# 51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

## Državno tekmovanje, 18. april 2015

## Rešitve za 7. razred

**1.** Računajmo:

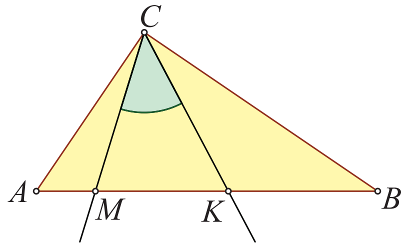
$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4=\\
&=\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{7}{3}}\right)\right)\cdot 4=\\
&=(7-1)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{1}{7}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(3+\frac{3}{7}\right)\right)\cdot 4=\\
&=6\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{24}{7}\right)\cdot 4=2-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{24}\right)\cdot 4=2-\frac{1}{4}\cdot 4=1
\end{aligned}
$$

**Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$. ........................................ 1 točka**
**Izračunane vrednosti $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$. ........................................ 1 točka**
**Izračunani vsi štirje dvojni ulomki. ........................................ 2 točki**
**Izračunana vrednost prvega člena: $2$. ........................................ 1 točka**
**Izračunana vrednost prvega količnika v drugem členu: $\frac{6}{7}$. .................. 2 točki**
**Izračunana vrednost vsote obeh dvojnih ulomkov v drugem členu: $\frac{7}{24}$. .... 1 točka**
**Izračunan prvi faktor v drugem členu: $\frac{1}{4}$. ........................................ 1 točka**
**Izračunana vrednost izraza: $1$. ........................................ 1 točka**

**2.** Leto $2014$ je imelo $365$ dni, saj ni prestopno. Število vseh dni označenih s številom, ki je deljivo s tri je enako $\frac{1}{3}$ od $365$, torej $121$. V teh dnevih je Miha privarčeval $121 \cdot 0.3$ EUR $=$ $36.3$ EUR. Število vseh dni, ki jim pripada sodo število, je enako $182$. Pri tem je potrebno izvzeti dneve, ki jim pripada število deljivo s šest, takih je $\frac{1}{6}$, torej $60$. Število dni, ko je Miha dal v hranilnik $20$ centov, je enako $122$ $(182 - 60 = 122)$. Skupno je v teh dnevih privarčeval $122 \cdot 0.2$ EUR $= 24.4$ EUR. Ostanejo le še dnevi, ko je dal v hranilnik $10$ centov, število le-teh je enako $365 - 121 - 122 = 122$. V teh dnevih je Miha privarčeval $12.2$ EUR. Torej je v celem letu $2014$ privarčeval $36.3 + 24.4 + 12.2 = 72.9$ EUR.

**Ugotovitev, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik $30$ centov, enako $121$. 2 točki**
**Izračun števila vseh dni s sodo oznako. ....................................1 točka**
**Ugotovitev, da je potrebno izvzeti dneve s števili, ki so deljiva s $6$. ......... 2 točki**
**Sklep, da je število vseh dni, ko je dal v hranilnik $20$ centov, enako $122$. ....1 točka**
**Sklep, da je število dni, ki ustrezajo tretji lastnosti, enako $122$.. ............. 2 točki**
**Izračunan končni znesek privarčevanega denarja. ..........................2 točki**

**3.** Označimo kota v trikotniku $ABC$: $\sphericalangle BAC = \alpha$ in $\sphericalangle CBA = \beta$.




Razberemo, da je trikotnik $MBC$ enakokrak z osnovnico $MC$. Torej sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. Kot $\sphericalangle CBM$ je enak kotu $\beta$, zato je velikost kota $\sphericalangle BMC$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180° - \beta)$. Podobno velja za trikotnik $AKC$, ki je enakokrak z osnovnico CK in v katerem sta kota $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$ skladna. Kot $\sphericalangle KAC = \alpha$, torej je velikost kota $\sphericalangle CKA$ enaka $\frac{1}{2} \cdot (180° - \alpha)$. Velikost kota $\sphericalangle MCK$ je enaka $180° - \sphericalangle BMC - \sphericalangle CKA$. Upoštevamo, kar smo že izpeljali in dobimo: $180° - \frac{1}{2} \cdot (180° - \beta) - \frac{1}{2} \cdot (180° - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. Vemo, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita $90°$. Torej je velikost kota $\sphericalangle MCK$ enaka: $\frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.

