

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis, kopiranje in uporabo gradiva v tem dokumentu za potrebe učiteljev pri pouku, šolskih krožkih in drugih aktivnostih na šoli, povezanimi s tekmovanji v organizaciji DMFA Slovenije. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Referenčna koda datoteke je zapisana ob vsaki strani tega dokumenta.

1. $d = 2,30$ m, $a = 9,00$ m, $h = 2,45$ m.

a) Komponenti začetne hitrosti žoge naj bosta v_x in v_y , t pa čas preleta igrišča. V vodoravni smeri je gibanje enakomerno, v navpični pa met z začetno hitrostjo v_y :

$$2a = v_x t, \quad d = v_y t - \frac{1}{2} g t^2.$$

(delno 2 t.)

Žoga doseže mrežo v polovičnem času in tedaj se mora dvigniti ravno za $h - d$:

$$h - d = v_y \frac{t}{2} - \frac{1}{2} g \left(\frac{t}{2}\right)^2 = v_y \frac{t}{2} - \frac{1}{8} g t^2.$$

(delno 2 t.)

Enačbo najprej pomnožimo z 2 in odštejemo od enačbe za d :

$$2d - h = \frac{1}{4} g t^2, \quad \text{od koder sledi} \quad t = 2 \sqrt{\frac{2d - h}{g}} = 1,03 \text{ s}$$

in za vodoravno komponento

$$v_x = \frac{2a}{t} = 17,5 \text{ m/s}.$$

Enačbo za $h - d$ pomnožimo s 4 in od dobljenega izraza odštejemo enačbo za d :

$$4h - 3d = v_y t \quad \text{in od tod} \quad v_y = \frac{4h - 3d}{t} = 2,8 \text{ m/s}.$$

(delno 4 t.) Končno izračunamo še velikost začetne hitrosti in kot, ki ga hitrost tvori z vodoravnico:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 17,7 \text{ m/s} \approx 18 \text{ m/s}, \quad \tan \alpha = \frac{v_x}{v_y}, \quad \alpha = \text{atan} \left(\frac{v_x}{v_y} \right) = 9,1^\circ \approx 9^\circ.$$

(delno 2 t.)

[10 t.]

2. $S = 1 \text{ cm}^2$, $d = 50 \text{ cm}$, $k = 2,5 \text{ N/m}$, $h_1 = 40 \text{ cm}$, $h_2 = 15 \text{ cm}$, $\varphi = 45^\circ$.

a) V levem kraku je pod batom podtlak, $p = p_0 - \rho g(h_1 - h_2)$ in *raztezek* vzmeti meri

$$s = \frac{S\Delta p}{k} = \frac{S\rho g(h_1 - h_2)}{k} = 9,8 \text{ cm} \approx 10 \text{ cm}.$$

[3 t.]

b) Ko se gladini izenačita, je tlak pod batom enak zunanjemu in vzmet ni raztegnjena. Pomeni, da se mora gladina v levem kraku dvigniti za s , ki smo ga izračunali pri a). V obeh krakih torej sega gladina vode do višine $h_1 + s = 50 \text{ cm}$. V desni krak moramo natočiti prostornino vode

$$V = S(h_1 - h_2 + 2s) = 44,6 \text{ cm}^3 \approx 45 \text{ cm}^3.$$

[2 t.]

c) V levi cevi je ponovno podtlak in vzmet je *raztegnjena*; *raztezek* označimo z x . Potem je v levem kraku dolžina stolpca vode $h_1 + s - x$, v desnem pa $h_1 + s + x$. Ker smo cev nagnili za 45° , je višina gladine vode v desnem kraku, merjena glede na najnižjo točko cevi, enaka $y_2 = (h_1 + s + x)/\sqrt{2}$ in v levem $y_1 = (h_1 + s + d - x)/\sqrt{2}$.

(delno 2 t.)

Podtlak pod batom je enak

$$\Delta p = \rho g(y_1 - y_2) = \rho g \frac{(d - 2x)}{\sqrt{2}}.$$

Iz enačbe za ravnovesje bata:

$$kx = S\Delta p = S\rho g \frac{(d - 2x)}{\sqrt{2}}$$

sledi za *raztezek* vzmeti

$$x = \frac{S\rho g d}{\sqrt{2}(k + \sqrt{2}S\rho g)} = 8,9 \text{ cm} \approx 9 \text{ cm}.$$

(delno 3 t.)

