50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 7. razred

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Katero izmed naštetih števil je najmanjše?

(**A**) $0.3\overline{5}$ (**B**) $0.\overline{35}$ (**C**) $0.3\overline{53}$ (**D**) $0.35\overline{335}$ (**E**) $0.\overline{3533}$

A2. Koliko minut je 2.4 ure?

(**A**) 124 (**B**) 144 (**C**) 160 (**D**) 194 (**E**) 240

A3. S števkami števila 2014 sestavljamo štirimestna števila, tako da vsako števko uporabimo natanko enkrat. Koliko izmed teh števil je deljivih s 4?

(**A**) 0 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 14

A4. Jana v $\frac{1}{2}$ ure prehodi $\frac{3}{7}$ poti do ribnika. Koliko časa potrebuje za preostanek poti, če hodi z enakomerno hitrostjo?

(**A**) $\frac{1}{3}$ h (**B**) $\frac{1}{2}$ h (**C**) $\frac{4}{7}$ h (**D**) $\frac{2}{3}$ h (**E**) 1 h

A5. Stranice trikotnika ABC so dolge $|AB| = 16$ cm, $|BC| = 17$ cm ter $|AC| = 19$ cm. Točka D leži na stranici AC, točka E na stranici BC ter točka F na daljici DE, da velja $|AD| = |DF|$ in $|BE| = |EF|$. Koliko je obseg trikotnika DEC?

(**A**) 35 cm (**B**) 36 cm (**C**) 37 cm (**D**) 50 cm (**E**) 54 cm

A6. V trgovini so imeli posebno ponudbo čokolad. Ob nakupu treh čokolad lahko kupiš četrto za 75 centov. Tina je za 20 čokolad plačala 17.25 EUR. Koliko bi plačala, če bi kupila samo eno čokolado?

(**A**) 75 centov (**B**) 82 centov (**C**) 86 centov (**D**) 90 centov (**E**) 94 centov

A7. Katero je največje praštevilo, ki deli vsako trimestno število, sestavljeno iz treh enakih števk?

(**A**) 13 (**B**) 31 (**C**) 37 (**D**) 91 (**E**) 111

A8. Vid, Cene in Miha so paroma tekmovali v teku na 100 metrov. Vsak izmed njih je vedno tekel z enako hitrostjo, vendar nobena dva nista bila enako hitra. Ko je Vid pritekel na cilj, je bil Cene 20 m za njim. V drugi tekmi je bil Miha 10 m za Cenetom, ko je Cene pritekel na cilj. Koliko metrov za Vidom je bil Miha, ko je Vid v tretjem dvoboju pritekel na cilj?

(**A**) 20 (**B**) 25 (**C**) 28 (**D**) 30 (**E**) 40

B1. Učenci planinskega krožka neke šole bodo šli na izlet. Prijavilo se jih je za $\frac{2}{9}$ več kot je načrtoval njihov mentor. Pred odhodom je $\frac{3}{11}$ prijavljenih učencev zbolelo. Na izlet je odšlo 5 učencev manj kot je bilo načrtovano. Koliko učencev se je udeležilo izleta?

(6 točk)

B2. Zapiši elemente množic $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$, če je $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{4,6\}$, $\mathcal{M} \cup \{5\} = \{1,3,4,5,6,8\}$ in $\mathcal{N} \cup \{2,4,8\} = \{2,4,5,6,7,8\}$.

(6 točk)

B3. Premici p in q sta dve različni vzporednici. Točka A je poljubna točka na premici p. Skozi njo poteka premica, ki premico q seka v točki B pod kotom $30°$. Z zrcaljenjem točke A čez točko B dobimo točko C, skozi katero poteka premica r, ki je vzporedna premici p. Na premici q leži točka D, da velja $\sphericalangle BDA = 75°$. Točka E je presečišče premice r in nosilke daljice AD. Izračunaj velikost kota EDC. Skica je obvezna.

