50. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 12. april 2014

Rešitve za 7. razred

1.

$$\frac{\frac35}{1\frac15} + 3\frac38 \cdot 3\frac37 : \frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac12}}}{7\frac{5}{12}-5.75} - \frac{13}{14} = \frac{\frac35}{\frac65} + \frac{27}{8}\cdot\frac{24}{7} : \frac{2-\frac{1}{2-\frac{1}{\frac32}}}{7\frac{5}{12}-5\frac34} - \frac{13}{14} =$$

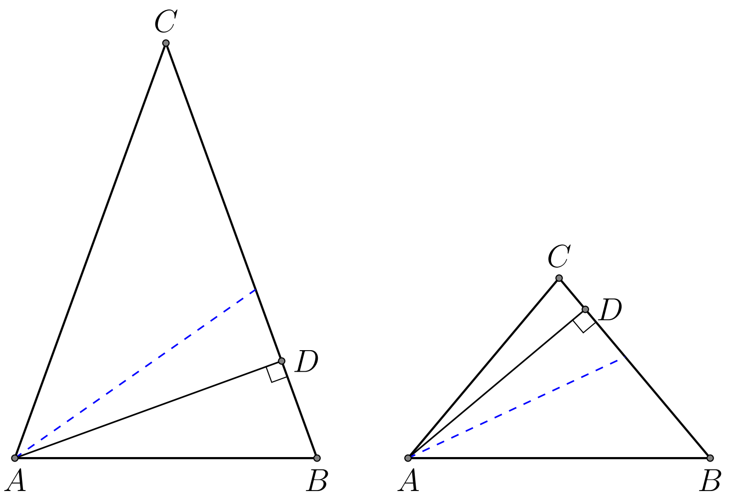
$$= \frac{3\cdot5}{5\cdot6} + \frac{27\cdot3}{1\cdot7} : \frac{2-\frac{1}{2-\frac23}}{7\frac{5}{12}-5\frac{9}{12}} - \frac{13}{14} = \frac12 + \frac{81}{7} : \frac{2-\frac{1}{\frac43}}{1\frac{8}{12}} - \frac{13}{14} =$$

$$= \frac12+\frac{81}{7} : \frac{2-\frac34}{\frac53} - \frac{13}{14} = \frac12 + \frac{81}{7} : \frac{\frac54}{\frac53} - \frac{13}{14} = \frac12+\frac{81}{7}:\frac34-\frac{13}{14}=$$

$$=\frac12+\frac{81}{7}\cdot\frac43-\frac{13}{14}=\frac12+\frac{108}{7}-\frac{13}{14}=\frac{7}{14}+\frac{216}{14}-\frac{13}{14}=\frac{210}{14}=15$$

Izračunana vrednost prvega člena: $\frac{\frac35}{1\frac15}=\frac12$. **. . . . . 1 točka**
Izračunan zmnožek faktorjev v drugem členu: $3\frac38\cdot3\frac37=\frac{81}{7}$. **. . . . . 1 točka**
Izračunan števec delitelja v drugem členu: $2-\frac{1}{2-\frac{1}{2-\frac12}}=\frac54$. **. . . . . 2 točki**
Zapis decimalnega števila z ulomkom: $5.75=5\frac34$. **. . . . . 1 točka**
Izračunan imenovalec delitelja v drugem členu: $7\frac{5}{12}-5\frac34=\frac53$. **. . . . . . 1 točka**
Izračunana vrednost delitelja v drugem členu: $\frac{\frac54}{\frac53}=\frac34$. **. . . . . 1 točka**
Izračunana vrednost drugega člena: $\frac{81}{7}:\frac34=\frac{108}{7}$. **. . . . . 1 točka**
Zapisan skupni imenovalec vseh treh členov: $\frac{7}{14}+\frac{216}{14}-\frac{13}{14}$. **. . . . . . . 1 točka**
Rezultat: $\frac{210}{14}=15$. **. . . . . 1 točka**

2. Upoštevamo dve možnosti: simetrala kota lahko leži nad višino na stranico a oziroma pod njo.



Trikotnik ABC je enakokrak z osnovnico AB, torej je kot z vrhom A skladen s kotom z vrhom B. Označimo ju z α. V prvem primeru so notranji koti trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika je $180°$: $\frac{\alpha}{2} - 15° + \alpha + 90° = 180°$. Torej je $\alpha = 70°$. V tem primeru je kot z vrhom C velik $40°$. Velikosti notranjih kotov trikotnika so $70°$, $70°$ in $40°$.

