strani enačbe. 1 točka

Razstavljanje: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$ 1 točka

Deljene enačbe z $(5 - a)(5 + a)$ in zapis $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$, kjer je a različen od -5 in 5 . 1 točka

Izpostavljanje -1 v števcu. 1 točka

Krajšanje ulomka in zapisana rešitev $x = -\frac{1}{5+a}$ 1 točka

Obravnava enačbe za $a = -5$ z ugotovitvijo, da ni rešitev. 2 točki

Obravnava enačbe za $a = 5$ z ugotovitvijo, da so rešitve vsa realna števila. 2 točki

3. a) Zapišemo: $a \heartsuit 2 = (a - 2) \cdot a$. Rešiti moramo enačbo: $a(a - 2) = -1$, ki jo preoblikujemo v $a^2 - 2a + 1 = 0$. Leva stran enačbe je popolni kvadrat, torej se enačba glasi: $(a - 1)^2 = 0$. Rešitev je $a = 1$.

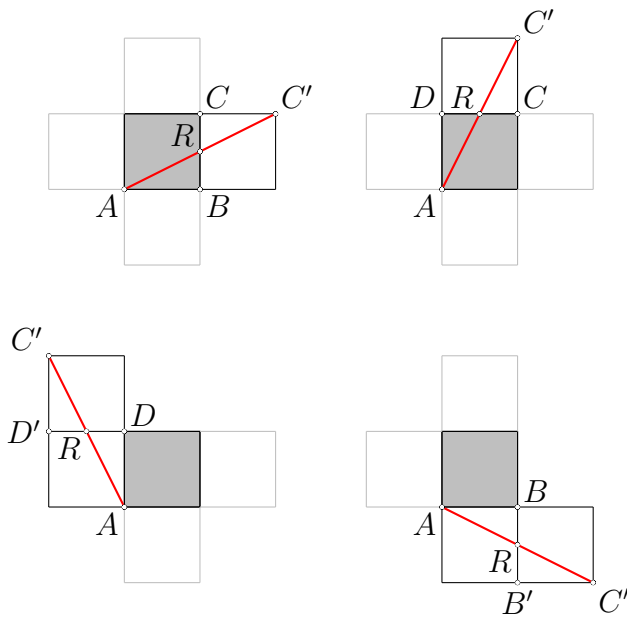
- b) Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$, velja če je: $(a - b) \cdot a = (b - a) \cdot b$. Odpravimo oklepaje in dobimo $a^2 - ab = b^2 - ab$, torej mora veljati $a^2 = b^2$. Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$ velja za vse pare enakih in nasprotnih realnih števil ($a = \pm b$).

Zapisana enačba: $a(a - 2) = -1$	1 točka
Zapisana preoblikovana enačba: $a^2 - 2a + 1 = 0$	1 točka
Ugotovitev, da je leva stran enačbe popolni kvadrat: $(a - 1)^2 = 0$	2 točki
Zapisana rešitev $a = 1$	1 točka
Ugotovitev, da velja $a \heartsuit 2 = (a - 2) \cdot a$, če velja $(a - b) \cdot a = (b - a) \cdot b$	1 točka
Odpravljeni oklepaji $a^2 - ab = b^2 - ab$	1 točka
Ugotovitev, da enakost velja, če velja $a^2 = b^2$	1 točka
Ugotovite, da enakost velja za $a = \pm b$	2 točki

4. Izračunamo ploščino celotnega trikotnika ABC , $p = \sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ cm², torej za kateti a in b velja $\frac{a \cdot b}{2} = 9\sqrt{2}$ cm² oziroma $a \cdot b = 18\sqrt{2}$ cm². S točko N označimo nožišče višine na hipotenuzo AB . Trikotnika NBC in NCA sta podobna z razmerjem ploščin $8 : 1$. Istoležne stranice so zato v razmerju $k = \frac{a}{b}$. Izrazimo $a = b\sqrt{8}$ in vstavimo v enačbo $a \cdot b = 18\sqrt{2}$. Dobimo enačbo $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$ z rešitvijo $b = 3$ cm, torej kateta a meri $a = 6\sqrt{2}$ cm. Dolžino hipotenuze c izračunamo s Pitagorovim izrekom in dobimo $c = 9$ cm.

Izračuna ploščina celotnega trikotnika ABC	1 točka
Zapisana zveza za kateti a in b : $a \cdot b = 18\sqrt{2}$	1 točka
Ugotovitev, da sta ploščini podobnih trikotnikov v razmerju $k^2 = 8$	1 točka
Sklep, da sta istoležni stranici v razmerju $k = \frac{a}{b} = \sqrt{8}$	1 točka
Zapisana zveza za kateti a in b : $a = b\sqrt{8}$	1 točka
Zapisana enačba: $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$	1 točka
Izračunana rešitev $b = 3$ cm.	2 točki
Izračunana dolžina katete $a = 6\sqrt{2}$ cm.	1 točka
Izračunana dolžina hipotenuze $c = 9$ cm.	1 točka

5. a) Riba se nahaja v točki, ki je 3 dm oddaljena od oglišča A in 9 dm od oglišča B . Dolžino njene poti do hrane izračunamo iz $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$, kjer je x višina vode v decimetrih. Rešitev enačbe $\sqrt{225 + x^2} = 17$ je enaka $x = 8$. Izračunamo količino vode v akvariju $V = 12 \cdot 12 \cdot 8 = 1152$ dm³ = 1152 l.
- b) Označimo z R razpolovišče roba BB' . (Ena izmed štirih možnih) polževih najkrajših poti vodi iz oglišča A do točke R ter iz nje do oglišča C' . **Dokažimo**, da je ta pot res najkrajša. Če plašč kocke (brez ploskve $A'B'C'D'$) razgrnemo v ravnino, bo najkrajša pot med točkama A in C' po stenah akvarija kar najkrajša pot med točkama A in C' na mreži kocke (v ravnini). Ta razdalja je enaka $|AC'| = \sqrt{(|AB| + |BC|)^2 + |CC'|^2} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$ dm.



Dolžina polževe poti je $12\sqrt{5}$ dm. S P označimo razpolovišče roba AB , dolžina daljice PC' je enaka dolžini poti konjička. Dolžina $|PC'| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 12^2} = 18$ dm.

Opomba. Plašč akvarija lahko razgrnemo v ravnino na več kot 4 načine, najkrajše poti od A do C' pa so le 4 in te so narisane na zgornjih skicah. Dno akvarija je označeno z osenčenim kvadratom.

- Ugotovitev, kje se na robu AB se nahaja riba. 1 točka**
Zapisana enačba $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$ 2 točki
Izračunana Rešitev enačbe $x = 8$ 1 točka
Odgovor: V akvariju je 1152 litrov vode. 1 točka
***Utemeljitev, kako poteka polževa pot. 2 točki**
Izračunana dolžina polževe poti, $12\sqrt{5}$ dm. 1 točka
Izračunana dolžina konjičkove poti, 18 dm. 2 točki

***Opomba.** V nalogi je potrebno v treh primerih poiskati najkrajšo razdaljo med dvema točkama. V dveh primerih lahko točki povežemo z daljico in očitno je, da je to tudi najkrajša pot med njima. V enem primeru pa je najkrajša pot sestavljena iz dveh daljic in **ni očitno**, katera pot je najkrajša. Tekmovalec **se mora zavedati**, da je to podrobnost potrebno dokazati.