Enako velja, če obrnemo orientacijo trikotnika ali če je kateta $a$ krajša od obeh katet.

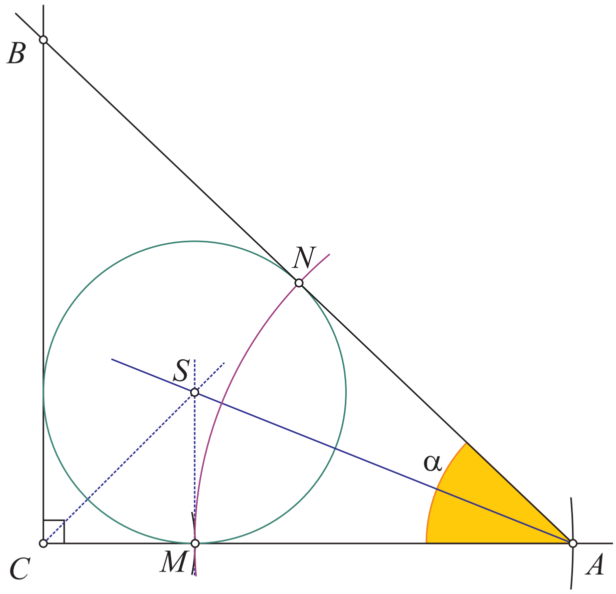
**Narisana skica z označenima točkama $K$ in $M$. .............................. 1 točka**
**Ugotovitev, da je trikotnik $MBC$ enakokrak. .................................. 1 točka**
**Sklep, da sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. .............................. 1 točka**
**Zapisana velikost kota $\sphericalangle BMC$. .............................................. 1 točka**
**Ugotovitev, da je trikotnik $AKC$ enakokrak s skladnima kotoma $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$. 1 točka**
**Zapisana velikost kota $\sphericalangle CKA$. .............................................. 1 točka**
**Zapisana velikost kota $\sphericalangle MCK = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$. ................................ 2 točki**
**Upoštevanje, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita $90°$ ter izračunana velikost kota $\sphericalangle MCK = 45°$. .............................................. 2 točki**

**4.** Število $5b3$ je deljivo s $3$, kar pomeni, da je seštevek števk deljiv s $3$. Torej je števka $b$ lahko $1$, $4$ ali $7$. Obravnavajmo vse tri možnosti. Če je $b = 1$, velja $2a4 + 329 = 513$. Izračunamo $2a4$ in dobimo $513 - 329 = 184$. Ta rešitev ne ustreza. Če je $b = 4$, je razlika $2a4$ enaka $543 - 329 = 214$. Torej je števka $a$ enaka $1$. V zadnjem primeru je $b = 7$. Razlika $2a4$ je enaka $573 - 329 = 244$ in števka $a$ je enaka $4$.

**Upoštevanje kriterija za deljivost s** $3$**. ........................................1 točka**
**Zapisane vse tri možnosti za števko** $b$**.......................................2 točki**
**Obravnavna možnost, če je** $b = 1$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 184$**. .2 točki**
**Obravnavna možnost, če je** $b = 4$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 214$**. . 2 točki**
**Obravnavna možnost, če je** $b = 7$ **in izračunana vrednost razlike** $2a4 = 244$**. . 2 točki**
**Sklep, da sta edini možni vrednosti za števko** $a$**:** $1$ **in** $4$**. .....................1 točka**