V drugem primeru so notranji trikotnika ABD enaki: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. Zopet upoštevamo, da je vsota velikosti notranjih kotov trikotnika enaka $180°$, in dobimo $\alpha = 50°$. Kot z vrhom C je velik $180° - 50° - 50° = 80°$. Notranji koti trikotnika so torej veliki $50°$, $50°$ in $80°$.

Narisani obe možnosti: simetrala nad višino, simetrala pod višino. ......2 točki
Sklep, da sta kota z vrhoma A in B skladna. ....1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v prvem primeru: $\frac{\alpha}{2} - 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Upoštevanje vsote velikosti notranjih kotov trikotnika. .... 1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 70°$. .... 1 točka
Izračunana velikost kota z vrhom C ter zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $70°$, $70°$ in $40°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABD v drugem primeru: $\frac{\alpha}{2} + 15°$, α in $90°$. ....1 točka
Izračunana velikost kota $\alpha = 50°$. .... 1 točka
Zapisane velikosti notranjih kotov trikotnika ABC: $50°$, $50°$ in $80°$. .... 1 točka

3. Število prodanih parov v januarju označimo s k, torej je januarski prihodek enak $48k$. Na februarskih razprodajah je bilo za 50% več prodanih parov, torej $1.5k$. Ceno para čevljev na razprodajah označimo z x in dobimo, da je prihodek v februarju enak $1.5k \cdot x$. Ker je bil februarja prihodek višji za $\frac{1}{4}$ glede na januar, velja $\frac{1}{4} \cdot 48k = 12k$. Sklepamo, da je bil prihodek februarja enak: $48k + 12k = 60k$. Izenačimo oba izraza za prihodek in dobimo enačbo: $1.5k \cdot x = 60k$. Enačbo delimo z $1.5k$ in dobimo rešitev $x = 40$. Torej je en par čevljev na razprodajah stal 40 EUR.

   Če želimo dobiti prvotno ceno enega para čevljev, jo je potrebno zvišati za 8 EUR. V odstotkih to pomeni $\frac{8}{40} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$

Zapis prihodka v januarju: $48k$. .... 1 točka
Ugotovitev števila prodanih parov čevljev na razprodaji: $1.5k$. .... 1 točka
Sklep o višini prihodka glede na ceno para čevljev v februarju x: $1.5k \cdot x$. 1 točka
Ugotovitev, da je bil prihodek v februarju višji za $12k$. .... 1 točka
Zapisana enačba: $1.5k \cdot x = 60k$. .... 2 točki
Izračunana rešitev enačbe: $x = 40$. .... 1 točka
Odgovor: En par čevljev je februarja stal 40 EUR. .... 1 točka
Sklep, da je ceno para čevljev potrebno zvišati za 8 EUR, kar pomeni $\frac{8}{40} = 20\%$. 2 točki

Opomba: reševanje izključno z izmišljenim številskim primerom prinese največ 5 točk.

4. Eno izmed petih zaporednih naravnih števil je deljivo s 5, najmanj dve izmed teh števil pa sta sodi. Torej je njihov zmnožek deljiv z 10, zato je bila na mestu enic zapisana števka 0. Poleg tega je zmnožek deljiv s 3, saj je med petimi zaporednimi števili vsaj eno deljivo s 3. Po kriteriju o deljivost s 3 je vsota števk števila $55s40$ deljiva s 3. Vsota števk je enaka $14 + s$, torej je števka na mestu stotic lahko enaka 1, 4 ali 7.

Med petimi zaporednimi naravnimi števili je eno zagotovo deljivo s 4, to pa pomeni, da je njihov zmnožek deljiv tudi z 8. Torej mora biti tromestni konec zmnožka deljiv z 8, kar velja le v primeru števila 55440. Dobljeno število je zmnožek števil 7, 8, 9, 10 in 11.