(6 točk)

dMFA

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 8. razred

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Četrtina kvadratnega korena nekega števila je enaka 2. Katero je to število?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 16 **(D)** 32 **(E)** 64

A2. Kolikšna je vrednost izraza $-((-1)^3-(-(-1)^2))+(-1)^{2014}-((-1)^7-(-1)^8)$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** -2 **(D)** 3 **(E)** 2016

A3. Točka E leži na stranici CD kvadrata $ABCD$ tako, da je $|DE|=\frac{1}{4}|DC|$. Ploščina trikotnika AED je 4.5 cm^2. Koliko je ploščina trikotnika ABE?

(A) 9 cm^2 **(B)** 36 cm^2 **(C)** 18 cm^2 **(D)** 24 cm^2 **(E)** 27 cm^2

A4. Kateri je največji prafaktor razlike $9^{18}-3^{32}$?

(A) 5 **(B)** 11 **(C)** 17 **(D)** 19 **(E)** 31

A5. Za katero izmed naštetih števil velja: šestkratnik nasprotne vrednosti absolutne vrednosti obratne vrednosti tega števila je za 5 manjši od tega števila?

(A) -3 **(B)** -2 **(C)** 1 **(D)** 2 **(E)** 6

A6. Simetrala kota BAC v rombu $ABCD$ seka stranico BC v točki E. Kot AEB je velik $54°$. Koliko je velik najmanjši notranji kot romba?

(A) $27°$ **(B)** $36°$ **(C)** $54°$ **(D)** $72°$ **(E)** $108°$

A7. Koliko štirimestnih števil, ki so deljiva s 5, ima vsoto števk enako 5?

(A) 5 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 11 **(E)** 15

A8. Za števili a in b velja: $a+a+a+b=2$ in $b+b+b+a=-10$. Koliko je $a+a+b+b$?

(A) -4 **(B)** 0 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

B1. Pri malici je $80\ \%$ učencev vzelo sendvič, $60\ \%$ jih je vzelo sadje, $70\ \%$ pa sok. 30 učencev je vzelo vse tri stvari, ostali pa natanko dve. Koliko učencev je bilo na malici?

(6 točk)

B2. Izračunaj:

$$(-1)^{33} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{6^2 - 5^2} + \sqrt{27} - 2014^0 + \left|3 - \sqrt{11}\right| .$$

(6 točk)

B3. V pravilni petkotnik $ABCDE$ vrišemo enakostranični trikotnik ABF. Izračunaj velikost notranjega kota CFE štirikotnika $CDEF$.

(6 točk)

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 2. april 2014

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 9. razred

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

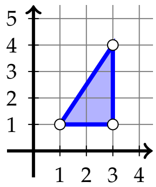
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

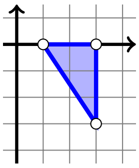
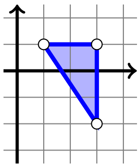
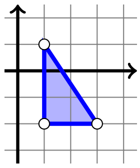
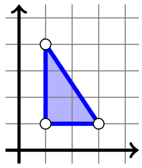
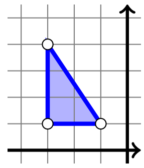
B1	B2	B3

A1. Ana je prebrala $10\ \%$ knjige. Ko bo Ana prebrala še 52 strani, bo prebrala $\frac{3}{4}$ knjige. Koliko strani ima knjiga?

(A) 75 **(B)** 80 **(C)** 90 **(D)** 100 **(E)** 120

A2. Trikotnik na sliki zavrtimo okrog izhodišča za $180°$. Dobljen trikotnik premaknemo za dve enoti v pozitivni smeri ordinatne osi, nastalo sliko zrcalimo čez ordinatno os. Katero izmed naštetih slik dobimo na koncu?



(A)  **(B)**  **(C)**  **(D)**  **(E)** 

A3. Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{3333^2 + 4444^2}$?

