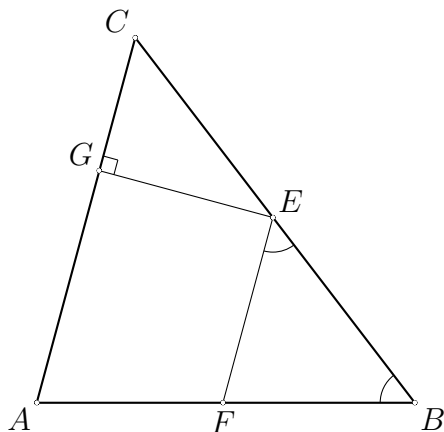


Rešitve za 7. razred

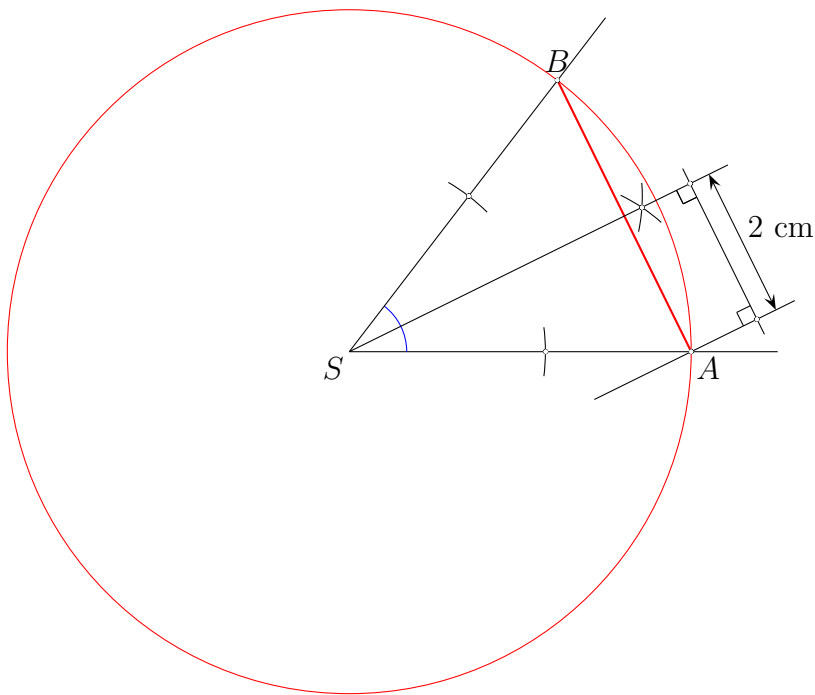
1. Označimo iskano število z x . Če to število odštejemo od 1 in dobljeno razliko pomnožimo s 3, dobimo število $(1 - x) \cdot 3$. Zmnožku prištejemo $\frac{2}{5}$, dobljeno vsoto pa delimo s $\frac{7}{10}$ in dobimo 2, kar lahko zapišemo z enačbo $\left((1 - x) \cdot 3 + \frac{2}{5}\right) : \frac{7}{10} = 2$. Rešitev te enačbe je $x = \frac{2}{3}$.

Zapisana razlika $1 - x$.	1 točka
Zapisan zmnožek $(1 - x) \cdot 3$.	1 točka
Zapisana vsota $(1 - x) \cdot 3 + \frac{2}{5}$.	1 točka
Zapisana enačba $\left((1 - x) \cdot 3 + \frac{2}{5}\right) : \frac{7}{10} = 2$.	2 točki
Množenje enačbe s $\frac{7}{10}$: $(1 - x) \cdot 3 + \frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{7}{10}$.	1 točka
Odštevanje $\frac{2}{5}$ na obeh straneh enačbe: $(1 - x) \cdot 3 = \frac{14}{10} - \frac{2}{5}$.	1 točka
Deljenje enačbe s 3: $1 - x = \frac{1}{3}$.	1 točka
Zapisana rešitev: $x = \frac{2}{3}$.	2 točki

2. V trikotniku ABC kot γ meri $\gamma = 90^\circ - 37^\circ 27' = 52^\circ 33'$. Trikotnik BFE je enakokrak z osnovnico BF , zato je kot $\sphericalangle EBF = \beta$ enak kotu $\sphericalangle BFE$. Daljica FE je vzporedna z daljico AC , torej je kot $\sphericalangle BFE$ enak kotu $\sphericalangle BAC = \alpha$. Od tod sledi, da je trikotnik ABC enakokrak. Velja $2 \cdot \alpha + 52^\circ 33' = 180^\circ$. Kot $\alpha = \beta = 63^\circ 43' 30''$.