**5.** Postopek:

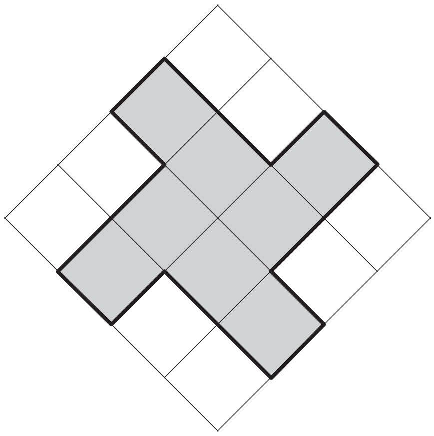
1. Konstruiramo pravi kot in označimo oglišče $C$.
2. S šestilom iz točke $C$ odmerimo 7 cm in dobimo točko $A$.
3. Na kraku $AC$ pravega kota iz točke $C$ s šestilom odmerimo 2 cm in dobimo točko $M$, ki je dotikališče stranice $AC$ z včrtano krožnico.
4. Konstruiramo simetralo pravega kota.
5. Skozi točko $M$ konstruiramo vzporednico $p$ drugemu kraku pravega kota.
6. Presek simetrale pravega kota in premice $p$ je središče trikotniku včrtane krožnice, točka $S$.
7. Narišemo poltrak $AS$, ki je po definiciji simetrala notranjega kota trikotnika z vrhom v točki $A$.
8. Točko $M$ prezrcalimo čez nosilko daljice $AS$ in dobimo točko $N$. Dobljena točka je dotikališče iskane stranice $AB$ in včrtane krožnice.
   Utemeljitev: trikotnika $SAM$ in $SAN$ sta skladna, ker leži daljica $AS$ na simetrali kota $\sphericalangle NAM = \alpha$ . Kota $\sphericalangle SAM$ in $\sphericalangle NAS$ sta skladna, torej je poltrak $AS$ simetrala kota $\sphericalangle NAM = \alpha$.
9. Presečišče poltraka $AN$ z drugim krakom pravega kota označimo s točko $B$ in dobili smo trikotnik $ABC$, saj velja $\sphericalangle NAM = \alpha$.




**Konstrukcija pravega kota. .................................................... 1 točka**
**Odmerjeni točki $A$ in $M$. ...................................................... 1 točka**
**Konstrukcija simetrale pravega kota. ...........................................1 točka**
**Konstrukcija vzporednice in oznaka središča trikotniku včrtane krožnice. . 2 točki**
**Sklep, da je poltrak $AS$ simetrala kota z vrhom v točki $A$. ................... 1 točka**
**Zrcaljenje točke $M$ čez nosilko daljice $A$. ....................................1 točka**
**Utemeljitev, da je dobljena točka $N$, dotikališče iskane stranice in včrtane krožnice. 2 točki**
**Označeno presečišče poltraka $AN$ in drugega kraka pravega kota ter trikotnik $ABC$. ................................................................. 1 točka**

## Rešitve za 8. razred

**1.** Lik lahko prekrijemo z $8$ skladnimi kvadratki, kot je prikazano na sliki.



Ploščina enega takega kvadratka meri $200\ \text{cm}^2 : 8 = 25\ \text{cm}^2$, torej je njegova stranica dolga $5$ cm. Krajša stranica danega lika tako meri $5$ cm, daljša pa $10$ cm. Obseg lika je enak $8 \cdot 5\ \text{cm} + 4 \cdot 10\ \text{cm} = 80$ cm.

**Ugotovitev, da lik lahko prekrijemo z $8$ skladnimi kvadratki. .................. 2 točki**
**Izračunana ploščina enega takega kvadratka. ................................ 2 točki**
**Izračunana stranica kvadratka. ................................................ 2 točki**
**Sklep o dolžinah krajše in daljše stranice lika. ............................... 2 točki**
**Izračunan obseg lika. ........................................................ 2 točki**

**2.** Izračunajmo:

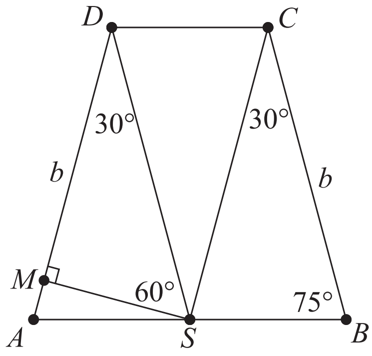
$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(-2)^{12}\cdot\left(\frac{(-2)^3\cdot(-2)^4}{(-2)^2\cdot(-2)^7}\right)^3}+\sqrt{(2\cdot 3)^4+(3^2)^3}+13\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}+1}:\frac{1}{\sqrt{8}-1}=\\
=\;&\sqrt{2^{12}\cdot\left(\frac{(-2)^7}{(-2)^9}\right)^3}+\sqrt{2^4\cdot 3^4+3^6}+13\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{8}-1}{1}=\\
=\;&\sqrt{2^{12}\cdot\left(\frac{1}{(-2)^2}\right)^3}+\sqrt{3^4(2^4+3^2)}+13\cdot\frac{(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{8}-1}{1}=\\
=\;&\sqrt{\frac{2^{12}}{2^6}}+\sqrt{25\cdot 3^4}+13\cdot\frac{3\sqrt{2}+3-2-\sqrt{2}}{9-2}\cdot\frac{\sqrt{8}-1}{1}=\\
=\;&\sqrt{2^6}+5\cdot 3^2+13\cdot\frac{2\sqrt{2}+1}{7}\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{1}=\\
=\;&2^3+45+13\cdot\frac{(2\sqrt{2})^2-1}{7}=8+45+13\cdot\frac{8-1}{7}=8+45+13=66.
\end{aligned}
$$