(A) 1111 **(B)** 2222 **(C)** 3333 **(D)** 5555 **(E)** 7777

A4. Kolikšna je povprečna vrednost celih števil x in y, če velja $3^x \cdot 3^y = 81$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** 3 **(E)** 4

A5. Za koliko celih števil velja neenakost $\frac{1}{|13-x|} > \frac{1}{6}$?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 12

A6. Točka E leži na stranici CD kvadrata $ABCD$ tako, da je $|DE| : |DC| = 1 : 4$. Dolžina daljice AE je $\sqrt{68}$ cm. Koliko je dolga daljica BE?

(A) $\sqrt{68}$ cm **(B)** 8 cm **(C)** 10 cm **(D)** $\sqrt{10}$ cm **(E)** 64 cm

A7. Razmerje med ploščinami mejnih ploskev kvadra je $15 : 20 : 12$. Koliko je lahko razmerje med dolžinami robov tega kvadra?

(A) $15 : 20 : 12$ **(B)** $5 : 2 : 1$ **(C)** $5 : 3 : 6$ **(D)** $1 : 2 : 3$ **(E)** $3 : 5 : 4$

A8. Kolikšna je vrednost izraza $a(a+2) + c(c-2) - 2ac$, če je $a - c = 14$?

(A) 14 **(B)** 224 **(C)** 244 **(D)** 422 **(E)** 424

B1. Reši enačbo

$$\frac{\frac{1}{5}x-3}{4}-\frac{1}{5}=-\frac{2}{3}\left(-3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{3x-2}{5}.$$

(6 točk)

B2. Marko se je odločil za nakup kolesa, za katerega bi moral odšteti $\frac{5}{6}$ denarja, ki ga je imel s seboj. Ker mu je prodajalec priznal 10 % popusta, se je odločil, da bo kupil še rezervno zračnico. Zanjo je odštel 5 % denarja, ki mu je ostal po nakupu kolesa. Na koncu mu je ostalo 76 EUR. Koliko denarja je imel Marko s seboj pred nakupom kolesa?

(6 točk)

B3. Kvadratu s stranico dolgo 6 cm včrtamo krog. Krogu včrtamo kvadrat in temu kvadratu včrtamo krog. Temu krogu včrtamo kvadrat. Izračunaj razliko med ploščinama najmanjšega kroga in najmanjšega kvadrata. Nariši skico.

(6 točk)

50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 2. april 2014

Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
E	B	D	D	B	D	C	C

Utemeljitve:

A1. Na mestu desetin vsakega naštetega števila je števka 3, na mestu stotin pa števka 5. Število v (A) je največje, saj ima na mestu tisočin števko 5, medtem ko je na mestu tisočin vsakega drugega naštetega števila števka 3. Število v (B) oziroma (C) ni najmanjše, saj je pri obeh na mestu desettisočin števka 5, medtem ko imata preostali števili na mestu desettisočin števko 3. Na mestu stotisočin števila v (D) je števka 5, na mestu stotisočin števila v (E) pa števka 3, torej je število v (E) najmanjše med naštetimi.

A2. Pretvorimo ure v minute, tako da 2.4 pomnožimo s 60 in dobimo 144 minut.

A3. Število je deljivo s 4, kadar je dvomestni konec deljiv s 4. Iz števk 0, 1, 2, 4 lahko na zahtevan način sestavimo 8 števil: 1420, 4120; 1240, 2140; 1204, 2104; 1024, 4012.

A4. Jana prehodi $\frac{1}{7}$ poti v $\frac{1}{6}$ ure. Preostanejo ji $\frac{4}{7}$ poti, za kar potrebuje $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ure.

A5. Obseg trikotnika je enak $|DE| + |EC| + |DC| = |DF| + |FE| + |EC| + |DC| = |AD| + |DC| + |BE| + |BC| = |AC| + |BC| = 36$ cm.

A6. Tina je 15 čokolad plačala po redni ceni, 5 pa po znižani ceni, za katere plačala $5 \cdot 0.75 = 3.75$ EUR. Ostalih 15 čokolad je stalo 13.50 EUR, torej bi za eno čokolado plačala $13.5 : 15 = 0.9$ EUR, kar je enako 90 centov.

