

Rešitve za 7. razred

1. Če je število deljivo z 9, je vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota števk števila $72xy1$ je $10 + x + y$, kar pomeni, da mora biti $x + y = 8$ ali $x + y = 17$. Ker sta x in y različni števki, dobimo v prvem primeru števila: 72081, 72171, 72261, 72351, 72531, 72621, 72711 in 72801, v drugem pa števili: 72891 in 72981.

Zapis ali uporaba kriterija za deljivost z 9	1 točka
Ugotovitev, da je $x + y = 8$	2 točki
Zapis vseh osmih možnosti (72081, 72171, 72261, 72351, 72531, 72621, 72711 in 72801).	4 točke*
Ugotovitev, da je $x + y = 17$	2 točki
Zapisani preostali števili 72891 in 72981	1 točka

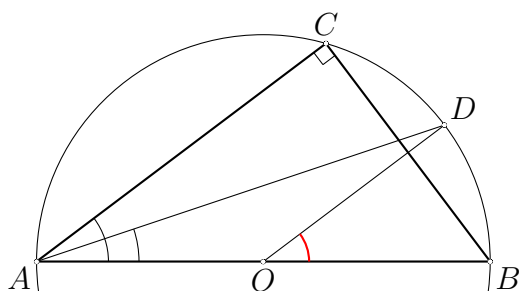
*Opomba: Za vsaki dve števili dobi 1 točko, za napačno možnost se točka odšteje.

2. Največ kovancev bo Peter potreboval, če bo plačal s po enim z vrednostjo 31, 19 in 3 enot, preostanek pa s kovanci z vrednostjo ene denarne enote. Teh bo potem: $1239 - 31 - 19 - 3 = 1186$. V tem primeru bo Peter potreboval 1189 kovancev.

Najmanj kovancev potrebuje v primeru, če bo vzel največ tistih z največjo nominalno vrednostjo. Ker mora porabiti po vsaj en kovanec vsake vrednosti, bo za plačilo $31 + 19 + 3 + 1 = 54$ enot porabil 4 kovance. Torej mora preostalih $1239 - 54 = 1185$ enot plačati s čim manj kovanci. Ker je $1185 = 38 \cdot 31 + 7$, potrebuje več kot 38 kovancev. Pokažimo, da 39 kovancev zadošča. Če uporabi 38 kovancev po 31 enot, preostalih 7 enot ne more plačati z enim kovancem. Če pa uporabi 37 kovancev po 31 enot, lahko preostalih $1185 - 37 \cdot 31 = 38$ enot plača z dvema kovancema po 19 enot. Torej mora uporabiti vsaj $4 + 39 = 43$ kovancev,

Ugotovitev, da je potrebno imeti kar največ kovancev za 1 enoto	2 točki
Izračun največjega števila kovancev 1189	2 točki
Zapis števila 1239 z maksimalnim številom kovancev za 31 enot: $1239 = 39 \cdot 31 + 1 \cdot 19 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$	2 točki
Ugotovitev, da to ni najmanjše število in da lahko zapišemo $1239 = 38 \cdot 31 + 3 \cdot 19 + 3 + 1$	3 točke
Najmanjše število kovancev je 43	1 točka

3. Ker O leži na razpolovišču hipotenuze, je trikotnik AOD enakokrak z dvema polmeroma za kraka. Kot ob osnovnici trikotnika OAD meri polovico kota BAC , torej 18.5° . Kot ob vrhu O pa potem $180^\circ - 2 \cdot 18.5^\circ = 143^\circ$. Iskani kot je njegov sokot in meri 37° .



- Skica z označenim središčem očrtane krožnice (O), narisano simetralo in presečiščem simetrale in krožnice (D). 2 točki
 Ugotovitev, da je trikotnik AOD enakokrak 2 točki
 Izračun kota ob osnovnici 18.5° 2 točki
 Izračun kota ob vrhu 143° 2 točki
 Izračun iskanega kota $\sphericalangle DOB = 37^\circ$ 2 točki

Opomba: Tekmovalec lahko zapiše vse vmesne kote z oznakami (npr. α , $180^\circ - \alpha$) in eksplicitno zapiše samo velikost iskanega kota in dobi vse točke. Rešitev, dobljena z merjenjem, je neveljavna in dobi tekmovalec največ 2 točki za skico.