Ugotovitev, da je eno izmed petih zaporednih naravnih števil deljivo s 5. 1 točka
Ugotovitev, da sta najmanj dve izmed iskanih števil sodi. ....1 točka
Sklep, da je zmnožek deljiv z 10 in da na mestu enic stoji števka 0. ......1 točka
Ugotovitev, da je vsaj eno izmed iskanih števil deljivo s 3. ....1 točka
Sklep, da je zapisano število deljivo s 3 ter da na mestu stotic stoji 1, 4 ali 7. ..2 točki
Sklep, da je število deljivo z 8, saj je en faktor deljiv s 4. ....1 točka
Ugotovitev, da temu ustreza le 55440. ....1 točka
Zapis iskanih števil: 7, 8, 9, 10 in 11. ....2 točki

Opomba: Uganjena rešitev brez utemeljitve prinese največ 2 točki.

5. Razberemo, da je Neža poleg 32 minut porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki sta ga Tina in Ana pustili na razpolago Pii ter Neži. Seštevek Pijinih 88 minut ter Nežinih 32 minut je enak 120 minut, kar predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga prvi dve sestri nista porabili. Torej sta Tina in Ana ostalima dvema pustili 160 minut. Podobno je Ana porabila $\frac{1}{4}$ časa, ki ga Tina ni porabila, ter še dodatnih 32 minut. Potemtakem 192 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga je Tina pustila ostalim trem. Najstarejša hči ni porabila 256 minut. Za računalnikom je prebila $\frac{1}{4}$ časa, ki jim ga je namenila mama, ter dodatnih 32 minut. Sklepamo podobno kot prej: 288 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ skupnega časa. Mama je svojim hčeram namenila 384 minut. Iz tega lahko izračunamo čas za vsako izmed sester, ki ga je prebila za računalnikom. Tina $\frac{1}{4}$ od 384 minut ter 32 minut, torej 128 minut. Ana $\frac{1}{4}$ od 256 minut ter 32 minut, kar pomeni 96 minut. Neža je porabila $\frac{1}{4}$ od 160 minut ter 32 minut časa, skupaj 72 minut. Pia je porabila vseh preostalih 88 minut.

Ugotovitev, da 120 minut predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga Tina in Ana nista porabili. ..2 točki
Izračunan čas, ki sta prvi dve sestri pustili ostalima dvema: 160 minut. .1 točka
Sklep, da Aninih 32 minut ter 160 minut skupaj predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki ga Tina ni porabila. ....2 točki
Izračun časa, ki ga je Tina pustila mlajšim sestram: 256 minut. ....1 točka
Ugotovitev, da 256 minut skupaj s Tininimi 32 minutami predstavlja $\frac{3}{4}$ časa, ki jim ga je namenila mama. ....1 točka
Izračunan skupni čas, ki so ga lahko vse skupaj prebile za računalnikom: 384 minut. ....1 točka
Izračunani ter zapisani časi za vsako izmed sester: Tina je porabila 128 minut, Ana 96 minut, Neža 72 minut in Pia 88 minut. ....2 točki

Rešitve za 8. razred

1. Ločimo dve možnosti $|x-1|-5=3$ in $|x-1|-5=-3$. Prvo enačbo preoblikujemo v $|x-1|=8$ in dobimo dve enačbi:
$x-1=8$: rešitev te enačbe je $x=9$.
$x-1=-8$: v tem primeru je rešitev enačbe $x=-7$.
V drugem primeru enačbo preoblikujemo v enačbo $|x-1|=2$. Tokrat je potrebno rešiti naslednji enačbi:
$x-1=2$: rešitev je $x=3$.
$x-1=-2$ z rešitvijo $x=-1$.