A7. Trimestno število aaa, ki ima vse tri števke enake, lahko zapišemo kot zmnožek: $a \cdot 111$. Število 111 je enako $3 \cdot 37$, torej je 37 največje praštevilo, ki deli trimestna števila oblike aaa.

A8. V prvem dvoboju je Cene pretekel $\frac{8}{10}$ Vidove razdalje. V drugem dvoboju je Miha pretekel $\frac{9}{10}$ Vidove razdalje. Torej je Miha pretekel le $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10}$ Vidove razdalje, kar pomeni da je pretekel le 72 m, ko je bil Vid že v cilju. Miha je zaostal 28 m za Vidom.

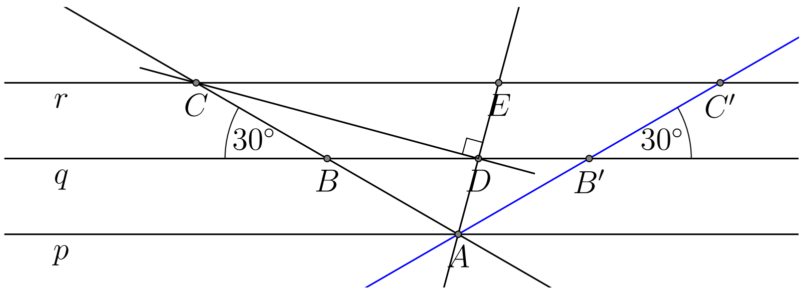
B1. Mentor je načrtoval izlet z x učenci. Prijavilo se je jih za $\frac{2}{9}$ več, torej je bilo število vseh prijavljenih enako $\frac{11}{9}x$. Zbolelo je $\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{9}x = \frac{1}{3}x$ učencev, kar pomeni, da se je izleta udeležilo $\frac{11}{9}x - \frac{1}{3}x = \frac{8}{9}x$ učencev. Razlika 5 učencev predstavlja $\frac{1}{9}x$, torej naj bi se izleta udeležilo 45 učencev. Udeležilo se ga je 40 učencev.

Ugotovitev: število prijavljenih učencev je enako $x + \frac{2}{9}x = \frac{11}{9}x$. .... 1 točka
Zapis števila odsotnih učencev: $\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{9}x = \frac{1}{3}x$ učencev. .... 1 točka
Sklep o številu udeležencev izleta $\frac{11}{9}x - \frac{1}{3}x = \frac{8}{9}x$. .... 1 točka
Ugotovitev, da razlika 5 učencev predstavlja $\frac{1}{9}x$ načrtovanega števila udeležencev. 1 točka
Sklep, da je bilo načrtovanih 45 udeležencev. .... 1 točka
Odgovor: Na izlet je odšlo 40 učencev. .... 1 točka

B2. Množica $\mathcal{M}$ zagotovo vsebuje števila 1, 3, 4, 6 in 8, množica $\mathcal{N}$ pa števila 5, 6 in 7. Števili 2 in 5 vsebuje le množica $\mathcal{N}$, število 4 pa vsebujeta obe množici. Število 1 je vsebovano le v množici $\mathcal{M}$, torej velja $\mathcal{M} = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ in $\mathcal{N} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

Ugotovitev, da so v množici $\mathcal{M}$ zagotovo števila 1, 3, 4, 6 in 8. .... 1 točka
Ugotovitev, da so v množici $\mathcal{N}$ zagotovo števila 5, 6 in 7. .... 1 točka
Sklep: Število 5 je le v množici $\mathcal{N}$, prav tako število 2. .... 1 točka
Sklep: Število 4 je v obeh množicah. .... 1 točka
Zapisana množica $\mathcal{M} = \{1, 3, 4, 6, 8\}$. .... 1 točka
Zapisana množica $\mathcal{N} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$. .... 1 točka

B3. Narišimo najprej skico, ki ustreza podatkom naloge. Obstajata namreč dve premici skozi točko A, ki sekata premico q pod kotom $30°$, a le ena ustreza podatkom naloge, če naj bo kot BDA enak $75°$. (Modra premica ne ustreza podatkom naloge.)



