47. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 16. april 2011

Rešitve za 7. razred

1. Višina stopnice mora biti največje celo število, ki deli 147, 252 in 210. Največji skupni delitelj teh števil je 21. Višina ene stopnice naj bi torej znašala 21 cm.

Ugotovitev, da je višina stopnice $D(147, 210, 252)$. .... **2 točki**
Razcep na prafaktorje $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. .... **2 točki**
$147 = 3 \cdot 7^2$. .... **2 točki**
$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. .... **2 točki**
Izračunan največji skupni delitelj in odgovor 21 cm. .... **2 točki**

2. Trikotnik CMN mora biti enkokrak. Dovolj je, če pokažemo, da sta kota ob osnovnici skladna. Kote v trikotniku ABC označimo z α, β in γ. Kot $\beta = 90° + \alpha$. Kot γ pa meri potem $90° - 2\alpha$. Kot CMN meri $180° - \frac{\gamma}{2} - \beta = 45°$. Velikost kota CNM dobimo iz zveze $180° - \frac{\gamma'}{2} - \beta'$, kjer sta γ' in β' zunanja kota in merita po vrsti $180° - \gamma = 90° - 2\alpha$ in $180° - \beta = 90° - \alpha$. Tako tudi kot CNM meri $45°$ in $|CM| = |CN|$.

Skica z vrisanimi koti in daljicama CM in CN. .... **1 točka**
Ugotovitev, da mora biti trikotnik CMN enakokrak in kota CMN in CNM skladna. .... **1 točka**
Zapis kota γ kot $180° - (\alpha + 90°) - \alpha = 90° - 2\alpha$. .... **1 točka**
Izračunan kot CMN: $180° - \frac{\gamma}{2} - \beta = 45°$. .... **3 točke**
Izračunan kot CNM: $180° - \frac{\gamma'}{2} - \beta' = 180° - \frac{90° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha = 45°$. .... **3 točke**
Sklep $|CM| = |CN|$. .... **1 točka**

3. Branjevka ima na začetku x kg krompirja. Prvi dan ga proda $0.3x$ kg, ostane pa ji $0.7x$ kg. Drugi dan proda $\frac{4}{7} \cdot 0.7x = 0.4x$ kg, torej ji za tretji dan ostane $0.3x$ kg. Razlika med količino prodanega in ostalega krompirja je torej $0.4x$ kg, kar znaša 200 kg in $x = 500$ kg.

Ugotovitev, da prvi dan proda $0.3x$ kg. .... **1 točka**
Izračunan ostanek $0.7x$ kg. .... **1 točka**
Izračunana količina prodanega krompirja drugi dan $0.4x$ kg. .... **2 točki**
Izračunan ostanek krompirja $0.3x$ kg. .... **1 točka**
Ugotovitev, da je razlika med prodanim in ostalim krompirjem $0.4x$ kg. .... **2 točki**
Izenačitev $0.4x = 200$. .... **1 točka**
Rezultat $x = 500$ kg. .... **2 točki**

4. Številske vrednosti prirejene črkam abecede označimo z malimi črkami. Iz podatkov tabeli izvemo, da je $a^2 \cdot n = 49$, torej mora biti črki A prirejena vrednost 7, črki N pa 1. Iz vrednosti besede $VENA$, izvemo, da je $v \cdot e = 8$. Izvedeti moramo samo še vrednost

g. Nastopa v besedah GNU in GOS, edino število, ki deli tako 33 kot 440 in je različno od 1, pa je 11. $v \cdot e \cdot g \cdot a = 8 \cdot 11 \cdot 7 = 616$.

Iz vrednosti besede ANA izračunani števili $a = 7$ in $n = 1$. .... 3 točke*
Ugotovitev, da je $v \cdot e = 8$. .... 2 točki
Ugotovitev, da g deli 33 in 440. .... 1 točka
$g = 11$. .... 2 točki
Izračunana vrednost besede $VEGA$ je 616. .... 2 točki

***Opomba: Tekmovalec dobi vse točke, če jasno izključi ostale možnosti.**

5. Če prezrcalimo premici p in r čez premico s, tvorijo presečišča vseh narisanih premic deltoid (ali dva skladna trikotnika). Točki, ki sta oglišči obeh trikotnikov, ki ne ležita na premici s, pa sta torej enako oddaljeni od nje in sta iskani točki P in R.