Upoštevanje obeh možnosti: $|x-1|-5=3$ **in** $|x-1|-5=-3$ **. .... 2 točki**
Zapis ekvivalentne enačbe k prvi možnosti: $|x-1|=8$**. .... 1 točka**
Odprava absolutne vrednosti in upoštevanje dveh možnosti. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=8$**:** $x=9$**. .... 1 točka**
Zapisana rešitev enačbe $x-1=-8$**:** $x=-7$**. .... 1 točka**
Zapis enakovredne enačbe k drugi možnosti: $|x-1|=2$**. .... 1 točka**
Ponovno upoštevanje dveh možnosti. .... 1 točka
Zapisana rešitev enačbe $x-1=2$**:** $x=3$**. .... 1 točka**
Zapisana rešitev enačbe $x-1=-2$ **z rešitvijo** $x=-1$**. .... 1 točka**

2. 1. način
Označimo prvo število z a in drugo število z b. Vsako število, razen prvih dveh, je enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil. Torej imamo števila: a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ ter $3a+5b$. Njihova vsota je enaka $8a+12b$ oziroma $4(2a+3b)$. Vemo, da je peto število enako 14, torej velja $2a+3b=14$. Tako je vsota teh šestih števil enaka $4\cdot 14=56$.

Upoštevanje, da je vsako število, razen prvih dveh, enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil:
Zapisano tretje število: $a+b$**. .... 1 točka**
Zapis četrtega števila: $a+2b$**. .... 1 točka**
Zapis petega števila: $2a+3b$**. .... 1 točka**
Zapisano šesto število: $3a+5b$**. .... 1 točka**
Izračuna ter zapisana vsota vseh 6 **števil:** $8a+12b$**. .... 2 točki**
Izpostavljanje skupnega faktorja: $4(2a+3b)$**. .... 2 točki**
Sklep, da iz enakosti $2a+3b=14$ **sledi, da je vsota enaka:** $4\cdot 14=56$**. .... 2 točki**

Opomba: Uganjena rešitev brez utemeljitve prinese največ 2 točki.

2. način
Označimo prvo število z a in drugo število z b. Vsako število, razen prvih dveh, je enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil, peto število pa je enako 14. Torej imamo števila: a, b, $a+b$, $a+2b$, 14 ter $a+2b+14$. Za peto število velja $2a+3b=14$, kar pomeni, da je b sodo naravno število. Število b je lahko le 2 ali 4, sicer bi bila vsota $2a+3b$ večja od 14. Če je $b=2$, mora biti $a=4$. Torej dobimo števila: 4, 2, 6, 8, 14 in 22, katerih vsota je enaka 56. Če pa je $b=4$, mora biti $a=1$. V tem primeru dobimo števila: 1, 4, 5, 9, 14 in 23, katerih vsota je prav tako 56.

Upoštevanje, da je vsako število, razen prvih dveh, enako vsoti dveh predhodno zapisanih števil:
Zapisano tretje število: $a + b$**. . . . . 1 točka**
Zapis četrtega števila: $a + 2b$**. . . . . 1 točka**
Zapisano šesto število: $a + 2b + 14$**. . . . . 1 točka**
Zapisana enakost za peto število: $2a + 3b = 14$**. . . . . 1 točka**
Sklep in utemeljitev, da je b lahko le 2 **ali** 4**. . . . . 2 točki**
Obravnava možnosti $b = 2$ **z zapisanimi števili in izračunano vsoto** 56**. . . . 2 točki**
Obravnava možnosti $b = 4$ **z zapisanimi števili in izračunano vsoto** 56**. . . . 2 točki**

3. Z večjim bagrom izkopljejo v eni uri $\frac{1}{12}$ jame. Ker je bilo delo končano v 8 urah, so z večjim bagrom izkopali $\frac{8}{12}$ oziroma $\frac{2}{3}$ jame. Preostalo $\frac{1}{3}$ jame so izkopali z manjšima bagroma. S prvim manjšim bagrom so delali 6, z drugim pa 4 ure, skupaj torej 10 delovnih ur za $\frac{1}{3}$ jame. To pomeni, da bi v eni uri z vsakim izmed manjših bagrov izkopali $\frac{1}{30}$ jame. Če bi izkopavali le z enim manjšim bagrom, bi izkop jame trajal 30 ur.