[5 t.]

3. $m = 75 \text{ kg}$, $l_0 = 2,4 \text{ m}$, $l = 3,0 \text{ m}$, $h_1 = 20 \text{ cm}$, $h_2 = 55 \text{ cm}$.

a)

Trak po dolžini razdelimo na dva enaka dela in vsak del z obravnavajmo kot elastično vzmet s koeficientom k' . Ker se polovica traku pri enaki natezni sili raztegne le za polovico celotnega raztezka traku, je elastični koeficient polovice traku k' dvakrat večji kot za cel trak, $k' = 2k$.

Polovica traku se pod mirujočim telovadcem raztegne za

$$s_1 = l_1 - \frac{1}{2}l_0, \quad l_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + h_1^2}, \quad s_1 = 31,3 \text{ m}.$$

Navpična komponenta sile F_1 , ki napenja polovico traku, uravnesi polovico teže telovadca,

$$\frac{1}{2}mg = F_1 \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{h_1}{l_1}, \quad F_1 = \frac{mgl_1}{2h_1},$$

kjer je φ kot, ki ga tvori trak z vodoravnico. Zvezo lahko izpeljemo tudi iz podobnih trikotnikov. Koeficient polovičnega traku je

$$k' = \frac{F_1}{s_1} = \frac{mgl_1}{2s_1h_1} = 8,9 \text{ kN/m},$$

za cel trak pa $k = \frac{1}{2}k' = 4,45 \text{ kN/m}$.

[4 t.]

b)

Postopek je podoben kot pri a), le da sedaj namesto teže nastopa odzivna sila F :

$$F = 2F_2 \frac{h_2}{l_2} = \frac{2k's_2h_2}{l_2}, \quad l_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + h_2^2} = 160 \text{ cm}, \quad s_2 = l_2 - \frac{1}{2}l_0 = 40 \text{ cm}.$$

Odrivna sila je potem

$$F = \frac{4ks_2h_2}{l_2} = 2,45 \text{ kN}.$$

[3 t.]

c)

Razlika prožnostnih energij dveh vzmeti, ki sta na začetku raztegnjeni vsaka za $s_2 = 40 \text{ cm}$, na koncu pa za $s_0 = (l - l_0)/2 = 30 \text{ cm}$, se pretvori v potencialno energijo telovadca:

$$2 \frac{1}{2}k'(s_2^2 - s_0^2) = mgz,$$

kjer je z enak razliki višin težišča; ker lahko telovadca obravnavamo kot togo telo, se za toliko dvignejo tudi njegova stopala. Glede na nivo praznega trampolina, pa so njegova stopala na višini:

$$h = z - h_2 = \frac{2k(s_2^2 - s_0^2)}{mg} - h_2 = 29 \text{ cm}.$$

[3 t.]

4. $m = 12 \text{ kg}$, $m_S = 10 \text{ kg}$, $l = 50 \text{ cm}$.

a) $\varphi = 50^\circ$

Naj bo m masa polovice nog. Štejmo tudi obe nogi skupaj za eno, tako da m ustreza vsemu pod kolenom.

Simetrija in bilanca sil nam povesta, da vsak stol nosi težo ene noge v navpični smeri. V vodoravni smeri pa imamo potisk, ki ustreza ravnovesju navorov. Če vrtilišče postavimo v koleno, imamo bilanco navora za polovico noge:

$$mg(l/2) \cos \varphi + F_x l \sin \varphi - mgl \cos \varphi = 0 \quad (1)$$

od koder

$$F_x = mg \frac{1}{2 \tan \varphi} \quad (2)$$

Če hočemo, da stol miruje, mora lepenje uravnovesiti F_x , pri čemer je normala vsota teže polovice nog in celega stola.

$$k_l = \frac{F_x}{(m_S + m)g} = 0,23 \quad (3)$$

[4 t.]

b) $\varphi = 30^\circ$, $k = 0,2$

Za drugi del naloge, pa imamo tudi neznan silo v kolenu (ki je prej nismo potrebovali). V kolenu na stegno deluje sila v desno, ki je enaka lepenju, navzgor pa sila, ki je enaka razliki med normalno komponento stola in težo spodnjega dela nog, $F_y = F_\perp - mg$, kar dobimo iz ravnovesja sil na spodnjo polovico nog.