Narisana skica	1 točka
Izračunan kot $\gamma = 52^\circ 33'$.	2 točki
Ugotovitev, da je kot $\sphericalangle EBF = \beta$.	1 točka
Ugotovitev: $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BAC$.	1 točka
Utemeljen sklep, da je trikotnik ABC enakokrak.	2 točki
Račun: $2 \cdot \alpha + 52^\circ 33' = 180^\circ$.	1 točka
$\alpha = \beta = 63^\circ 43' 30''$.	2 točki



Ugotovitev $52.5^\circ = 30^\circ + 22.5^\circ$	1 točka
Konstrukcija kota 60° in njegove simetrale.	2 točki
Konstrukcija kota 45° in njegove polovice 22.5°	1 točka
Narisan kot 52.5°	1 točka
Narisan pas.	1 točka
Točka na krožnici.	1 točka
Narisana krožnica.	1 točka
Zapisan postopek konstrukcije.	2 točki

Opomba: Če ni razvidno, kako je tekmovalec do posameznega koraka konstrukcije prišel, mu točka po točkovniku ne pripada.

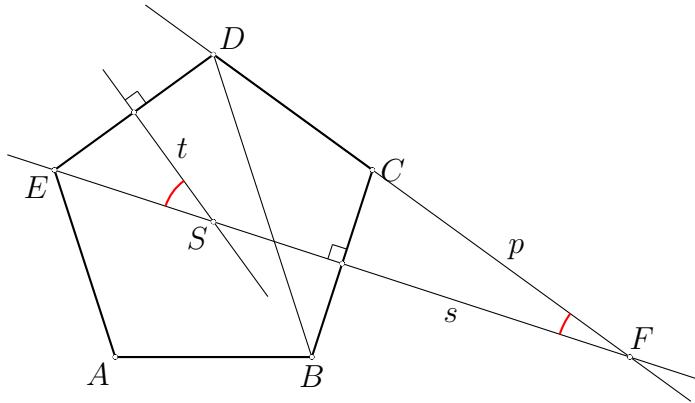
5. Označimo z x tretjino celotne najemnine. Tanja bo plačala $\frac{1}{4}$ svojega denarja, torej ima $4x$ denarja. Brina bo plačala $\frac{1}{3}$ svojega denarja, torej ima $3x$ denarja, Ana pa ima $2x$ denarja. Skupaj imajo $9x$ denarja. Vsaka bo plačala $261 : 9 = 29$ EUR, torej je najemnina za sobo 87 EUR.

Ugotovitev, da bo Tanja plačala $\frac{1}{4}$ svojega denarja.	2 točki
Sklep, da ima $4x$ denarja.	2 točki
Ugotovitev, da ima Brina $3x$ denarja.	2 točki
Ugotovitev, da ima Ana $2x$ denarja.	1 točka
Sklep, da imajo skupaj $9x$ denarja.	1 točka
Izračunan $x = 29$ EUR.	1 točka
Odgovor: Najemnina za sobo je 87 EUR.	1 točka

Opomba: Če tekmovalec pride do rešitve z deljenjem, $261:3=87$ in ne utemelji, da zneska 87 EURO oziroma 29 EURO ustrežata pogojem naloge, dobi kvečjemu 1 točko.

Rešitve za 8. razred

1. Notranji kot pravilnega petkotnika meri 108° . Trikotnik BCD je enakokrak, torej kot $\sphericalangle BCD$ meri $(180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Zunanji kot pravilnega petkotniku meri 72° , premica s je pravokotna na stranico BC , torej kot med premicama p in s meri $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Premica s je tudi simetrala notranjega kota, torej kot med premicama s in t meri $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$, saj je premica t pravokotna na stranico ED .