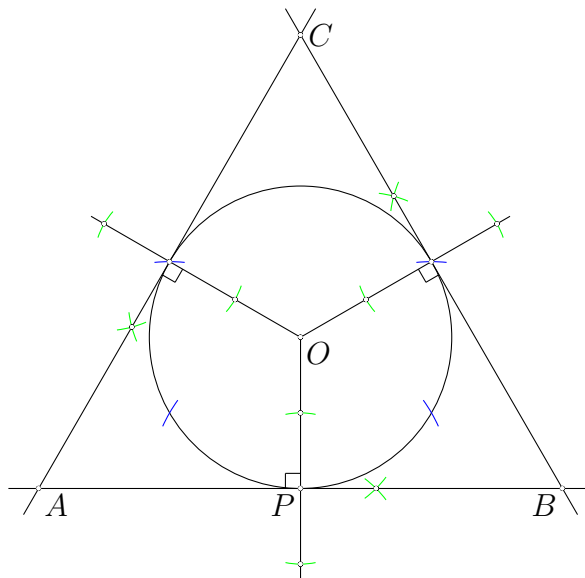
Tekmovalec lahko pride do rešitve tudi z upoštevanjem, da se simetrali kota BAC in stranice BC sekata v točki D . Če tega ne utemelji, dobi največ 8 točk. Če manjka tudi utemeljitev zakaj sta OD in AC vzporedni, pa prejme največ 6 točk.

4. Recimo, da so pred znižanjem prodali x izdelkov. Izkupiček je bil tako $48x$. Po znižanju se je število prodanih izdelkov povečalo za pol in so prodali $\frac{3x}{2}$ izdelkov. Izkupiček pa se je povečal za $\frac{1}{4}$ in je znašal $48x + \frac{1}{4} \cdot 48x = \frac{5}{4} \cdot 48x = 60x$. Novo ceno dobimo, če nov izkupiček delimo s številom prodanih izdelkov $\frac{60x}{\frac{3x}{2}} = 40$ EUR.

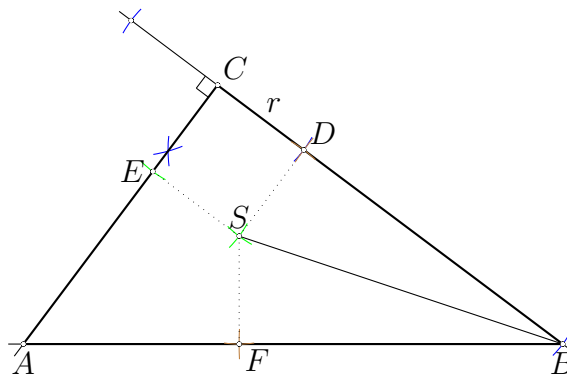
Opomba: Ker je se število prodanih izdelkov povečalo, je $\frac{3x}{2} > x$, kar pomeni, da je $x > 0$. Torej je v gornji enačbi res dovoljeno deliti z $\frac{3x}{2}$.

- Zapis izkupička pred znižanjem $48x$ 1 točka
 Število prodanih izdelkov po znižanju $\frac{3x}{2}$ 2 točki
 Nov izkupiček $48x + \frac{1}{4} \cdot 48x = \frac{5}{4} \cdot 48x = 60x$ 1 + 1 + 1 točka
 Uporaba deljenja izkupička s številom izdelkov 2 točki
 Rezultat: 40 EUR 2 točki

5. a) V enakostraničnem trikotniku dotikališča stranic razdelijo včrtano krožnico na tri enake dele. Načrtamo krožnico s polmerom 2 cm in jo s tremi točkami razdelimo na enake dele. V vsaki od dobljenih točk konstruiramo tangento na krožnico. Presečišča tangents so oglišča trikotnika.



b) Če v pravokotnem trikotniku narišemo polmere od središča do vseh dotikališč, dobimo kvadrat s stranico r in še dva štirikotnika, ki ju sestavljata skladna trikotnika. Najprej torej načrtamo pravi kot pri oglišču C in kvadrat, ki nam da središče včrtanega kroga. Odmerimo stranico BC in dobimo oglišče B . Točko D , ki predstavlja oglišče kvadrata, sedaj prezrcalimo čez daljico BS in dobimo točko F – dotikališče krožnice in hipotenuze. Daljico BF še podaljšamo, da seka drugi krak pravega kota in dobimo oglišče A .