Natančno konstruirani obe točki. .... 5 točk
Opis konstrukcije: Zrcalimo premico p čez s v p' in premico r čez s v r'.
Presečišče premic p in r' je točka P, presečišče premic r in p' pa R. ......5 točk

Rešitve za 8. razred

1.

$$\frac{c}{d} > \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{d}{b}$$

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{a} < \frac{c}{a} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b > \frac{c}{b} : c$$

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} > 1$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{d} < \frac{a}{c}$$

$$a \cdot b > c \cdot d$$

$$b - c > a - d$$

$$\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$$

Vsak pravilno zapisan neenačaj prinaša eno točko.

2. Prva črpalka v eni uri napolni $\frac{1}{4}$ rezervoarja, druga pa $\frac{1}{6}$. Skupaj torej v eni uri napolnita $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ rezervoarja. Tolikšen del je poln ob 9. uri. Nato do desetih dela samo prva in napolni še $\frac{1}{4}$, tako da je ob 10.00 rezervoar napolnjen do $\frac{2}{3}$. Ostane še $\frac{1}{3}$ rezervoarja, tega pa obe črpalki skupaj napolnita v $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{4}{5}$ ure ali v 48 minutah. Rezervoar bo torej poln ob 10.48.

Ugotovitev, da prva črpalka napolni v eni uri $\frac{1}{4}$, druga pa $\frac{1}{6}$. .... (1 + 1) točka
Izračun, da skupaj v eni uri napolnita $\frac{5}{12}$ rezervoarja. .... 2 točki
Izračun deleža vode po dveh urah $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$. .... 2 točki
Ostanek za polnjenje po dveh urah $\frac{1}{3}$. .... 1 točka
Izračunan čas, ki ga za polnjenje tretjine porabita obe črpalki $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{4}{5}$ ure. ...2 točki
Odgovor: 10.48 **...1 točka**

3.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

Pravilno racionalizirani različni ulomki. .... **4 točke**
Množenje (kvadriranje) prvega dela. .... **4 točke**
Odštevanje. .... **1 točka**
Rezultat: $\frac{13}{12}$**.** .... **1 točka**

Opomba: Možna je tudi rešitev brez racionalizacije, v tem primeru dobijo tekmovalci:

Pravilno izračunan kvadrat tročlenika: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$**.** .... **6 točk**
Odštevanje (odprava oklepaja). .... **2 točki**
Rezultat: $\frac{13}{12}$**.** .... **2 točki**

4. Najprej načrtamo nosilko stranice CB in na njej označimo oglišče C. Narišemo njeno vzporednico na razdalji 3.5 cm, in s pomočjo šestila z lokom dolžine 4 cm in središčem v C na vzporednici določimo oglišče A. Nato narišemo simetralo stranice AC in določimo središče očrtane krožnice na simetrali z oddaljenostjo 3 cm od A in C. Narišemo očrtano krožnico. Oglišče B leži v enem od presečišč krožnice in nosilke stranice CB. Izberemo ga tako, da bo trikotnik ostrokoten.

Narisana skica z vsemi podatki. .... **1 točka**
Narisana nosilka stranice in vzporednica. .... **1 točka**
Določitev točk A **in** C**.** .... **2 točki**
Načrtano središče očrtane krožnice. .... **1 točka**
Oglišče B **in narisan ostrokotni trikotnik.** .... **1 točka**
Opis konstrukcije. .... **4 točke**

5. Naj bo količina tekočine v tretji posodi x litrov, potem je v prvi posodi $2.5x$ litrov in v drugi $(20-x-2.5x)=20-3.5x$ litrov tekočine. Čistega soka v končni mešanici je 22%, $0.22\cdot 20=4.4$ litra. V prvi posodi imamo $0.3\cdot 2.5x=0.75x$ litra soka, v drugi posodi $0.1(20-3.5x)=2-0.35x$ litra in v tretji $0.4x$ litra soka. Če vse troje seštejemo je čistega soka v vseh treh posodah $0.75x+2-0.35x+0.4x=2+0,8x$ litra. Ker mora biti soka v mešanici 4.4 litra, je $0.8x=2.4$ litra in $x=3$ litre. Tretja posoda torej vsebuje 3 litre, prva 7.5 litra in druga 9.5 litra tekočine.