- Skica s pravilno narisanimi premicama p , s in t ter označenima kotoma. . 2 točki**
Ugotovitev, da je trikotnik BCD enakokrak. 1 točka
Upoštevanje velikosti notranjega kota, 108° ter izračunan kot $\sphericalangle CBD = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$ 2 točki
Ugotovitev, da zunanji kot meri 72° 1 točka
Upoštevanje, da je premica s pravokotna na BC , ter izračunan kot med premicama: $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ 2 točki
Upoštevanje, da simetrala s razdeli notranji kot na dva enaka dela. 1 točka
Izračunan kot med premicama s in t : $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$ 1 točka

2. Označimo z x število vprašanj iz posameznega dela, na katera je Lana pravilno odgovorila. Zbrala je celo število točk, saj ostalih vprašanj ni reševala. Torej je zbrala $4x + 5x + 6x = 15x$ točk, prav toliko pa jih je zbral tudi David. Imamo 3 možnosti za število pravih Davidovih odgovorov po posameznih delih: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5. V prvem primeru bi zbral: $1 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2.5 + 3 \cdot 6 - 2 \cdot 3$ točk, kar ni celo število, podobno pa velja tudi v tretjem primeru. Zato je edina možnost, da je David pravilno odgovoriti na 2 vprašanji iz prvega dela, 3 iz drugega in 4 iz tretjega. Skupaj je tako prejel: $2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2.5 + 4 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$. Torej jih je Lana zbrala 45. V vsakem delu je rešila tri naloge, skupno pa 9.

- Ugotovitev, da je Lana zbrala $15x$ točk. 1 točka**
Sklep, da sta oba zbrala celo število točk. 1 točka
Ugotovitev, da je David lahko po delih pravilno rešil: 1, 2, 3 ali 2, 3, 4 ali 3, 4, 5 odgovorov. 2 točki
Izračunano število točk v prvem primeru in izločitev le tega. 2 točki
Ugotovitev, da tudi v tretjem primeru število točk ni celo število. 1 točka
Izračunano število točk, ki jih je dosegel David. 1 točka
Sklep, da je Lana dosegla 45 točk. 1 točka

Odgovor: Lana je pravilno odgovorila na 9 vprašanj.1 točka

3. Količino peska označimo z x . Cena pred znižanjem je znašala $\frac{120}{x}$, po 30% znižanju pa $0.7 \cdot \frac{120}{x}$. Prav tako je znižana cena enaka $\frac{105}{x+1.25}$. Zapišemo enačbo $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$. Upoštevamo zakonitost o enakosti ulomkov in dobimo enačbo $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$, katere rešitev je $x = 5$. Torej je bila cena peska pred znižanjem 24 EUR.

Zapisana cena pred znižanjem: $\frac{120}{x}$1 točka

Ugotovitev, da je ta cena po znižanju enaka: $0.7 \cdot \frac{120}{x}$2 točki

Zapis znižane cene: $\frac{105}{x+1.25}$1 točka

Zapisana enačba: $0.7 \cdot \frac{120}{x} = \frac{105}{x+1.25}$1 točka

Upoštevanje zakonitosti o enakosti ulomkov in zapisana enačba $84 \cdot (x + 1.25) = 105 \cdot x$2 točki

Izračunana rešitev enačbe: $x = 5$2 točki

Odgovor: Cena pred znižanjem je bila 24 EUR.1 točka

4. 1. način

Velikost notranjega kota v pravilnem n -kotniku je: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, v $2n$ -kotniku pa: $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n}$. Razlika med drugim in prvim kotom je 6° , torej je potrebno rešiti enačbo: $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n} - 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = 6^\circ$. Levo stran enačbe preoblikujemo v $\frac{360^\circ}{n} - \frac{180^\circ}{n} = 6^\circ$ oziroma $\frac{180^\circ}{n} = 6^\circ$. Rešitev enačbe je $n = 30$.

Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem n -kotniku: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$2 točki

Zapis velikosti notranjega kota v pravilnem $2n$ -kotniku: $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n}$2 točki

Zapisana enačba: $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n} - 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = 6^\circ$2 točki

Preoblikovanje enačbe do enačbe: $\frac{180^\circ}{n} = 6^\circ$2 točki

Rešitev enačbe: $n = 30$2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

2. način

Nad vsako stranico pravilnega n -kotnika narišemo enakokraki trikotnik in tako dobimo pravilni $2n$ -kotnik. Koti tega enakokrakega trikotnika merijo 3° , 3° in α_{2n} , zato velja $6^\circ + \alpha_{2n} = 180^\circ$ oziroma $\alpha_{2n} = 174^\circ$. Notranji kot pravilnega $2n$ -kotnika izračunamo s formulo $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n} = 174^\circ$. Rešitev enačbe $\frac{360^\circ}{2n} = 6^\circ$ je $n = 30$.