- a) Narisana krožnica in razdeljena na tri enake dele 1 točka
 Načrtana ena tangenta pravokotno na polmer 1 točka
 Konstrukcija ostalih dveh stranic 1 točka
 Opis konstrukcije 1 točka
- b) Skica, iz katere je viden vsaj en pravokoten polmer na stranico 1 točka
 Narisan kvadrat s stranico 2 cm in označeno središče včrtanega kroga .. 1 točka
 Zrcaljenje dotikališča D čez SB v F 1 točka
 Podaljšanje BF , da dobimo A 1 točka
 Opis konstrukcije 2 točki

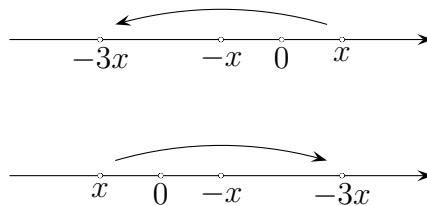
Rešitve za 8. razred

1. Računajmo:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{3^2} + \sqrt{392} \cdot \frac{\sqrt{13^2 + 12^2} \cdot (2^2 + 2^1 - 2^0) \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} : \frac{1}{2^3}\right)} \right) : \sqrt{\frac{1}{\sqrt{256}}} = \\
 & = \left(3 + \sqrt{196 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{169 + 144} \cdot (4 + 2 - 1) \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} : \frac{1}{8}\right)} \right) : \sqrt{\frac{1}{16}} = \\
 & = \left(3 + 14\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{313} \cdot 5 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\left(\frac{1}{8} - 1\right)} \right) : \frac{1}{4} = \left(3 + 14\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{313} \cdot 5 \cdot \frac{5}{4}}{\frac{7}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot 4 = \\
 & = \left(3 + \frac{14\sqrt{2} \cdot \sqrt{313} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8}{7 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} \right) \cdot 4 = (3 + 100\sqrt{313}) \cdot 4 = 12 + 400\sqrt{313}.
 \end{aligned}$$

Kvadriranje $\sqrt{3^2} = 3$	1 točka
Delno korenjenje $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$	1 točka
Vsota potenc $2^2 + 2^1 - 2^0 = 5$	1 točka
Korenjenje ulomka $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$	1 točka
Upoštevan vrstni red operacij in nasprotna vrednost $-\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} : \frac{1}{2^3}\right) = \frac{7}{8}$...	2 točki
Dvakratno korenjenje $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{256}}} = \frac{1}{4}$	1 točka
Krajšanje s $\sqrt{2}$ ali racionalizacija in množenje	1 točka
Poenostavitev ulomka ($100\sqrt{313}$)	1 točka
Rezultat: $12 + 400\sqrt{313}$	1 točka

2. Če število prezrcalimo preko njegove nasprotne vrednosti, se pomnoži z -3 . Ko postopek izvršimo štirikrat, iz a_1 dobimo a_5 . Tako velja $a_5 = a_1 \cdot (-3)^4$. Torej je $-97\frac{1}{5} = 81a_1$ in $a_1 = -\frac{6}{5}$.

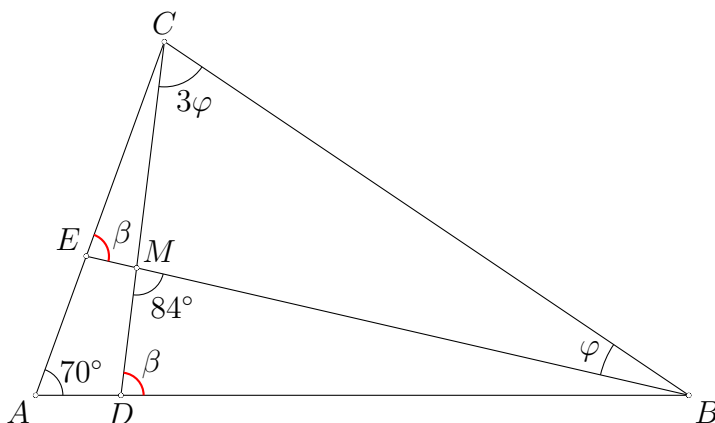


Ugotovitev, da je $a_2 = -3a_1$	3 točke
Zapis $a_5 = (-3)^4 \cdot a_1$	3 točke
(Tekmovalec lahko zapiše vsak naslednji člen s prejšnjim in za vsakega prejme točko.)	
Enačba: $-\frac{486}{5} = 81a_1$	2 točki
Izračun $a_1 = -\frac{6}{5}$	2 točki