Navori na spodnji del noge so podobno kot prej,

$$mg(l/2) \cos \varphi + F_l \sin \varphi - F_\perp l \cos \varphi = 0, \quad (4)$$

pogoj zdrsa stola pa

$$F_l = k(m_S g + F_\perp). \quad (5)$$

(delno 1 t.)

Navori na stegno glede na kolk, ki so zdaj neničelni, so torej

$$M = mg(l/2) \cos \varphi - F_y l \cos \varphi - F_l \sin \varphi, \quad (6)$$

pri čemer pozitivni navori pomenijo vrtenje v smeri urinega kazalca.

Zdaj moramo to zložiti skupaj in eliminirati neznan silo F_\perp , F_y in F_l .

Poračunajmo normalo:

$$mg(1/2) \cos \varphi + k(m_S g + F_\perp) \sin \varphi - F_\perp \cos \varphi = 0, \quad (7)$$

$$F_\perp = \frac{mg(1/2) \cos \varphi + km_S g \sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} = 79 \text{ N}. \quad (8)$$

(delno 2 t.)

Navor lažje izračunamo numerično, analitični izračun pa je koristen za preverjanje pravilnosti:

$$M = mg(l/2) \cos \varphi - (F_\perp - mg)l \cos \varphi - k(m_S g + F_\perp)l \sin \varphi. \quad (9)$$

$$M = gl \cos \varphi \frac{m \cos \varphi - 2k(m + m_S) \sin \varphi}{\cos \varphi - k \sin \varphi} = 33,2 \text{ Nm} \approx 33 \text{ Nm}. \quad (10)$$

(delno 2 t.)

Navor vrtili v smeri urinega kazalca. (delno 1 t.)

Ničla števec sovпада z rešitvijo prvega dela. Ničla imenovalca ustreza kotu, pri katerem ne glede na silo ne moremo premagati lepenja.

[6 t.]

1. $U = 24 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1000 \text{ }\mu\text{F}$, $C_3 = 4700 \text{ }\mu\text{F}$.

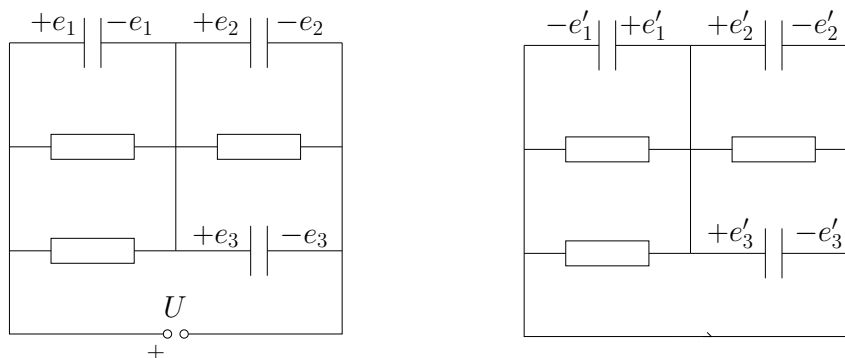
a)

Tok teče skozi vzporedno vezana upornika R_1 in R_3 ter njima zaporedno vezan upornik R_2 (glej sliko pri besedilu naloge). Ker je nadomestni upor vzporedno vezanih upornikov enak $R' = R_1 R_3 / (R_1 + R_3) = 50 \text{ k}\Omega$ — kar je ravno polovica R_2 — se napetost razdeli v razmerju 1:2. Napetost na C_1 je tako $U/3$, na C_2 in C_3 pa $2U/3$. Naboji na kondenzatorjih so

$$e_1 = C_1 \frac{U}{3} = 8 \text{ mAs}, \quad e_2 = C_2 \frac{2U}{3} = 16 \text{ mAs}, \quad e_3 = C_3 \frac{2U}{3} = 75,2 \text{ mAs} \approx 75 \text{ mAs}.$$

[3 t.]

b)



Če je bil na levem priključku vira pozitivni pol (leva slika), se je na levih elektrodah kondenzatorjev nabral pozitivni naboj, izračunan pri a), na desnih pa negativni. Takoj po sklenitvi priključkov se naboji na elektrodah prerazporedijo in sicer tako, da je na levi elektrodi C_1 sedaj negativni pol, na desni pa pozitivni, tako kot na levih elektrodah C_2 in C_3 (desna slika). Vsota pozitivnega in negativnega naboja se ohranja:

$$e'_1 + e'_2 + e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

(delno 3 t.)