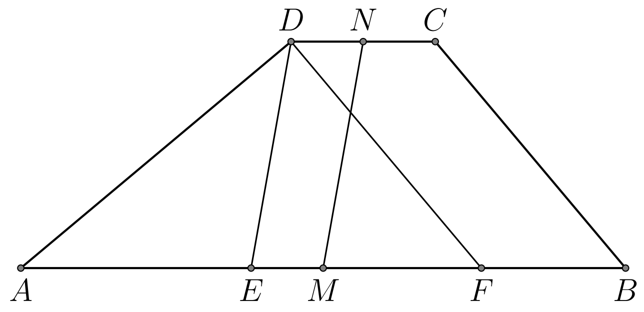
Ugotovitev, da z večjim bagrom vsako uro izkopljejo $\frac{1}{12}$ **jame. . . . . 1 točka**
Sklep, da so z večjim bagrom izkopali $\frac{2}{3}$ **jame. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da so z manjšima bagroma skupaj izkopali $\frac{1}{3}$ **jame. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da so s prvim manjšim bagrom delali 6**, z drugim pa** 4 **ure. . . 2 točki**
Sklep, da so z obema manjšima bagroma skupaj v 10 **urah izkopali** $\frac{1}{3}$ **jame. . . . 1 točka**
Sklep, da bi z vsakim od njiju v eni uri izkopali $\frac{1}{30}$ **jame. . . . . 2 točki**
Odgovor: Z manjšim bagrom bi izkopali jamo v 30 **urah. . . . . 2 točki**

4. Število odvzetih frnikol iz prve posode označimo z x. Iz druge posode smo vzeli $2x$ frnikol, iz tretje $3x$, četrte $4x$ in tako naprej. Skupno smo odvzeli $x+2x+3x+\cdots+10x$ frnikol oziroma $55x$. V deseti posodi je ostala le 1 frnikola, torej je bila na začetku v tej posodi $10x + 1$ frnikola. Ker je bilo v vsaki izmed posod enako število frnikol, je bilo skupno število vseh frnikol enako $10 \cdot (10x + 1)$. Ostalo jih je 370, torej je potrebno rešiti enačbo: $10 \cdot (10x + 1) - 55x = 370$, katere rešitev je $x = 8$. V vsaki posodi je bilo na začetku 81 frnikol.

Zapisana števila odvzetih frnikol iz posamezne posode: x, $2x$, $3x$ **. . .** $10x$**. 2 točki**
Izračunano skupno število odvzetih frnikol: $55x$**. . . . . 1 točka**
Sklep, da je bila v deseti posodi $10x + 1$ **frnikola. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da je bilo v vseh posodah skupaj $10 \cdot (10x + 1)$ **frnikol. . . . . . . 1 točka**
Zapisana enačba: $10 \cdot (10x + 1) - 55x = 370$**. . . . . 2 točki**
Izračunana rešitev enačbe: $x = 8$**. . . . . 2 točki**
Izračunano število frnikol v posamezno posodi, torej 81 **frnikol. . . . . 1 točka**

Opomba: če tekmovalec rešuje nalogo s poskušanjem in pri tem ne preveri čisto vseh možnosti, prejme največ 7 točk.

5. Narišimo skico



Označimo kota ob daljši osnovnici trapeza $ABCD$: $\sphericalangle BAD = \alpha$ in $\sphericalangle CBA = \beta$. Razpolovišči osnovnic označimo s točkama M in N. Vzporednica k daljici MN skozi točko D seka osnovnico AB v točki E. Vzporednica k daljici BC skozi točko D seka osnovnico AB v točki F. Ker je točka M razpolovišče daljše osnovnice a, velja $|MB| = \frac{\alpha}{2}$. Daljici EM in ND sta enako dolgi, in sicer je $|EM| = \frac{c}{2}$, saj je točka N razpolovišče osnovnice c. Torej velja $|AE| = a - \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Trikotnik AED je enakokrak z osnovnico AD, saj iz besedila in skice razberemo: $|DE| = |MN| = \frac{a-c}{2} = |AE|$. Od tod sledi $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADE = \alpha$. Trikotnik EFD je enakokrak z osnovnico FD, saj je dolžina stranice EF enaka $|EF| = a - c - \frac{a-c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Torej velja $\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF = \beta$. Velikosti notranjih kotov trikotnika AFD so α, β in $\alpha + \beta$, vsota velikosti pa je $2\alpha + 2\beta = 180°$. Vsota velikosti kotov ob daljši osnovnici trapeza je torej enaka $90°$.

