Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	B	C	C	A	C	D

Utemeljitve:

A1. Poenostavimo levo stran enačbe in dobimo $2013 - \sqrt{2012} - x + \sqrt{2012} = 1$. Od tod razberemo rešitev $x = 2012$.
ali
Enačbo reši število 2012: $\sqrt{(2013 - \sqrt{2012})^2} - (2012 - \sqrt{2012}) = 2013 - \sqrt{2012} - 2012 + \sqrt{2012} = 1$.

A2. Najmanjši kot meri $90^\circ : 6 = 15^\circ$, torej meri srednji kot 75°.

A3. Izračunajmo $2^5 \cdot 8^3 \cdot 16^2 = 2^5 \cdot (2^3)^3 \cdot (2^4)^2 = 2^{22} = (2^2)^{11} = 4^{11} \cdot$. Torej je eksponent 11.

A4. Produkt eksponentov je sodo število, saj v njem nastopa faktor 2. Sode potence števila -1 so enake 1.

A5. V začetni raztopini je 84 g soli in 336 g vode. Masa končne raztopine je 300 g in vsebuje $\frac{84}{300} \cdot 100\% = 28\%$ soli.

A6. Dolžina najkrajšega delčka je a. Del pred njim je dolg $3a$, njegov predhodnik pa $9a$. Najdaljši delček je dolg $27a$. Dolžina celotne vrvice je $40a$, zato je iskano razmerje enako $\frac{27}{40}$.

A7. Ženskih figuric je $\frac{1}{3}$, prav tako moških brez kape in moških s kapo. Prva figurica v vrsti, ki se smehlja, je moška s kapo. Vseh figuric v vrsti, ki se smehljajo je 7. Torej so 3 moške figurice s kapo, ki se smehljajo.

A8. Zapišemo $(3^2 + 4^2) + (5^2 + 12^2) = 5^2 + 13^2$. Vrednost vsote je enaka 18.

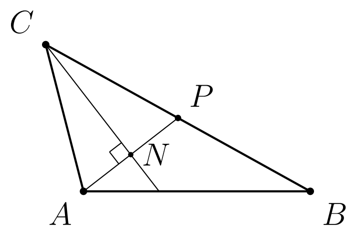
B1.

$$\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}:4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{36}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{36}-\frac{5}{36}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{1}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{9}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{3}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

Izračunan imenovalec ulomka v imenovalcu prvega člena 1. .... 1 točka
Izračunana vrednost prvega korenjenca $\frac{1}{4}$ .... 1 točka
Vrednost imenovalca v drugem členu $-\frac{1}{9}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost drugega korenjenca $\frac{9}{4}$ .... 1 točka
Vrednosti obeh korenov in rezultat $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ .... 2 točki

B2. Označimo z N presečišče simetrale kota $\sphericalangle ACB$ in daljice AP. Trikotnika ANC inPNC sta skladna, ker imata skladna dva kota in skupno stranico. Zato sta skladni daljici AC in PC. Ker je točka P razpolovišče, velja $BC=2\cdot AC$. Torej je ena dolžina stranice dvakrat daljša od druge. Ker gre za tri zaporedna naravna števila n, $n+1$, $n+2$, imamo naslednje možnosti:



- $n+2=2n$, torej je $n=2$; stranice trikotnika pa so 2, 3 in 4.
- $n+2=2(n+1)$, torej je $n=0$; stranica trikotnika ne more biti enaka 0.

Ugotovitev, da sta trikotnika ANC in PNC skladna .... 1 točka
Sklep, da sta stranici AC in PC skladni .... 1 točka
Sklep, da je stranica BC dvakrat daljše od stranice AC .... 1 točka
Izračunan $n=2$ iz zveze $n+2=2n$ .... 1 točka
Izločitev možnosti $n+2=2(n+1)$ .... 1 točka
Rešitev: Dolžine stranic so 2, 3 in 4 .... 1 točka

Opomba: Za uganjeno rešitev brez utemeljitve dobi tekmovalec 1 točko.

Če tekmovalec dokaže, da v trikotniku s stranicami 2, 3, 4, velja: "Če sta daljici AP in CN pravokotni, potem je stranica BC dvakrat daljša od stranice AC."dobi 3 točke po točkovniku (skladnost trikotnikov in daljic ter razmerje stranic). Merjenje ni korektna rešitev.

Za sklep, da je trikotnik s stranicami 2, 3, 4, edini trikotnik, katerega stranice so tri zaporedna naravna števila z lastnostjo $BC=2\cdot AC$, dobi tekmovalec 2 točki.

B3. Skupno število vseh učencev je sodo število, ki ni deljivo s 4 in pri deljenju s 5 da ostanek 3. Vemo, da je število zagotovo manjše od 90 in večje od 67. V poštev pride samo 78, torej je dečkov 33.

Ugotovitev, da je skupno število učencev manjše od 90 .... 1 točka
Sklep, da je število učencev večje od 67 .... 1 točka
Ugotovitev, da je število učencev sodo število, ki ni deljivo s 4 .... 1 točka
Ugotovitev, da število učencev pri deljenju s 5 da ostanek 3 .... 1 točka
Sklep, da je edino ustrezno število 78 .... 1 točka
Odgovor: Dečkov je 33. .... 1 točka

Opomba: Tekmovalec lahko reši nalogo tudi drugače, tako da preveri vsa števila do 90. Če na ustrezen način utemelji, da je število vseh učencev 78 ter pravilno odgovori, da je dečkov 33, lahko dobi vse točke.

Samo z ugibanjem, brez utemeljitve, dobi tekmovalec največ 2 točki.