Ugotovitev, da z risanjem enakokrakega trikotnika nad vsako stranico dobimo pravilni $2n$ -kotnik.2 točki

Koti tega trikotnika merijo: 3° , 3° in α_{2n}2 točki

Zapisana zveza $6^\circ + \alpha_{2n} = 180^\circ$ oziroma $\alpha_{2n} = 174^\circ$1 točka

Zapisana formula za velikost notranjega kota pravilnega n -kotnika.2 točki

Zapisana enačba $180^\circ - \frac{360^\circ}{2n} = 174^\circ$ oziroma $\frac{360^\circ}{2n} = 6^\circ$1 točka

Izračunana rešitev $n = 30$2 točki

Opomba: Za uganjeno in preverjeno rešitev dobi tekmovalec največ 6 točk. Za

sistematično poskušanje, brez utemeljitve, zakaj se razlike velikosti kotov manjšajo dobi tekmovalec največ 8 točk.

5. Datume v letu 2013 zapišemo s številom oblike $abcd13$, kjer je ab dan v mesecu, cd pa predstavlja mesec. Številka a je lahko 0, 1, 2 ali 3, b pa je lahko katerakoli številka (odvisno od a). Številka c je lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli številka (odvisno od c). Ker je produkt števk na lihih mestih enak produktu števk na sodih, velja zveza: $ac = 3bd$.

- Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$, saj d ne more biti hkrati s c enak 0. To pomeni vse datume v mesecih od januarja do septembra, ki se končajo z 0: 10, 20, 30, takih je skupaj $27 - 1 = 26$ (saj februarja ni 30. dne).
- Če je $c = 1$ (meseci od oktobra do decembra), je $a = 3bd$, torej je številka a deljiva s 3. Ločimo dve možnosti:
 - $a = 0$ (potem b ni 0), torej je tudi $d = 0$. To so vsi dnevi v oktobru od 1. do 9. oktobra, torej jih je 9.
 - $a = 3$, potem sta b in d oba enaka 1, kar bi pomenilo datum 31.11., ki pa seveda ne obstaja.

Posebnih dni je zato v letu 2013 skupaj 35.

Ugotovitev, da je številka a lahko samo 0, 1, 2 ali 3, b pa katerakoli številka odvisna od nje.	1 točka
Ugotovitev, da je številka c lahko samo 0 ali 1, d pa katerakoli številka odvisna od c.	1 točka
Zapisana zveza: $ac = 3bd$.	1 točka
Sklep: Če je $c = 0$, mora biti $b = 0$.	1 točka
Ugotovitev, da to pomeni vse datume od januarja do septembra, ki se končajo z 0, in da je le-teh 26.	1 točka
Sklep: Če je $c = 1$, je a lahko le 0 ali 3.	1 točka
Sklep: Če je $a = 0$, je tudi $d = 0$.	1 točka
Ugotovitev, da so to vsi datumi od 1. do 9. oktobra, torej jih je 9.	1 točka
Sklep: Če je $a = 3$, sta b in d oba enaka 1. Takega datuma pa ni.	1 točka
Odgovor: Posebnih dni v letu 2013 je 35.	1 točka

Rešitve za 9. razred

1. Označimo njihove starosti:

x ... Janova starost

y ... Rokova starost

z ... Lukova starost

Glede na to kako si razdelijo denar, lahko zapišemo razmerji $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$. Iz prvega razmerja izrazimo $y = \frac{3}{4}x$, iz drugega pa $z = \frac{7}{6}x$. Upoštevamo vsoto njihovih starosti in zapišemo enačbo: $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$, katere rešitev je $x = 12$. Izračunamo še $y = 9$ in $z = 14$. Razmerje med stroškom letovanja in vsoto njihovih starosti je 22. Odgovorimo: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR.

Zapisani razmerji starosti $x : y = 4 : 3$ in $x : z = 6 : 7$ 2 točki

Zapisana $y = \frac{3}{4}x$ in $z = \frac{7}{6}x$ 2 točki

Zapisana enačba $x + \frac{3}{4}x + \frac{7}{6}x = 35$ 2 točki

Rešitev enačbe $x = 12$ 1 točka

Izračunane starosti: 12 let, 9 let in 14 let. 1 točka

Ugotovitev, da je razmerje med stroški letovanja in vsoto starosti enako 22. ... 1 točka

Odgovor: Jan ima 12 let in je plačal 264 EUR, Rok ima 9 let in je plačal 198 EUR, Luka je star 14 let in je plačal 308 EUR. 1 točka