**Upoštevanje pravil za množenje in deljenje potenc v prvem členu. .........1 točka**
**Odpravljene negativne osnove pri potencah v prvem členu - potenciranje negativne osnove s sodo stopnjo. ................................................1 točka**
**Upoštevanje pravila za potenciranje potenc v prvem členu. ................1 točka**
**Izračunana vrednost prvega člena. ..........................................1 točka**
**Odprava oklepajev v drugem členu. ..........................................1 točka**
**Izpostavljanje skupnega faktorja v drugem členu. ..........................1 točka**
**Izračunana vrednost drugega člena. ........................................ 1 točka**
**Izračunana vsota v imenovalcu prvega ulomka tretjega člena ter obratna vrednost drugega ulomka v tretjem členu. ............................................ 1 točka**
**Izračunana vrednost tretjega člena. .........................................1 točka**
**Izračunana vrednost izraza. .................................................. 1 točka**

**3.** S $c$ označimo ceno kruha pred podražitvijo. Strošek bele moka predstavlja $30\%$ celotne cene, torej $0.3c$. Podobno strošek ržene moke predstavlja $0.6c$ in strošek vode $0.1c$. Po podražitvi moke je strošek bele moke enak $0.3c \cdot 1.25 = 0.375c$, strošek ržene moke pa $0.6c \cdot 1.2 = 0.72c$. Cena kruha po podražitvi je torej enaka $0.375c + 0.72c + 0.1c = 1.195c$, kar pomeni, da se je prvotna cena zvišala za $19.5\%$.

**Zapisan strošek bele moke. .................................................. 1 točka**
**Zapisan strošek ržene moke. ................................................ 1 točka**
**Zapisan strošek vode. ........................................................ 1 točka**
**Izračunan strošek bele moke po podražitvi. ................................. 2 točki**
**Izračunan strošek ržene moke po podražitvi. ................................ 2 točki**
**Zapisana cena kruha po podražitvi. ......................................... 1 točka**
**Sklep, da gre za** $19.5\%$ **podražitev. ......................................... 2 točki**

**4.** Dolžini krakov $BC$ in $AD$ trapeza $ABCD$ sta enaki, označimo ju z $b$. Dolžino osnovnice $AB$ označimo z $a$. Vzporednica h kraku $AD$ skozi točko $C$ seka daljšo osnovnico v točki $S$. Dobljeni štirikotnik $ASCD$ je paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in $b$. Podobno je štirikotnik $SBCD$ paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in $b$. Ker sta daljici $BC$ in $SD$ vzporedni, sta kota $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle DSA$ skladna ter merita $75°$. Podobno velja za kote $\sphericalangle BSC = \sphericalangle SAD = \sphericalangle SDC = \sphericalangle DCS = 75°$. Sklepamo, da so trikotniki $ASD$, $SBC$ in $CDS$ skladni enakokraki trikotniki. Narišemo višino $MS$ v trikotniku $ASD$. Velikost kota $\sphericalangle ADS$ je enaka $30°$, kot $\sphericalangle DSM$ pa meri $60°$. Pravokotni trikotnik $MSD$ je torej polovica enakostraničnega trikotnika s stranico $b$. Dolžina stranice $MS$ je enaka $\frac{b}{2}$. Ploščina trikotnika $ASD$ je enaka $\frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{4}$. Ker trapez sestavljajo trije taki trikotniki, je njegova ploščina enaka $\frac{3b^2}{4}$.