Napetost U' na C_1 je nasprotno enaka napetosti na C_2 in C_3 . Za velikosti velja:

$$U' = \frac{e'_1}{C_1} = \frac{e'_2}{C_2} = \frac{e'_3}{C_3} \quad \text{in} \quad e'_2 = \frac{C_2}{C_1} e'_1 = e'_1, \quad e'_3 = \frac{C_3}{C_1} e'_1 = 4,7 e'_1.$$

Iz prve enačbe sledi

$$e'_1 = \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1}} = 12,4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}$$

(delno 2 t.)

in

$$e'_2 = 12,4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}, \quad e'_3 = 58,4 \text{ mAs} \approx 58 \text{ mAs}.$$

(delno 2 t.)

Do enakega rezultata pridemo tudi, če predpostavimo nasprotno polariteto vira.

[7 t.]

2. $m_k = 200 \text{ kg}$, $\rho_t = 1100 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 0,3 \text{ W/mK}$, $d = 0,1 \text{ mm}$, $r = 9 \text{ m}$, $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$, $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$, $p_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $\alpha = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$, $m_0 = 300 \text{ kg}$.

a)

Masa tkanine m_t , iz katere je balon, je

$$m_t = 4\pi r^2 d \rho_t = 111,97 \text{ kg} \approx 112 \text{ kg}.$$

Ravnovesje sil, ko balon lebdi, da enačbo

$$[m_k + m_t + m + m_z(T_v)]g = F_v = m_z(T_0)g, \quad (1)$$

kjer je m masa bremena v košari, T_v temperatura vročega zraka v balonu, F_v sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjenega zraka $m_z(T_0)g$ (pri temperaturi okoliškega zraka T_0 !) in $m_z(T_v)$ masa vročega zraka v balonu. Masa $m_z(T)$ je masa zraka v balonu pri temperaturi T in je

$$m_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{p_0 M}{RT},$$

kjer je $\rho_z(T)$ gostota zraka pri temperaturi T , $R = 8300 \text{ J/kmolK}$ splošna plinska konstanta in $M = 29 \text{ kg/kmol}$ kilomolska masa zraka.

Ker nas zanima največja masa bremena m_b , mora biti takrat sila vzgona največja, torej temperatura zraka v balonu najvišja dopustna $T_v = T_1$. Dobimo

$$m_b = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{p_0 M}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) - m_k - m_t = 407,9 \text{ kg} \approx 408 \text{ kg} \sim 410 \text{ kg}.$$

[4 t.]

b)

Temperaturo zraka v balonu T_v izračunamo iz enačbe (1), ko za maso bremena m vstavimo m_0

$$T_v = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{3R(m_k + m_t + m_0)}{4\pi r^3 p_0 M} \right)^{-1} = 359,4 \text{ K} \approx 360 \text{ K}.$$

Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, lahko privzamemo pri izračunu toplotnih izgub, da ima zunanja površina balona enako temperaturo kot zrak v notranjosti balona $T = T_v$. Toplotni tok P , ki ga moramo dovajati zraku v balonu je

$$P = jS = 4\pi r^2 j(T_v) = 4\pi r^2 \alpha (T_v - T_0) = 375,21 \text{ kW} \approx 375 \text{ kW}.$$

[3 t.]

c)

Gostota toplotnega toka s površja balona v okolico je

$$j(T) = \alpha(T - T_0),$$

kjer je T temperatura zunanje površine balona. Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, tudi tu privzamemo pri izračunu toplotnih izgub kar $T = T_v$ in dobimo

$$j_0 = \alpha(T_v - T_0), \quad (2)$$

Ta toplotni tok mora teči tudi skozi steno balona s prevajanjem

$$j_0 = \lambda \frac{\Delta T}{d},$$

kjer je $\Delta T = T_v - T$ iskana razlika temperatur površine tkanine v balonu in na zunanji strani. Gostoti toplotnih tokov izenačimo in dobimo

$$\Delta T = \frac{d\alpha(T_v - T_0)}{\lambda} = 0,1229 \text{ K} \approx 0,12 \text{ K}.$$

Vidimo, da bi, če bi bili natančni, morali v enačbi (2) namesto $T = T_v = 359,4 \text{ K}$, vzeti $T = T_1 - \Delta T = 359,3 \text{ K}$. Razlika med $359,4 - 298 = 61,4$ in $359,3 - 298 = 61,3$ je očitno zanemarljiva in približek $T = T_1$ v (2) upravičen.