Izračun končne količine soka v mešanici $0.22\cdot 20=4.4$ **litra.** .... **2 točki**
Zapis količine tekočine v prvi in zadnji posodi, $2.5x$**;** x**.** .... **1 točka**
Izražena količina v tretji posodi $20-3.5x$**.** .... **1 točka**
Zapis deležev soka v posameznih posodah $0.75x$**,** $2-0.35x$**,** $0.4x$**. 2 točki (1 točka za dva pravilna odgovora)**
Skupni delež soka $2+0.8x$**.** .... **1 točka**
Izračunana količina soka v zadnji posodi $0.8x=2.4$ **litra in** $x=3$ **litre.** .... **2 točki**
Odgovor: 3**,** 7.5 **in** 9.5 **litra.** .... **1 točka**

Rešitve za 9. razred

1. Število $\sqrt{18}$ lahko zapišemo kot $3\sqrt{2}$, kar pomeni, da je razdalja med narisanima točkama $2\sqrt{2}$. Če to razdaljo razpolovimo in jo s šestilom prenesemo levo od $\sqrt{2}$, dobimo točko, ki predstavlja število 0. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ z racionaliziranjem zapišemo kot $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, pomeni, da razpolovimo razdaljo med 0 in $\sqrt{2}$ in jo s šestilom prenesemo levo od točke, ki predstavlja število 0.

Zapis $\sqrt{18}$ v obliki $3\sqrt{2}$. .... 1 točka
Razpolovitev daljice med $\sqrt{2}$ in $\sqrt{18}$. .... 1 točka
Prenos polovice razdalje levo od $\sqrt{2}$ in označeno število 0. .... 1 točka
Opisan postopek za načrtovanje prvega števila. .... 2 točki
Zapis $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v obliki $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. .... 1 točka
Razpolovitev daljice med 0 in $\sqrt{2}$. .... 1 točka
Natančno prenesena razdalja in narisano število $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. .... 1 točka
Opisan postopek za načrtovanje drugega števila. .... 2 točki

2. Večje število označimo z a, manjše pa z b, tako velja $a^2 - b^2 = 167(a-b)$, $(a-b)(a+b) = 167(a-b)$, iz česar sledi $a + b = 167$. Ostanek pri deljenju števil je 15, $a = k \cdot b + 15$. $k \cdot b + 15 + b = 167$. $b(k + 1) = 152$. Število b mora deliti 152, hkrati pa mora biti večje od 15. Zapišemo 152 kot produkt prafaktorjev: $152 = 2^3 \cdot 19$. b je torej lahko 19, 38, 76 ali 152, a pa je 148, 129, 91 in 15. Zadnja rešitev ne pride v poštev, ker mora biti a večji od b, da bo razlika kvadratov večja od razlike teh števil.

Zapis zveze $a^2 - b^2 = 167(a - b)$. .... 1 točka
Razcep razlike kvadratov in ugotovitev $a + b = 167$. .... 2 točki
Zapis zveze med a in b z ostankom pri deljenju $a = k \cdot b + 15$. .... 1 točka
Dobljena enačba $b(k + 1) = 152$. .... 1 točka
Ugotovitev, da mora b deliti 152. .... 1 točka
Razcep 152 na prafaktorje. .... 1 točka
Zapis vse možnosti za b. .... 1 točka
Izločitev števil manjših od 15 in večjih od $\frac{167}{2}$. .... 1 točka
Rešitve: $(91, 76)$, $(129, 38)$ in $(148, 19)$. .... 1 točka