1. način

V trikotniku ABD velja $\sphericalangle ABD = 30°$ in $\sphericalangle BDA = 75°$, torej tretji kot meri $\sphericalangle DAB = 180° - 105° = 75°$. Trikotnik ABD je enakokrak z osnovnico AD in $|AB| = |DB|$. Daljici BC in BD sta enako dolgi, zato je tudi trikotnik DBC enokrak z osnovnico DC. Velikost kota z vrhom B je enaka $\sphericalangle DBC = 150°$, torej sta kota ob osnovnici velika $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BCD = 15°$. Kot $\sphericalangle EDC$ meri $180° - 75° - 15° = 90°$.

Skica z vrisanimi podatki. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\sphericalangle DAB = 180° - 105° = 75°$. .... 1 točka

Sklep: trikotnik ABD je enakokrak in ugotovitev $|AB| = |DB|$. .... 1 točka
Sklep: iz $|BC| = |BD|$ sledi, da je trikotnik DCB enakokrak. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\sphericalangle CDB = 15°$. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\sphericalangle EDC = 180° - 75° - 15° = 90°$. .... 1 točka

2. način

Znana sta dva kota trikotnika ACE: $\sphericalangle ACE = 30°$ in $\sphericalangle CEA = 75°$, torej velja $\sphericalangle EAC = 180° - 105° = 75°$. Trikotnik ACE je enakokrak z osnovnico AE. Ker je točka B razpolovišče stranice AC in premica q vzporednica k nosilki stranice CE, je točka D razpolovišče stranice AE. Torej je daljica DC višina na osnovnico enakokrakega trikotnika in kot $\sphericalangle EDC$ je pravi kot.

Skica z vrisanimi podatki. .... 1 točka
Ugotovitev: dva kota v trikotniku ACE merita $\sphericalangle ACE = 30°$ in $\sphericalangle CEA = 75°$. ... 1 točka
Izračunana velikost kota $\sphericalangle EAC = 75°$. .... 1 točka
Ugotovitev: trikotnik EAC je enakokrak z osnovnico EA. .... 1 točka
Sklep: točka D je razpolovišče osnovnice. .... 1 točka
Sklep: kot $\sphericalangle EDC$ meri $90°$. .... 1 točka

Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
E	D	C	A	D	D	E	A

Utemeljitve:

A1. Zapišemo enačbo $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} = 2$ in jo preoblikujemo v $\sqrt{x} = 8$. Rešitev enačbe je $x = 64$.

A2. Izračunajmo: $-((-1)^3 - (-(-1)^2)) + (-1)^{2014} - ((-1)^7 - (-1)^8) = -(-1-(-1)) + 1 - (-1-1) = -(-1+1) + 1 - (-2) = 3$.

A3. Dolžina stranice DE v trikotniku ADE je enaka $\frac{1}{4}$ dolžine stranice AB v trikotniku ABE. Višini na ti dve stranici sta enaki, torej je ploščina večjega trikotnika enaka štirikratniku ploščine manjšega trikotnika: $4 \cdot 4.5$ cm$^2 = 18$ cm^2.

A4. Razliko razcepimo na prafaktorje $9^{18} - 3^{32} = (3^2)^{18} - 3^{32} = 3^{36} - 3^{32} = 3^{32} \cdot (3^4 - 1) = 80 \cdot 3^{32} = 2^4 \cdot 5 \cdot 3^{32}$. Največji prafaktor razlike je 5.

A5. Iskano število x je v množici rešitev enačbe: $-6 \cdot |\frac{1}{x}| = x - 5$. Izmed naštetih števil enačbi ustreza le število 2.