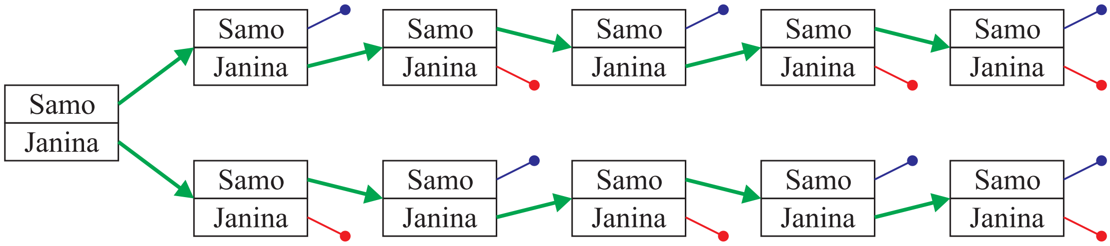

**Sklep, da sta štirikotnika $ASCD$ in $SBCD$ paralelograma s stranicama $\frac{a}{2}$ in $b$. .... 1 točka**
**Ugotovitev, da je velikost kota $\sphericalangle DSA$ enaka $75°$. .... 1 točka**
**Sklep: $\sphericalangle BSC = \sphericalangle SAD = \sphericalangle SDC = \sphericalangle DCS = 75°$. .... 1 točka**
**Sklep, da so trikotniki $ASD$, $SBC$ in $CDS$ skladni enakokraki trikotniki. .... 2 točki**
**Ugotovitev, da je trikotnik $MSD$ polovica enakostraničnega trikotnika s stranico $b$. 2 točki**
**Sklep, da je višina $MS$ enaka $\frac{b}{2}$. .... 1 točka**
**Izračunana ploščina trikotnika $ASD$. .... 1 točka**
**Izračunana ploščina trapeza. .... 1 točka**

**5.** Za pot navzgor potrebuje Jan $1$ uro in $12$ minut oziroma $1.2$ ure, torej bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $\frac{12}{1.2} = 10$ km. Pot navzdol je prevozil v $20$ minutah, kar pomeni, da bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $12 \cdot 3 = 36$ km. Oddaljenost čebelnjaka od vrha označimo z $x$. Jan je za pot od čebelnjaka do vrha potreboval $\frac{x}{10}$ ure, čas z vrha do čebelnjaka pa je enak $\frac{x}{36}$ ure. Razberemo, da je na vrhu počival $51$ minut, torej je za kolesarjenje od čebelnjaka do vrha in nazaj potreboval $69$ minut, kar je enako $\frac{69}{60}$ ure. Vsota časov je enaka $\frac{x}{10} + \frac{x}{36} = \frac{23x}{180}$, kar mora biti enako $\frac{69}{60} = \frac{207}{180}$. Velja, da je $23x = 207$ in $x = 9$, torej stoji čebelnjak $9$ km pod vrhom.

**Izračunana Janova povprečna hitrost na poti navzgor. ...................... 2 točki**
**Izračunana hitrost na poti navzdol. ........................................... 2 točki**
**(samo pravilno izračunana časa, ki ju porabi v eno smer - v vsakem primeru po 1 točka)**
**Izračunan čas, ki ga porabi za pot od čebelnjaka do vrha:** $\frac{x}{10}$**. .............. 1 točka**
**Čas z vrha do čebelnjaka :** $\frac{x}{36}$**. ................................................ 1 točka**
**Zapisana vsota časov:** $\frac{x}{10} + \frac{x}{36} = \frac{23x}{180}$**. ......................................1 točka**
**Ugotovitev, da mora biti vsota časov** $69$ **min oziroma** $\frac{69}{60} = \frac{207}{180}$ **ure. .......... 2 točki**
**Izračunana vrednost** $x = 9$ **km. ................................................1 točka**

## Rešitve za 9. razred

**1.** a) Narišemo kombinatorično drevo:



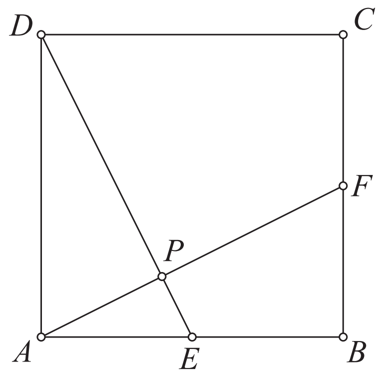

S preštevanjem ugotovimo, da je število vseh različnih potekov igre enako 12 ter da je Janina zmagala 6 krat.

b) Rešitev lahko razberemo iz drevesa: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Samo (6. set).