3. Zabojnik se napolni v 5 urah, kar pomeni, da je ob 12. uri v zabojniku ena petina vode in je suhe $\frac{4}{5}$ jeklene vrvi. Ta jeklenica potem meri 8.5 m. Dolžino jeklene vrvi lahko izračunamo s pomočjo Pitagorovega izreka $8.5^2 = v^2 + d^2$, kjer je v višina zabojnika in d diagonala osnovne ploskve. $d = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = 7.5$ m. Višina zabojnika potemtakem meri 4 m. Vsako uro priteče v zabojnik $\frac{1}{5}$ njegove prostornine, ta pa znaša $V = 12 \cdot 9 \cdot 4\ \mathrm{m}^3 = 432\ \mathrm{m}^3$. Hitrost pritekanja vode je $86.4\frac{m^3}{h}$.

Ugotovitev ali upoštevanje, da se v 1 uri napolni $\frac{1}{5}$ zabojnika. .... 1 točka
Izračunana dolžina jeklene vrvi 8.5 m. .... 2 točki
Izračunana diagonala osnovne ploskve 15 .m 2 točk1
Izračunana višina zabojnika 4 m. .... 2 točki

Izračunana prostornina 432 **m**^{3}**.** .... **2 točki**
Odgovor: Hitrost pritekanja vode je $86.4\frac{m^3}{h}$**.** .... **1 točka**

4. Število miz označimo z m, število jabolk na eni mizi pa z j. Skupno število jabolk je $m \cdot j$. Če dodamo 5 miz, se zmanjša število jabolk na mizi za 6, skupno število le-teh je sedaj $(m+5)(j-6)$. Če dodamo še 5 novih miz in zmanjšamo število jabolk v košari za 4, dobimo skupaj $(m+10)(j-10)$ jabolk. Iz enačbe $m \cdot j = (m+5)(j-6)$ sledi zveza $j = \frac{6m+30}{5}$. Če to zvezo uporabimo v enačbi $m \cdot j = (m+10)(j-10)$, pridemo do rešitve sistema enačb: $m = 20$ in $j = 30$. V restavraciji imajo na voljo $20 \cdot 30 = 600$ jabolk.

Zapis števila jabolk v vseh treh primerih,
npr. $m \cdot j$**,** $(m+5)(j-6)$**,** $(m+10)(m-10)$**.** .... **(1 + 1 + 1) točka**
Zapisana ena od enačb, npr. $m \cdot j = (m+5)(j-6)$**.** .... **1 točka**
Izpeljana zveza med neznankama, npr. $j = \frac{6m+30}{5}$**.** .... **2 točki**
Zamenjava neznanke v drugi enačbi. .... **1 točka**
Rešitvi sistema: $j = 30$**,** $m = 20$**.** .... **(1 + 1) točka**
Odgovor: 600 jabolk. .... **1 točka**

5. Stranici enega od osmih skladnih pravokotnikov označimo z a (daljšo) in b. $3a = 5b$. Sestavljen večji pravokotnik ima stranici dolgi $3a$ in $a+b$. Diagonalo dobimo kot $d = \sqrt{(3a)^2 + (a+b)^2}$. Z upoštevanjem $b = \frac{3a}{5}$, dobimo $d = \sqrt{\frac{289a^2}{25}} = \frac{17a}{5}$. $a = 5 \cdot \frac{136}{17} = 40$ cm, $b = 24$ cm. Ploščina enega od malih pravokotnikov meri $a \cdot b = 960$ cm^2.

Zapis zveze med stranicama manjšega pravokotnika $3a = 5b$**.** .... **2 točki**
Zapis ali upoštevanje stranic večjega pravokotnika: $3a$**,** $a+b$**.** .... **2 točki**
Izračun diagonale s Pitagorovim izrekom $\frac{17a}{5}$**.** .... **2 točki**
Izračunana ena od stranic, npr. $a = 40$ **cm.** .... **2 točki**
Izračunana druga stranica $b = 24$ **cm.** .... **1 točka**
Izračunana ploščina 960 **cm**^{2}**.** .... **1 točka**