A6. Kot $\sphericalangle BAE$ meri $\frac{\alpha}{4}$, kot $\sphericalangle EBA = 180° - \alpha$, torej velja $\frac{\alpha}{4} + 180° - \alpha + 54° = 180°$. Kot α meri $72°$.

A7. Na mestu enic ne more biti števka 5, saj mora biti vsota vseh števk enaka 5. Iščemo torej štirimestna števila s števko 0 na mestu enic, vsota preostalih treh števk pa je enaka 5. Iskana števila se lahko začnejo z 1, takih je 5: 1400, 1310, 1220, 1130 in 1040. Lahko se začnejo z 2, taka so 4: 2300, 2210, 2120 in 2030. S 3 se začnejo tri taka števila: 3200, 3110 in 3020. Dve števili se začneta s 4: 4100 in 4010 ter le eno s 5: 5000. Število iskanih števil je 15.

A8. Obe enakosti seštejemo in dobimo $4a + 4b = -8$, torej je $2a + 2b = -4$.

B1. Vsak izmed učencev je pri malici vzel dve ali tri stvari. 80% jih je vzelo sendvič, torej jih 20% ni vzelo sendviča, vzeli pa so sadje in sok. 40% jih ni vzelo sadja, torej so vzeli sendvič in sok. Sendvič in sadje je vzelo 30% učencev, saj jih toliko ni vzelo soka. Natanko dve stvari je vzelo 90% učencev, torej jih je 10% vzelo vse tri stvari. Ker je takih 30, je bilo vseh učencev na malici 300.

Ugotovitev, da je vsak učenec vzel dve ali tri stvari. .... 1 točka
Sklep, da je 20% učencev vzelo le sadje in sok. .... 2 točki
Sklep, da je 40% učencev vzelo le sendvič in sok ter 30% sendvič in sadje. .... 1 točka
Sklep, da je vse tri stvari vzelo 10% učencev. .... 1 točka
Vseh učencev na malici je bilo 300. .... 1 točka

B2. Izračunamo:

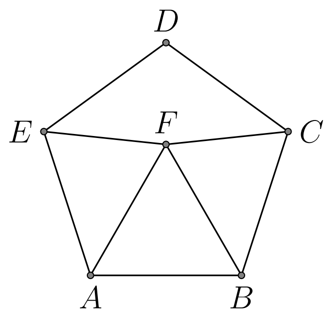
$$(-1)^{33} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{6^2 - 5^2} + \sqrt{27} - 2014^0 + |3 - \sqrt{11}| =$$

$$= -1 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{3} - \sqrt{36 - 25} + 3\sqrt{3} - 1 - 3 + \sqrt{11} =$$

$$= -3\sqrt{3} - \sqrt{11} + 3\sqrt{3} - 4 + \sqrt{11} = -4$$

Pravilno izračunani potenci $(-1)^{33} = -1$ in $2014^0 = 1$. .... 1 točka
Racionalizacija imenovalca $\frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. .... 1 točka
Korenjenje razlike kvadratov $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$. .... 1 točka
Delno korenjenje $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. .... 1 točka
Ugotovitev: $|3 - \sqrt{11}| = -3 + \sqrt{11}$. .... 1 točka
Rezultat: -4. .... 1 točka

B3. Notranji kot pravilnega petkotnika meri $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$, v enakostraničnem trikotniku pa 60°. Za kota $\sphericalangle FAE$ in $\sphericalangle CBF$ velja $\sphericalangle FAE = \sphericalangle CBF = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$. Trikotnik AFE je enakokrak z osnovnico EF, saj velja $|AB| = |AE| = |AF|$, torej velja $\sphericalangle FEA = \sphericalangle EFA = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$. Podobno velja za trikotnik CFB, kjer je osnovnica CF in merita kota $\sphericalangle FCB = \sphericalangle BFC = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$. Velikost kota $\sphericalangle CFE$ je enaka $360^\circ - 2 \cdot 66^\circ - 60^\circ = 168^\circ$.