3. Na tekmo se lahko pelje največ 6 tekmovalcev, saj je največja razlika med dvema zaporednima prašteviloma med 2 in 54 enaka 6. Tekmovalca ne moreta biti dva, ker bi bila vsota števil njunih sedežev liha. V primeru treh tekmovalcev je vsota treh zaporednih števil $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 54$ in je potem $n = 17$. Trije sedeži bi bili označeni s števili 17, 18, 19, kar ni ustrezna rešitev, saj sta 17 in 19 praštevili. V primeru, da bi se peljali na tekmo štirje tekmovalci, bi bila vsota zaporednih naravnih števil na sedežih $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4n + 6$. Tako bi bilo $4n = 48$ in $n = 12$. Tekmovalci bi sedeli na sedežih 12, 13, 14, 15, kar ustreza pogoju, saj je samo 13 praštevilo. V primeru petih tekmovalcev je vsota števil na sedežih enaka $5n + 10$ in je deljiva s 5, zato ne more biti 54. V zadnjem možnem primeru dobimo vsoto $6n + 15 = 54$ in $6n = 39$, ta enačba nima rešitve v naravnih številih. Edina možna rešitev je, da se na tekmo peljejo 4 tekmovalci.

Ugotovitev, da je lahko tekmovalcev največ 6	1 točka
Izključitev možnosti dveh tekmovalcev.	1 točka
Zapisna vsota števil sedežev v primeru treh tekmovalcev: $3n + 3$	1 točka
Izračunana števila sedežev 17, 18, 19	1 točka
Izključitev te možnosti zaradi dveh praštevil	1 točka
Zapis vsote za štiri tekmovalce: $4n + 6$	1 točka
Izračunana števila sedežev in potrditev rešitve: 12, 13, 14, 15	2 točki
Izključitev možnosti petih tekmovalcev $5n + 10 \neq 54$	1 točka
Izključitev možnosti šestih tekmovalcev $6n + 15 \neq 54$	1 točka

4. Kot $\sphericalangle DMB = 84^\circ$ je zunanji kot trikotnika BCM . Označimo $\varphi = \sphericalangle CBE$. Potem je $\varphi + 3\varphi = 84^\circ$ in $\varphi = 21^\circ$. V štirikotniku $ADME$ sta notranja kota pri A in M enaka 70° in 96° (sokot $\sphericalangle DMB$), kota pri D in E pa sta skladna, saj sta sokota skladnima kotoma $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BEC = \beta$. Vsak od njiju meri potem $\frac{1}{2}(360^\circ - 70^\circ - 96^\circ) = 97^\circ$. Torej $\beta = 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$. Kota $\sphericalangle EBA$ in $\sphericalangle ACD$ sta tudi skladna, zato lahko izračunamo $\sphericalangle MBD = 180^\circ - 83^\circ - 84^\circ = 13^\circ$. Notranji kot trikotnika ABC z vrhom v B meri $\varphi + 13^\circ = 34^\circ$, notranji kot z vrhom v C pa $3\varphi + 13^\circ = 76^\circ$. Koti v trikotniku ABC so 70° , 34° in 76° .



Skica z označenimi skladnimi koti	1 točka
Ugotovitev ali upoštevanje, da je kot $\sphericalangle BMD = 84^\circ$ zunanji kot trikotnika BCM .	

1 točka

Izračun $\varphi = 21^\circ$	1 točka
Ugotovitev, da sta dva kota v štirikotniku $ADME$ skladna	1 točka
Izračun teh kotov 97°	1 točka
Izračun $\beta = 83^\circ$	1 točka
Izračun kotov $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ACD = 13^\circ$	1 točka
Zapisana ali upoštevana zveza notranji kot trikotnika ABC z vrhom v B : $\varphi + 13^\circ$ 1 točka	
Zveza za notranji kot z vrhom v C : $3\varphi + 13^\circ$	1 točka
Odgovor: Koti v trikotniku ABC so 70° , 34° in 76°	1 točka

5. Aleš plača $\frac{1}{2}$ kupnine. Aleš, Cene in Drago so plačali skupaj trikrat toliko kot Bojan, torej je Bojan plačal $\frac{1}{4}$ kupnine. Aleš, Bojan in Drago so plačali skupaj štirikrat toliko kot Cene, torej je Cene plačal $\frac{1}{5}$ kupnine. Skupni delež Aleša, Bojana in Ceneta je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$. Za Draga ostane $\frac{1}{20}$ kupnine. 2000 EUR je $\frac{1}{20}$ cene gozda, gozd pa zato stane 40000 EUR.