Narisana skica z označeno zveznico razpolovišč obeh osnovnic. .... 1 točka
Ugotovitev, da je dolžina daljice MN je enaka $\frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Izračunana dolžina daljice AE: $|AE| = \frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Sklep, da je trikotnik AED enakokrak z osnovnico AD. .... 1 točka
Sklep, da za dva notranja kota trikotnika AED velja: $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADE = \alpha$. ....1 točka
Izračunana dolžina daljice EF: $|EF| = \frac{a-c}{2}$. .... 1 točka
Sklep, da je trikotnik EFD enakokrak z osnovnico FD. ....1 točka
Sklep, da za dva notranja kota trikotnika EFD velja: $\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF = \beta$. ....1 točka
Ugotovitev, da v trikotniku AFD velja $2\alpha + 2\beta = 180°$. .... 1 točka
Vsota kotov ob daljši osnovnici trapeza je enaka $\alpha + \beta = 90°$. .... 1 točka

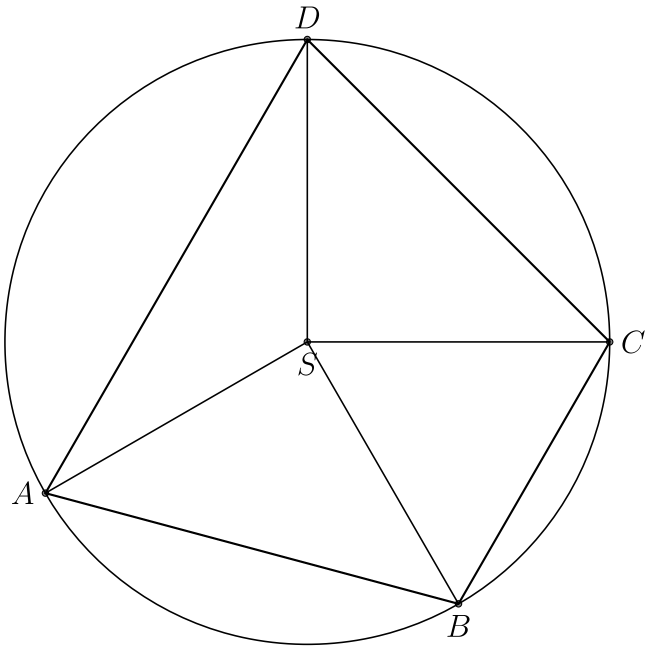
Opomba: če tekmovalec izhaja iz napačne predpostavke, da je trapez enakokrak, dobi največ dve točki. Prav tako dobi največ 2 točki v primeru, da napačno predpostavi, da je zveznica razpolovišč osnovnic višina trapeza.

Rešitve za 9. razred

1. Število vseh učencev na šoli označimo z n. Iz prvega razmerja razberemo, da je bilo število učencev pri posamezni dejavnosti na začetku šolskega leta enako: $\frac{3n}{12} = \frac{n}{4}$, $\frac{4n}{12} = \frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{12}$. Iz drugega razmerja sledi, da je bilo število učencev pri posamezni dejavnosti ob koncu šolskega leta enako $\frac{7n}{18}$, $\frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{18}$. Opazimo, da je bilo pri prvi dejavnosti več učencev, pri drugi enako, pri tretji pa manj kot na začetku leta. Torej je bilo v tretji dejavnosti ob koncu šolskega leta 40 učencev manj, zato velja enačba: $\frac{5n}{12} - \frac{5n}{18} = 40$. Rešitev enačbe je $n = 288$. Na šoli je bilo 288 učencev.

Upoštevanje prvega razmerja ter zapis števil učencev po dejavnostih: $\frac{3n}{12} = \frac{n}{4}$, $\frac{4n}{12} = \frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{12}$. .... 3 točke
Zapis števil učencev po dejavnostih ob koncu leta: $\frac{7n}{18}$, $\frac{n}{3}$ in $\frac{5n}{18}$. .... 2 točki
Ugotovitev, da je pri prvi dejavnosti več, pri drugi enako, pri tretji pa manj učencev kot na začetku. .... 2 točki
Zapisana enačba za število učencev v tretji dejavnosti: $\frac{5n}{12} - \frac{5n}{18} = 40$. .... 2 točki
Rešitev enačbe in odgovor: Na šoli je bilo 288 učencev. .... 1 točka