c) Recimo, da po 1. setu zmaga Samo, torej ima 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 2. setu zmagal Samo, se igra konča in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Kar ne ustreza zahtevam naloge, torej je zmagala Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 3. setu zmagala Janina, bi se igra končala in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Zmagal je Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 4. setu zmagal Samo, je igra končana in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Zmagala je Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 5. setu zmagala Janina, je igra končana in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Torej je zmagal Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 6. (zadnjem) setu zmagal Samo, bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Torej je zmagala Janina in oba imata po 10 pomaranč. Povzetek igre: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Janina (6. set). Podobno utemeljimo še drugo igro, ki ustreza zahtevam naloge: Janina (1. set), Samo (2. set), Janina (3. set), Samo (4. set), Janina (5. set) in Samo (6. set).

**Zapisani vsi različni poteki iger. ........................................ 2 točki**
**Odgovor, da je število vseh različnih iger enako 12. ........................ 1 točka**
**Odgovor, da je Janina zmagala šestkrat. ................................... 1 točka**
**Opis igre, ki se konča z drugo zaporedno zmago Sama v šestem setu. ..... 2 točki**
**Opisa obeh iger, ki se končata tako, da imata oba enako število pomaranč. 2 točki**
**(samo ena igra ................................................................ 1 točka)**
**Utemeljitev ene izmed obeh iger, ki ustrezata zahtevam naloge. ............ 2 točki**

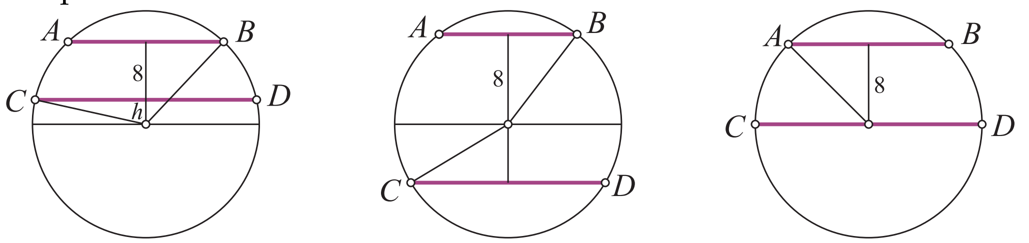
**2.** Narišimo skico.




Trikotnika $AED$ in $BFA$ sta skladna, torej sta tudi kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. Trikotnika $AEP$ in $AFB$ sta podobna, ker se ujemata v dveh kotih: skupen kot $\sphericalangle BAF$ ter skladna kota $\sphericalangle PEA$ in $\sphericalangle AFB$. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino daljice $AF$: $|AF|^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4}$ oziroma $|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Zapišemo razmerje enakoležnih stranic v obeh podobnih trikotnikih $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. Upoštevamo dolžine daljic in dobimo $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. Iz razmerja izrazimo $|AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Izračunamo še dolžino $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Iskano razmerje je enako $|AP| : |PF| = 2 : 3$.

**Ugotovitev, da sta kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. .......................... 1 točka**
**Sklep, da sta trikotnika $AEP$ in $AFB$ podobna. .............................. 2 točki**
**Izračunana dolžina daljice $|AF|$. .............................................. 1 točka**
**Zapisano razmerje enakoležnih stranic $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. ........... 1 točka**
**Zapisano razmerje $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. ......................................... 1 točka**
**Izračunana dolžina daljice $|AP|$. .............................................. 1 točka**
**Izračunana dolžina daljice $|PF|$. .............................................. 2 točki**
**Zapisano razmerje $|AP| : |PF| = 2 : 3$. ........................................ 1 točka**

**3.** Ločimo tri možnosti: obe tetivi sta v istem polkrogu ali pa je vsaka v svojem ali pa je tetiva $CD$ premer krožnice.