Ugotovitev, da plača Bojan $\frac{1}{4}$ zneska	3 točke
Ugotovitev, da plača Cene $\frac{1}{5}$ zneska	3 točke
Izračun deleža prvih treh $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$	2 točki
Izračunan delež Draga $\frac{1}{20}$	1 točka
Izračunana cena gozda 40000 EUR	1 točka

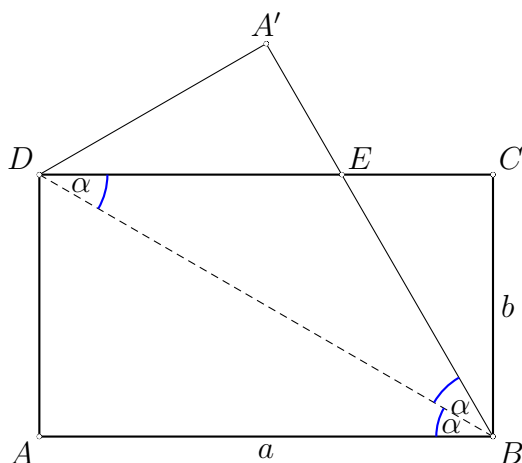
Rešitve za 9. razred

1. Računajmo:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{4375} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{(169 - 144) \cdot 3} \cdot (5 - 2\sqrt{6})}{-\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} : \frac{1}{2^3}\right)} \cdot \sqrt{21} + 2^1 + 2^0 \right) : \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \\
 & = \left(\sqrt{625 \cdot 7} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3}\right) \cdot 5\sqrt{3} \cdot (5 - 2\sqrt{6})}{-\left(\frac{1}{8} - 1\right)} \cdot \sqrt{21} + 3 \right) : \frac{1}{4} = \\
 & = \left(25\sqrt{7} \cdot \frac{\frac{5+2\sqrt{6}}{6} \cdot 5\sqrt{3} \cdot (5 - 2\sqrt{6})}{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{7 \cdot 3} + 3 \right) \cdot 4 = \\
 & = \left(\frac{25\sqrt{7} \cdot (5 + 2\sqrt{6}) \cdot 5\sqrt{3} \cdot (5 - 2\sqrt{6}) \cdot 8 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{7 \cdot 6} + 3 \right) \cdot 4 = \\
 & = \left(\frac{25 \cdot 7 \cdot (25 - 4 \cdot 6) \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6} + 3 \right) \cdot 4 = (500 + 3) \cdot 4 = 2012
 \end{aligned}$$

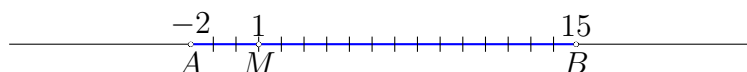
Delno korenjenje $\sqrt{4375} = 25\sqrt{7}$	1 točka
Kvadrat dvočlenika $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{6}}{6}$	1 točka
Korenjenje $\sqrt{(169 - 144) \cdot 3} = 5\sqrt{3}$	1 točka
Produkt $(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 1$	1 točka
Izračun imenovalca $-\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} : \frac{1}{2^3}\right) = \frac{7}{8}$	1 točka
Okrajšan ulomek 500	2 točki
Izračunana vsota $500 + 2^1 + 2^0 = 503$	1 točka
Izračunan četrti koren $\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$	1 točka
Rezultat: 2012	1 točka