2. Narišimo skico



Iz danih velikosti kotov izračunamo velikost kota $\sphericalangle DSA$, in sicer $120°$. Daljici AB in CD sta enako dolgi, saj sta diagonali kvadrata s stranico dolžine 4 cm: $|AB| = |CD| = 4\sqrt{2}$ cm. Trikotnik BCS je enakostraničen, torej velja: $|BC| = 4$ cm. Trikotnik ASD je enakokrak z osnovnico AD, torej ga višina na stranico AD razpolavlja na dva skladna dela. Vsak del je enak polovici enakostraničnega trikotnika z višino enako $\frac{|AD|}{2}$, zato velja $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ cm. Obseg štirikotnika $ABCD$ je torej enak: $o = 4\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 4 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ cm. Vsota ploščin obeh pravokotnih trikotnikov ABS in CDS je enaka ploščini kvadrata s stranico dolžine 4 cm, torej 16 cm^2. Ploščina enakostraničnega trikotnika BCS je enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. Prav tako je ploščina trikotnika

ASD enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. Ploščina štirikotnika $ABCD$ je zato enaka: $p = 16 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = (16 + 8\sqrt{3})$ cm^2.

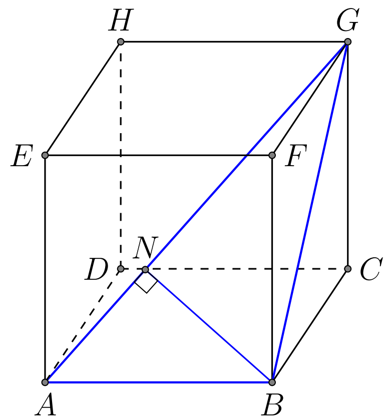
Izračunana velikost kota $\sphericalangle DSA$: $120°$. .... 1 točka
Ugotovitev, da sta daljici AB in CD enako dolgi kot diagonali kvadrata s stranico dolžine 4 cm ter zapisani njuni dolžini: $4\sqrt{2}$ cm. .... 1 točka
Sklep: $|BC| = 4$ cm, saj je BC stranica enakostraničnega trikotnika. .... 1 točka
Ugotovitev, da višina na stranico AD razpolavlja trikotnik ASD na dva skladna dela, ki sta polovici enakostraničnega trikotnika. .... 1 točka
Sklep, za daljico AD velja: $|AD| = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ cm. .... 1 točka
Izračunan obseg štirikotnika $ABCD$: $o = 4 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ cm. .... 1 točka
Ugotovitev, da je vsota ploščin obeh trikotnikov ABS in CDS enaka ploščini kvadrata s stranico dolžine 4 cm, torej 16 cm^2. .... 1 točka
Izračunana ploščina enakostraničnega trikotnika BCS: $4\sqrt{3}$ cm^2. .... 1 točka
Ugotovitev, da je ploščina trikotnika ASD enaka $4\sqrt{3}$ cm^2. .... 1 točka
Izračunana ploščina štirikotnika $ABCD$: $p = 16+2\cdot4\sqrt{3} = (16+8\sqrt{3})$ cm^2. 1 točka

Zadnje štiri alineje v točkovniku imajo alternativno možnost:
Utemeljitev, da je $ABCD$ trapez. .... 1 točka
Izračunana višina trapeza $(2 + 2\sqrt{3})$ cm .... 2 točki
Izračunana ploščina trapeza ....1 točka.

3. Vseh 19 znanih podatkov uredimo po velikosti: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6. Mediana teh podatkov je vrednost na desetem mestu in je enaka 3. Modus teh podatkov je enak 2. Če bi bil $x \leq 3$, bi bila mediana vseh dvajsetih podatkov še vedno enaka 3, modus pa 2, kar ne ustreza zahtevam naloge. Torej je x lahko enak le 4 ali 5. V obeh primerih je mediana enaka 3.5. Če bi bil $x = 4$, bi imeli podatki dva modusa: 2 in 4, kar ne ustreza pogojem naloge. Edina možnost je, da je $x = 5$, saj je v tem primeru modus enak 2. Izračunamo še aritmetično sredino vseh podatkov. Ta je enaka: $\overline{x} = \frac{2\cdot1+5\cdot2+3\cdot3+4\cdot4+3\cdot5+3\cdot6}{20} = \frac{70}{20} = 3.5$.