Označimo s $h$ oddaljenost središča krožnice od tetive $CD$. V prvem primeru, ko sta obe tetivi v istem polkrogu, je tetiva $AB$ od središča oddaljena $8 + h$. Polmer krožnice izrazimo s pomočjo Pitagorovega izreka $r^2 = 9^2 + h^2$, če upoštevamo tetivo $CD$. Upoštevajoč tetivo $AB$ velja $r^2 = 7^2 + (8 + h)^2$. Izenačimo obe enačbi in dobimo: $81 + h^2 = 49+64+16h+h^2$. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $16h = -32$ z rešitvijo $h = -2$. Rešitev odpade, saj je razdalja nenegativno število. V drugem primeru je vsaka tetiva v svojem polkrogu. Tetiva $AB$ je od središča krožnice oddaljena $8 - h$. Podobno kot v zgornjem primeru s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo $r$ ter izenačimo obe enačbi. Dobimo enačbo $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$ z rešitvijo $h = 2$. Torej je polmer krožnice enak $r = \sqrt{85}$ cm. Če je tetiva $CD$ premer, je polmer krožnice enak $9$ cm. Ta možnost odpade, saj ne velja enakost $9^2 = 7^2 + 8^2$.

**Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive $CD$. .................... 1 točka**
**Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive $AB$ v istem polkrogu. ... 1 točka**
**Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 + 16h + h^2$. ............................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je rešitev enačbe $h = -2$, ki seveda odpade. ............... 1 točka**
**Izražen polmer krožnice s pomočjo dolžine tetive $AB$ v drugem polkrogu. 1 točka**
**Zapisana enačba $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$. ............................ 1 točka**
**Izračunan rešitev enačbe $h = 2$. ............................................ 1 točka**
**Izračunan polmer krožnice $r = \sqrt{85}$ cm. ................................ 2 točki**
**Izločitev možnosti, da je tetiva $CD$ premer. .................................. 1 točka**

**4.** Večkotnik z manj oglišči ima tudi manj diagonal. Označimo z $n$ število oglišč večkotnika z manj diagonalami. Število diagonal v tem večkotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$. Razberemo, da ima drugi večkotnik $n+6$ oglišč, torej ima $\frac{(n+6)(n+6-3)}{2} = \frac{(n+6)(n+3)}{2}$ diagonal. Zapišemo razliko diagonal večkotnikov: $\frac{(n+6)(n+3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 63$. Odpravimo oklepaje ter ulomka in dobimo: $n^2 + 3n + 6n + 18 - n^2 + 3n = 126$ oziroma $12n + 18 = 126$. Rešitev enačbe je $n = 9$ torej gre za $9$-kotnik in $15$-kotnik.

**Sklep o številu diagonal. ........................................ 1 točka**
**Zapisani števili oglišč obeh večkotnikov: $n$ in $n+6$. ........................ 1 točka**
**Zapisani števili diagonal obeh večkotnikov. ............................ 2 točki**
**Zapisana enačba, ki pripada razliki diagonal. ............................ 2 točki**
**Zapis enakovredne enačbe. ........................................ 2 točki**
**Rešitev enačbe: $n = 9$. ........................................ 1 točka**
**Odgovor, da gre za $9$-kotnik in $15$-kotnik. ............................ 1 točka**

**Opomba: Če je tekmovalec reševal nalogo s poskušanjem, prejme največ 6 točk.**

**5.** $12$ jabolk v Danovi košari na koncu predstavlja $\frac{3}{4}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{4}$ dal v Žanovo košaro. Torej je dal Žanu $4$ jabolka. Ostalih $8$ jabolk v Žanovi košari na koncu predstavlja polovico vseh, ki jih je imel na začetku. Kar pomeni, da je imel Žan na začetku $16$ jabolk ter jih je $8$ dal v Lanovo košaro. Tudi Lan je imel na koncu $12$ jabolk, kar predstavlja $\frac{2}{3}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{3}$ dal v Danovo košaro. Torej je Danu dal $6$ jabolk, kar pomeni, da je imel Dan na začetku $12 + 4 - 6 = 10$ jabolk. Lan pa je imel $12 + 6 - 8 = 10$ jabolk.

**Ugotovitev: Dan je dal v Žanovo košaro $4$ jabolka. ............................2 točki**
**Sklep, da je imel Žan na začetku $16$ jabolk. .................................. 2 točki**
**Ugotovitev: Lan je dal v Danovo košaro $6$ jabolk. .............................2 točki**
**Sklep, da je imel Dan na začetku $12 + 4 - 6 = 10$ jabolk. .................... 2 točki**
**Sklep, da je imel Lan na začetku $12 + 6 - 8 = 10$ jabolk. .......................2 točki**

**Opomba: Če tekmovalec rešitev ugane in preveri, prejme največ 2 točki.**