Izračun velikosti notranjega kota pravilnega petkotnika: $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. 1 točka
Notranji kot v enakostraničnem trikotniku ABF meri 60°. .... 1 točka
Sklep: $\sphericalangle FAE = \sphericalangle CBF = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$. .... 1 točka
Ugotovitev: trikotnika AFE in CFB sta enakokraka. .... 1 točka
Sklep: $\sphericalangle EFA = \sphericalangle BFC = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} = 66^\circ$ .... 1 točka
Izračun velikosti kota $\sphericalangle CFE = 360^\circ - 2 \cdot 66^\circ - 60^\circ = 168^\circ$. .... 1 točka

Rešitve za 9. razred

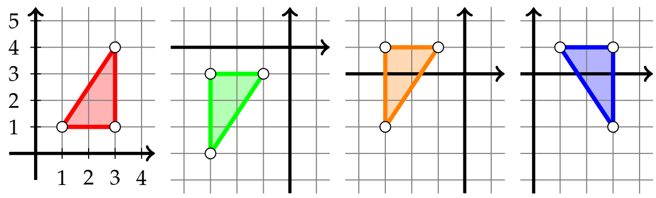
V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	D	B	D	C	E	B

Utemeljitve:

A1. Ana je prebrala 10% strani knjige, torej mora do $\frac{3}{4}$ knjige prebrati še 65% oziroma 52 strani. Knjiga ima torej 80 strani.

A2. Z vrtenjem danega (rdečega) trikotnika okrog izhodišča za $180°$ dobimo zeleni trikotnik. Ko le tega premaknemo za 2 enoti v smeri y-osi, dobimo oranžni trikotnik, katerega zrcalimo čez ordinatno os. Rešitev je modri trikotnik.



A3. Izpostavimo skupni faktor ter izračunamo: $\sqrt{3333^2 + 4444^2} = \sqrt{1111^2 \cdot (3^2 + 4^2)} = 1111\sqrt{9 + 16} = 5555$.

A4. Enačbo zapišemo kot $3^{x+y} = 3^4$. Torej iz enakosti $x + y = 4$, sledi $\frac{x+y}{2} = 2$.

A5. Neenakost ni definirana pri $x = 13$, sicer pa jo lahko preoblikujemo v $|13 - x| < 6$. Tej neenakosti zadoščajo vsa cela števila od vključno 8 do vključno 18, teh je 11. Torej prvotno neenakost reši $11 - 1 = 10$ celih števil.

A6. Zapišemo Pitagorov izrek za trikotnik AED: $a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 68$, kjer je a dolžina stranice kvadrata. Izračunamo $a = 8$ cm in dobimo $|CE| = 6$ cm. Dolžino daljice BE izračunamo s Pitagorovim izrekom v trikotniku BCE: $|BE|^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ torej velja $|BE| = 10$ cm.

A7. Zapišemo razmerje $ab : bc : ac = 15 : 20 : 12$. Iz $ab : bc = 15 : 20$ dobimo $a : c = 15 : 20 = 3 : 4$. Podobno iz $bc : ac = 20 : 12$ sledi $b : a = 20 : 12 = 5 : 3$, iz $ab : ac = 15 : 12$ pa $b : c = 15 : 12 = 5 : 4$. Torej velja $b : a : c = 5 : 3 : 4$.

A8. Izraz preoblikujemo $a(a + 2) + c(c - 2) - 2ac = a^2 + 2a + c^2 - 2c - 2ac$. Zamenjamo vrstni red členov in dobimo $a^2 - 2ac + c^2 + 2a - 2c$. Upoštevamo formulo za kvadrat dvočlenika in izpostavimo 2 ter dobimo: $(a - c)^2 + 2(a - c) = 14^2 + 2 \cdot 14 = 224$.