Zapis podatkov po velikosti. .... 1 točka
Ugotovitev, da je mediana znanih podatkov enaka 3, modus pa 2. ....2 točki
Sklep, da je $x > 3$, saj bi bila sicer mediana vseh dvajsetih podatkov enaka 3, modus pa 2. ....2 točki
Zapisana mediana v primeru, če je x enak 4 ali 5: $Me = 3.5$. ....1 točka
Ugotovitev, da x ne sme biti enak 4, saj bi sicer nastopila dva modusa. . 1 točka
Sklep, da je $x = 5$, saj je v tem primeru modus enak 2. .... 1 točka
Izračunana aritmetična sredina vseh podatkov: $\overline{x} = 3.5$ ....2 točki

4. Narišimo skico



Stranico kocke označimo z a. Presečišče telesne diagonale AG in pravokotnice na njo iz oglišča B pa označimo z N. Iz besedila razberemo, da je dolžina daljice BN enaka 7 cm. Telesna diagonala kocke je dolga $a\sqrt{3}$ cm, ploskovna pa $a\sqrt{2}$ cm. Torej za stranice trikotnika ABG velja: $|AB| = a$, $|BG| = a\sqrt{2}$ in $|AG| = a\sqrt{3}$. Ker je daljica BN višina trikotnika ABG na stranico AG, je njegova ploščina enaka: $p = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$. Vemo, da je trikotnik ABG pravokoten s katetama dolžine a in $a\sqrt{2}$, torej lahko njegovo ploščino zapišemo tudi kot $p = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Izenačimo oba izraza za ploščino in dobimo: $a = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm. Površina kocke je enaka $P = 6a^2 = 441$ cm^2, prostornina pa $V = a^3 = \frac{1029\sqrt{6}}{4}$ cm^3.

Definicija točke N ter zapisana dolžina daljice BN: 7 cm. ....1 točka
Ugotovitev dolžin stranic trikotnika ABG: $|AB| = a$, $|BG| = a\sqrt{2}$ in $|AG| = a\sqrt{3}$. 2 točki
Sklep, da je daljica BN višina trikotnika ABG na stranico AG, ter izračunana ploščina: $p = \frac{7a\sqrt{3}}{2}$. ....1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik ABG pravokoten s ploščino: $p = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. ....2 točki
Izračunana dolžina stranice a: $a = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm. ....1 točka
Izračunana površina kocke: $P = 6a^2 = 441$ cm^2. ....1 točka
Izračunana prostornina kocke ter racionaliziran rezultat: $V = a^3 = \frac{1029\sqrt{6}}{4}$ cm^3...2 točki

5. Izračunamo: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, in $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. Imenovalce dobljenih rezultatov lahko zapišemo kot produkt dveh zaporednih števil. Torej velja: $\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3\cdot 4}$ in $\frac{1}{20} = \frac{1}{4\cdot 5}$, kar je razvidno tudi iz enakosti $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Vsak člen izraza $\frac{1}{2000\cdot 2001} + \frac{1}{2001\cdot 2002} + \frac{1}{2002\cdot 2003} + \frac{1}{2003\cdot 2004} + \ldots + \frac{1}{2998\cdot 2999} + \frac{1}{2999\cdot 3000}$ zamenjamo z razliko dveh ulomkov in dobimo: $\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002} + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003} + \ldots + \frac{1}{2998} - \frac{1}{2999} + \frac{1}{2999} - \frac{1}{3000}$. Vsi členi razen prvega in zadnjega se odštejejo in ostane: $\frac{1}{2000} - \frac{1}{3000} = \frac{3-2}{6000} = \frac{1}{6000}$.

Izračunane vrednosti prvih štirih računov. ....2 točki
Vrednost petega izraza: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. ....2 točki
Uporaba enakosti $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ v šestem primeru. ....2 točki
Ugotovitev, da se vsi členi razen prvega in zadnjega odštejejo. ....2 točki
Upoštevanje skupnega imenovalca. ....1 točka

Izračunana vrednost izraza: $\frac{1}{6000}$. .... 1 točka