[3 t.]

3. $B = 0,10 \text{ T}$, $l = 20 \text{ cm}$, $s = 2 \text{ mm}$, $m_{12} = 12 \text{ u}$, $m_{14} = 14 \text{ u}$.

Za pospeševanje ^{12}C z napetostjo U_0 velja

$$\frac{1}{2}m_{12}v^2 = e_0U_0, \quad v = \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{12}}}.$$

(delno 2 t.)

V prečnem polju elektrostatska sila uravnovesi magnetno:

$$e_0E = e_0vB$$

(delno 2 t.)

Hitrost v' ionov ^{14}C je nekoliko manjša, tako da na njih deluje v prečni smeri sila:

$$F = e_0E - e_0v'B = e_0B(v - v'), \quad v' = \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{14}}}.$$

(delno 2 t.)

Zaradi te sile se ioni uklonijo, tako kot delec pri vodoravnem metu, le da namesto težnega pospeška upoštevamo le pospešek zaradi sile F , $a = F/m_{14}$, saj je teža iona zaradi majhne mase zanemarljiva. Ker je odklon zelo majhen, lahko predpostavimo, da je vodoravna komponenta sile konstantna in enaka v' . Ion kombinirano polje preleti v času $t = l/v'$ in se odkloni za s :

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{Fl^2}{2m_{14}v'^2} = \frac{Fl^2}{4e_0U_0} = \frac{e_0Bl^2}{4e_0U_0} (v - v') = \frac{e_0Bl^2}{4e_0U_0} v \left(1 - \frac{v'}{v}\right)$$

Upoštevamo še enkrat zvezo med hitrostjo in pospeševalno napetostjo:

$$s = \frac{e_0Bl^2}{4e_0U_0} \sqrt{\frac{2e_0U_0}{m_{12}}} \left(1 - \sqrt{\frac{m_{12}}{m_{14}}}\right) = \frac{e_0Bl^2}{\sqrt{8e_0U_0m_{12}}} \left(1 - \sqrt{\frac{12}{14}}\right) \equiv \frac{e_0Bl^2}{\sqrt{8e_0U_0m_{14}}} \left(\sqrt{\frac{14}{12}} - 1\right).$$

Končno izluščimo U_0 :

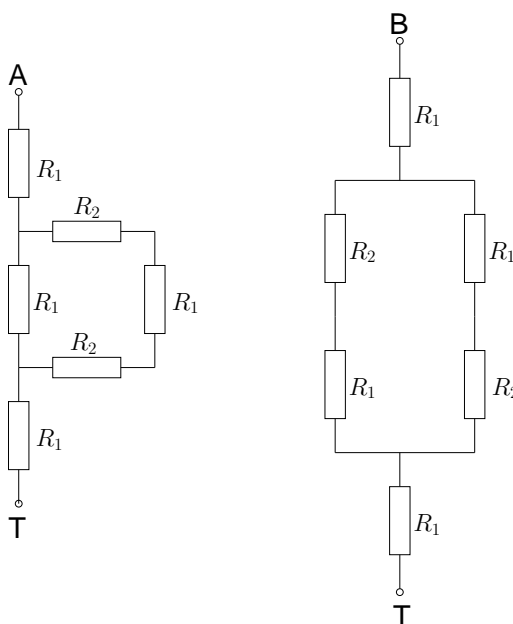
$$U_0 = \frac{e_0B^2l^4}{8m_{12}s^2} \left(1 - \sqrt{\frac{12}{14}}\right)^2 \equiv \frac{e_0B^2l^4}{8m_{14}s^2} \left(\sqrt{\frac{14}{12}} - 1\right)^2 = 22 \text{ kV}.$$

(delno 4 t.)

[10 t.]

Neobvezno: Preverimo, da je vpliv gravitacije zanemarljiv: hitrost ionov ^{14}C je $v' = \sqrt{2e_0U_0/m_{14}} = 5,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, polje preletijo v $0,36 \mu\text{s}$ in se zaradi gravitacije na tej razdalji uklonijo za $0,006 \text{ nm}$.

4. $l = 30$ cm, $r = 0,05$ mm, $U = 1$ V, $I_A = 1,56$ A, $I_B = 0,52$ A.