2. Členi, ki vsebujejo x , naj bodo na levi strani enačbe, ostalo pa na desni strani: $25x - xa^2 = a - 5$. Izpostavimo x na levi strani in dobimo: $x(25 - a^2) = a - 5$. Na levi strani enačbe drugi faktor razstavimo: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$. Delimo jo z $(5 - a)(5 + a)$ in dobimo $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$. Upoštevamo, da velja $a - 5 = -(5 - a)$, zato je rešitev enačbe $x = -\frac{1}{5+a}$, kjer je a različen od -5 in 5 . Obravnavamo enačbo za primera $a = -5$ oziroma $a = 5$. V prvem primeru, $a = -5$, dobimo: $x \cdot 0 = -10$, ta enačba pa nima rešitev. V drugem primeru, $a = 5$, dobimo enačbo $x \cdot 0 = 0$, ki jo reši vsako realno število.

Preoblikovanje dane enačbe v $25x - xa^2 = a - 5$ 1 točka

Izpostavljanje x na levi strani enačbe. 1 točka

Razstavljanje: $x(5 - a)(5 + a) = a - 5$ 1 točka

Deljene enačbe z $(5 - a)(5 + a)$ in zapis $x = \frac{a-5}{(5-a)(5+a)}$, kjer je a različen od -5 in 5 . 1 točka

Izpostavljanje -1 v števcu. 1 točka

Krajšanje ulomka in zapisana rešitev $x = -\frac{1}{5+a}$ 1 točka

Obravnava enačbe za $a = -5$ z ugotovitvijo, da ni rešitev. 2 točki

Obravnava enačbe za $a = 5$ z ugotovitvijo, da so rešitve vsa realna števila. 2 točki

3. a) Zapišemo: $a \heartsuit 2 = (a - 2) \cdot a$. Rešiti moramo enačbo: $a(a - 2) = -1$, ki jo preoblikujemo v $a^2 - 2a + 1 = 0$. Leva stran enačbe je popolni kvadrat, torej se enačba glasi: $(a - 1)^2 = 0$. Rešitev je $a = 1$.

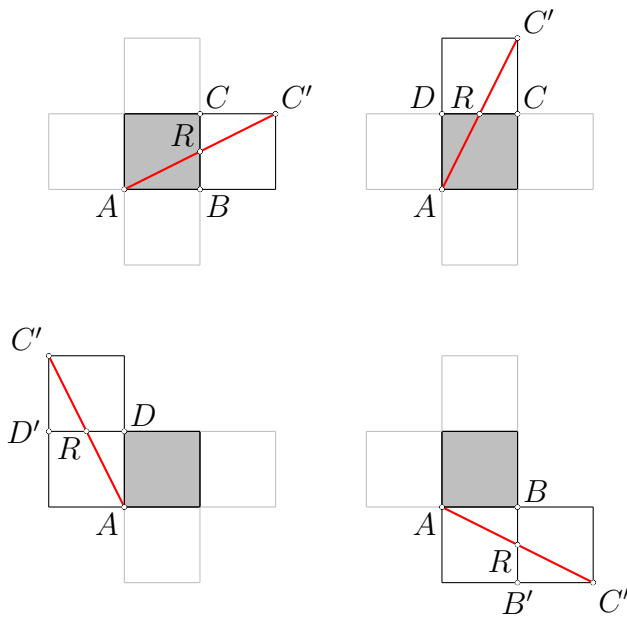
- b) Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$, velja če je: $(a - b) \cdot a = (b - a) \cdot b$. Odpravimo oklepaje in dobimo $a^2 - ab = b^2 - ab$, torej mora veljati $a^2 = b^2$. Enakost $a \heartsuit b = b \heartsuit a$ velja za vse pare enakih in nasprotnih realnih števil ($a = \pm b$).