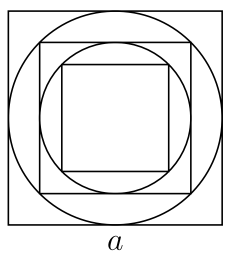
B1. Levo stran enačbe preoblikujemo $\frac{\frac{1}{5}x-3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{\frac{x}{5}-\frac{15}{5}}{4}-\frac{1}{5}=\frac{\frac{x-15}{5}}{4}-\frac{1}{5}=\frac{x-15}{20}-\frac{4}{20}=\frac{x-19}{20}$. Preoblikujemo še desno stran $-\frac{2}{3}\left(-3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{3x-2}{5}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{9x-6}{20}=2x-1-\frac{9x-6}{20}$ in dobimo enačbo: $\frac{x-19}{20}=2x-1-\frac{9x-6}{20}$. Enačbo pomnožimo z 20 in dobimo $x-19=40x-20-9x+6$. Enačbo preuredimo v $x-40x-9x=-20+6+19$ oziroma $-30x=5$. Rešitev je $x=-\frac{1}{6}$.

Odprava dvojnih ulomkov na levi strani enačbe: $\frac{\frac{1}{5}x-3}{4}=\frac{x-15}{20}$. .... 1 točka
Množenje ulomkov na desni strani: $\frac{3}{4}\cdot\frac{3x-2}{5}=\frac{9x-6}{20}$. .... 1 točka
Upoštevanje skupnega imenovalca na levi strani ter odprava oklepajev na desni strani: $\frac{x-19}{20}=2x-1-\frac{9x-6}{20}$. .... 1 točka
Množenje enačbe z 20. .... 1 točka
Ureditev enačbe v $-30x=5$. .... 1 točka
Zapisana rešitev $x=-\frac{1}{6}$. .... 1 točka

B2. Marko je imel x EUR denarja, za nakup kolesa je namenil $\frac{5}{6}x$ evrov. Zaradi 10% popusta je za nakup kolesa porabil le $\frac{5}{6}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{5}{6}x=\frac{3}{4}x$ evrov, torej mu je ostala $\frac{1}{4}$ denarja. Od tega je porabil za zračnico 5%, zato mu je ostalo $\frac{1}{4}x-\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{19}{80}x$ denarja oziroma 76 EUR. Rešitev enačbe $\frac{19}{80}x=76$ je 320. Torej je imel Marko na začetku 320 EUR.

Ugotovitev: Marko je za nakup namenil $\frac{5}{6}x$ prihrankov. .... 1 točka
Sklep: S priznanim popustom je porabil za kolo $\frac{5}{6}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{5}{6}x=\frac{3}{4}x$. ...... 1 točka
Sklep: Ostala mu je $\frac{1}{4}$ denarja. .... 1 točka
Izračun ostanka po nakupu zračnice: $\frac{1}{4}x-\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{19}{80}x$. .... 1 točka
Zapisana enačba: $\frac{19}{80}x=76$. .... 1 točka
Rešitev: $x=320$ EUR. .... 1 točka

B3. Polmer prvega kroga je enak 3 cm, saj se krog dotika kvadrata v razpoloviščih stranic. Diagonala drugega kvadrata je enaka premeru kroga, torej velja $6=a_2\cdot\sqrt{2}$, kjer je a_2 dolžina stranice drugega kvadrata in je enaka $a_2=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ cm. Polmer drugega kroga meri $r_2=\frac{a_2}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Za diagonalo tretjega kvadrata velja $3\sqrt{2}=a_3\sqrt{2}$, kjer je a_3 dolžina stranice najmanjšega kvadrata in meri 3 cm. Razlika ploščin je enaka $\pi{r_2}^2-{a_3}^2=(\frac{9\pi}{2}-9)$ cm^2.



Narisana skica. .... 1 točka
Ugotovitev $r_1=3$ cm. .... 1 točka
Izračunana dolžina stranice drugega kvadrat $a_2=3\sqrt{2}$ cm. .... 1 točka
Ugotovitev $r_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm in izračunana dolžina stranice najmanjšega kvadrata $a_2=3$ cm. .... 1 točka
Izračunana razlika ploščin: $(\frac{9\pi}{2}-9)$ cm^2. .... 2 točki