2. Ploščina pravokotnika $ABCD$ je enaka ab , ploščina trikotnika BCE pa $\frac{ab}{6} = \frac{|EC| \cdot b}{2}$, torej je $|EC| = \frac{a}{3} = \frac{8}{3}$ cm. Kota $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle BDC$ sta skladna, saj imata vzporedne krake (izmenična kota), prav tako je s tema kotoma (na sliki označena z α) skladen kot $\sphericalangle EBD$ in potemtakem je trikotnik DBE enakokrak. Zato je $|BE| = |DE| = \frac{2a}{3} = \frac{16}{3}$ cm. Torej je $|BE| = 2|EC|$ in trikotnik CEB je polovica enakostraničnega trikotnika. Sledi $\sphericalangle CBE = 30^\circ$. Torej je $\sphericalangle DBA = 30^\circ$ in je tudi trikotnik ABD polovica enakostraničnega trikotnika z višino $a = 8$ cm. Če označimo $d = |BD|$, mora zato veljati $8 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, kar nam da $d = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.



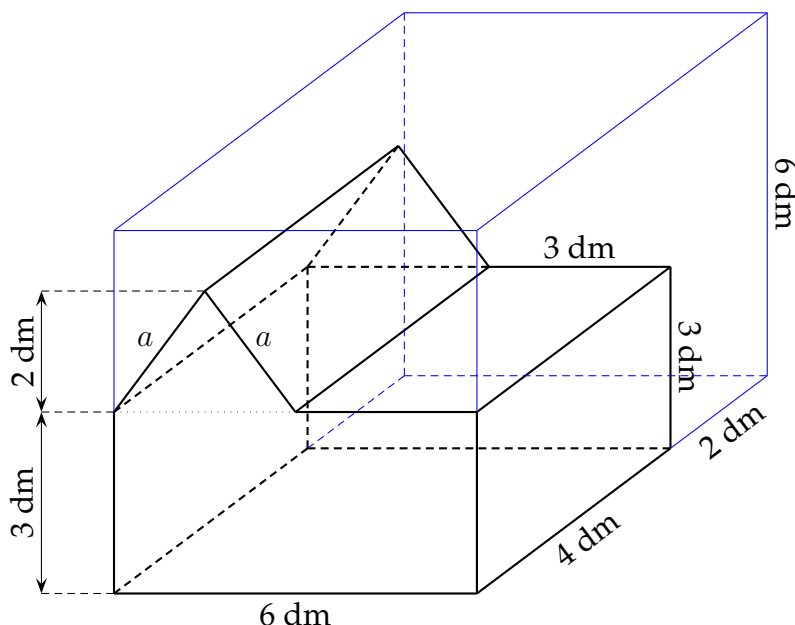
- Zapis ploščine trikotnika BCE je $\frac{|EC| \cdot b}{2}$ 1 točka**
Iznačitev z eno šestino ploščine pravokotnika 1 točka
Izračun $|EC| = \frac{8}{3}$ cm 1 točka
Utemeljitev, da je EBD enakokrak trikotnik 2 točki
Izračun $|BE| = \frac{16}{3}$ cm 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik ECB polovica enakostraničnega trikotnika ... 1 točka
Zapis velikosti kota $\sphericalangle CBE = 30^\circ$ 1 točka
Zapis diagonale z višino (a), npr. $a = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ 1 točka
Izračun diagonale $d = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ 1 točka

3. Točka M lahko leži na številski premici med točkama A in B , ali pa levo od A . V prvem primeru razdaljo med A in B (17 enot) razdelimo na $|AM| + |MB| = 3k + 14k = 17k = 17$. Zato je $k = 1$ in $|AM| = 3$. Koordinata točke M je 1, $M(1)$. Če točka M leži levo od točke A , je $|BM| = |AB| + |AM| = 17 + 3k = 14k$. Zato je $k = \frac{17}{11}$ in $|AM| = 4\frac{7}{11}$. Koordinata točke $M(-6\frac{7}{11})$.



Zapis $ AB = 17$	1 točka
Vsota razdalj $ AM + MB = 17$	1 točka
Upoštevanje razmerja razdalj: $3k + 14k = 17$	1 točka
Izračunan $k = 1$	1 točka
Možna koordinata $M(1)$	1 točka
Upoštevanje, da M lahko leži levo od A (lahko slika)	1 točka
Zapis vsote razdalj: $ AM + AB = BM $	1 točka
Upoštevanje razmerja: $3k + 17 = 14k$	1 točka
Izračun $k = \frac{17}{11}$	1 točka
Druška možna koordinata $M(-\frac{73}{11})$	1 točka