Zapisana enačba: $a(a - 2) = -1$	1 točka
Zapisana preoblikovana enačba: $a^2 - 2a + 1 = 0$	1 točka
Ugotovitev, da je leva stran enačbe popolni kvadrat: $(a - 1)^2 = 0$	2 točki
Zapisana rešitev $a = 1$	1 točka
Ugotovitev, da velja $a \heartsuit 2 = (a - 2) \cdot a$, če velja $(a - b) \cdot a = (b - a) \cdot b$	1 točka
Odpravljeni oklepaji $a^2 - ab = b^2 - ab$	1 točka
Ugotovitev, da enakost velja, če velja $a^2 = b^2$	1 točka
Ugotovite, da enakost velja za $a = \pm b$	2 točki

4. Izračunamo ploščino celotnega trikotnika ABC , $p = \sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ cm², torej za kateti a in b velja $\frac{a \cdot b}{2} = 9\sqrt{2}$ cm² oziroma $a \cdot b = 18\sqrt{2}$ cm². S točko N označimo nožišče višine na hipotenuzo AB . Trikotnika NBC in NCA sta podobna z razmerjem ploščin $8 : 1$. Istoležne stranice so zato v razmerju $k = \frac{a}{b}$. Izrazimo $a = b\sqrt{8}$ in vstavimo v enačbo $a \cdot b = 18\sqrt{2}$. Dobimo enačbo $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$ z rešitvijo $b = 3$ cm, torej kateta a meri $a = 6\sqrt{2}$ cm. Dolžino hipotenuze c izračunamo s Pitagorovim izrekom in dobimo $c = 9$ cm.

Izračuna ploščina celotnega trikotnika ABC	1 točka
Zapisana zveza za kateti a in b : $a \cdot b = 18\sqrt{2}$	1 točka
Ugotovitev, da sta ploščini podobnih trikotnikov v razmerju $k^2 = 8$	1 točka
Sklep, da sta istoležni stranici v razmerju $k = \frac{a}{b} = \sqrt{8}$	1 točka
Zapisana zveza za kateti a in b : $a = b\sqrt{8}$	1 točka
Zapisana enačba: $b^2\sqrt{8} = \sqrt{18}$	1 točka
Izračunana rešitev $b = 3$ cm.	2 točki
Izračunana dolžina katete $a = 6\sqrt{2}$ cm.	1 točka
Izračunana dolžina hipotenuze $c = 9$ cm.	1 točka

5. a) Riba se nahaja v točki, ki je 3 dm oddaljena od oglišča A in 9 dm od oglišča B . Dolžino njene poti do hrane izračunamo iz $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$, kjer je x višina vode v decimetrih. Rešitev enačbe $\sqrt{225 + x^2} = 17$ je enaka $x = 8$. Izračunamo količino vode v akvariju $V = 12 \cdot 12 \cdot 8 = 1152$ dm³ = 1152 l.
- b) Označimo z R razpolovišče roba BB' . (Ena izmed štirih možnih) polževih najkrajših poti vodi iz oglišča A do točke R ter iz nje do oglišča C' . **Dokažimo**, da je ta pot res najkrajša. Če plašč kocke (brez ploskve $A'B'C'D'$) razgrnemo v ravnino, bo najkrajša pot med točkama A in C' po stenah akvarija kar najkrajša pot med točkama A in C' na mreži kocke (v ravnini). Ta razdalja je enaka $|AC'| = \sqrt{(|AB| + |BC|)^2 + |CC'|^2} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$ dm.



Dolžina polževe poti je $12\sqrt{5}$ dm. S P označimo razpolovišče roba AB , dolžina daljice PC' je enaka dolžini poti konjička. Dolžina $|PC'| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 12^2} = 18$ dm.

Opomba. Plašč akvarija lahko razgrnemo v ravnino na več kot 4 načine, najkrajše poti od A do C' pa so le 4 in te so narisane na zgornjih skicah. Dno akvarija je označeno z osenčenim kvadratom.

- Ugotovitev, kje se na robu AB se nahaja riba. 1 točka**
Zapisana enačba $\sqrt{9^2 + 12^2 + x^2} = 17$ 2 točki
Izračunana Rešitev enačbe $x = 8$ 1 točka
Odgovor: V akvariju je 1152 litrov vode. 1 točka
***Utemeljitev, kako poteka polževa pot. 2 točki**
Izračunana dolžina polževe poti, $12\sqrt{5}$ dm. 1 točka
Izračunana dolžina konjičkove poti, 18 dm. 2 točki

***Opomba.** V nalogi je potrebno v treh primerih poiskati najkrajšo razdaljo med dvema točkama. V dveh primerih lahko točki povežemo z daljico in očitno je, da je to tudi najkrajša pot med njima. V enem primeru pa je najkrajša pot sestavljena iz dveh daljic in **ni očitno**, katera pot je najkrajša. Tekmovalec **se mora zavedati**, da je to podrobnost potrebno dokazati.