4. Kocka s stranico 6 dm ima prostornino 216 dm^3 . Zagozdo sestavljata kvader (6 dm, 4 dm in 3 dm) s prostornino 72 dm^3 in tristrana prizma, ki ima za osnovno ploskev enakokrak trikotnik z osnovnico 3 dm in višino na osnovnico 2 dm. Višina tristrane prizme je 4 dm in njena prostornina meri $3 \cdot 2 \cdot \frac{4}{2} = 12 \text{ dm}^3$. Prostornina zagozde je torej 84 dm^3 , kar predstavlja $\frac{84}{216} = \frac{7}{18}$ kocke, delež odpadka je potem $\frac{11}{18}$. Zagozda je prizma z osnovno ploskvijo iz pravokotnika in enakokrakega trikotnika s skupno ploščino $6 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 21 \text{ dm}^2$ in višino 4 dm. Obseg osnovne ploskve je $6 + 3 + 3 + 2a + 3 \text{ cm}$, a dobimo s pomočjo Pitagorovega izreka in meri $\frac{5}{2} \text{ cm}$. Obseg osnovne ploskve je torej 20 cm. Površina prizme pa $2 \cdot 21 + 20 \cdot 4 = 122 \text{ dm}^2 = 1.22 \text{ m}^2$. Ker za 1 m^2 porabimo 0.1 l barve, ga za premaz skupno potrebujemo 0.122 l.

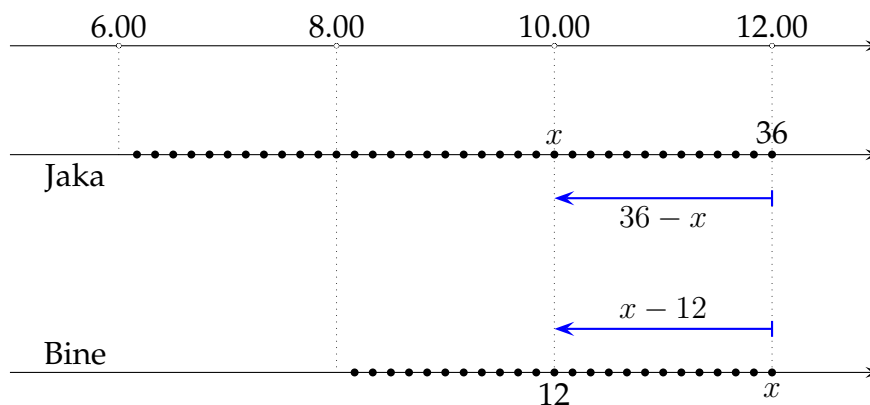


Prostornina kocke 216 dm^3	1 točka
Izračun neznane stranice $a = \frac{5}{2} \text{ dm}$	1 točka
Izračunana prostornina zagozde $72 \text{ dm}^3 + 12 \text{ dm}^3$	(1 + 2) točke
Izračunan delež odpadka $\frac{11}{18}$	2 točki
Izračunana površina 122 dm^2	2 točki

(V zadnjih treh alinejah točkovnika pripada po ena točka tekmovalcu, ki uporablja pravilen postopek računanja prostornine, deleža in površine, čeprav z napačnimi podatki.)

Rezultat: potrebujemo 0.122 l barve 1 točka

5. Jaka je imel ob 12.00 posajenih 36 dreves, Bine pa x . Pred nekaj časa je imel Jaka x posajenih dreves, Bine pa $\frac{36}{3} = 12$. Ker sta v vmesnem času posadila vsak enako število dreves, lahko zapišemo enačbo: $36 - x = x - 12$. Rešitev te enačbe $x = 24$, torej je imel Bine ob 12.00 posajenih 24 dreves. Ker je za vsakega porabil 10 minut, je skupaj delal 240 minut ali štiri ure in je moral začeti s sajenjem ob 8.00.



- Zapis števila posajenih dreves ob 12.00 ($36, x$) 1 točka**
Ugotovitev, da je v času, ko je imel Jaka x dreves, Bine imel 12 dreves .. 2 točki
Upoštevanje, da sta v vmesnem času zasadila enako število dreves 2 točki
Zapis enačbe: $36 - x = x - 12$ 2 točki
Rešitev $x = 24$ 1 točka
Izračunan čas sajenja dreves 4 ure 1 točka
Izračunan začetek sajenja 8.00 1 točka