(delno 2 t.)

a) Upor tretjine ene ali druge žice lahko izrazimo z njeno dolžino $l/3$, polmerom r in specifičnim uporom ζ_i , kjer je $i = 1$ za navpične žice in $i = 2$ za vodoravne žice

$$R_i = \frac{l\zeta_i}{3\pi r^2}.$$

Očitno je, da bomo ζ_i zlahka določili, ko določimo vrednosti obeh uporov ene tretjine navpične žice R_1 in ene tretjine vodoravne žice R_2 . Nadomestno vezje, izraženo z upori R_1 in R_2 , ko vežemo vir med točki T in A oziroma T in B, kažeta sliki zgoraj. Označimo z $R_A = U/I_A = 1/1,56 \Omega = 0,641 \Omega$ in $R_B = U/I_B = 1/0,52 \Omega = 1,923 \Omega$. Končni rezultati so lepše zapisani, če opazimo, da sta tokova v razmerju $\eta = 3/1 = 3$ oziroma da velja $R_B = \eta R_A$, ni pa to nujno za rešitev naloge. Iz obeh shem dobimo dve enačbi:

$$R_A = 2R_1 + \frac{R_1(2R_2 + R_1)}{2(R_1 + R_2)} \quad (1)$$

$$R_B = 2R_1 + \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (2)$$

(delno 2 t.)

Imamo dve enačbi z dvema neznankama, ker enačba (1) ni linearna, gre reševanje najlažje, če iz (2) izrazimo ali R_1 ali R_2 in to vstavimo v (1), kar nam da kvadratno enačbo z dvema rešitvama, od katerih je ena nesmislena. Enačbo (2) lahko preoblikujemo v

$$R_2 = 2R_B - 5R_1 \quad \text{ali} \quad 5R_1 = 2R_B - R_2.$$

Do končne rešitve pridemo v vsakem primeru, a iz kvadratne enačbe za R_2 je, kot bomo videli, lažje oceniti, katera od dveh rešitev je smiselna in katera fizikalno nesmiselna. Enačbo (1) množimo z $2(R_1 + R_2)$, da se znebimo ulomkov. Ko enačbo še malo preuredimo, dobimo

$$2R_A R_1 + 2R_A R_2 = 5R_1^2 + 6R_2 R_1 \quad (3)$$

Ker smo iz (2) lepo izrazili $5R_1$, enačbo (3) pomnožimo s 5, da dobimo

$$2R_A \cdot 5R_1 + 10R_A R_2 = (5R_1)^2 + 6R_2 \cdot 5R_1.$$

V enačbo vstavimo $5R_1 = 2R_B - R_2$ in dobimo

$$2R_A(2R_B - R_2) + 10R_AR_2 = (2R_B - R_2)^2 + 6R_2(2R_B - R_2),$$

kar nam da kvadratno enačbo

$$5R_2^2 - 8(R_B - R_A) - 4R_B(R_B - R_A) = 0.$$

Medkljic: Iz te enačbe se takoj vidi, da bi iz meritev $R_B = R_A$ sledilo $R_2 = 0$, kar sledi tudi iz obeh shem na sliki zgoraj.

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$R_2 = \frac{4(R_B - R_A)}{5} \pm \frac{4}{5} \sqrt{(R_B - R_A)^2 + 5R_B(R_B - R_A)/4} = \frac{4(R_B - R_A)}{5} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{5R_B}{4(R_B - R_A)}} \right).$$

Vidimo, da bi rešitev z "–" dala $R_2 < 0$, kar je fizikalno nesmisleno, torej je prava rešitev tista s predznakom "+". Če upoštevamo še $R_B = \eta R_A$, dobimo kompakten zapis

$$R_2 = R_A \frac{4(\eta - 1)}{5} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5\eta}{4(\eta - 1)}} \right) = R_A \frac{8}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{46}}{4} \right) = R_A \frac{2}{5} (4 + \sqrt{46}) = 2,7647 \Omega.$$

(delno 3 t.)

in od tu

$$R_1 = R_A \frac{2}{25} (11 - \sqrt{46}) = 0,2163 \Omega.$$

Končno dobimo

$$\zeta_1 = \frac{3\pi r^2 R_1}{l} = 1,699 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m},$$

kar ustreza specifičnemu uporju bakra. Za ζ_2 dobimo podobno

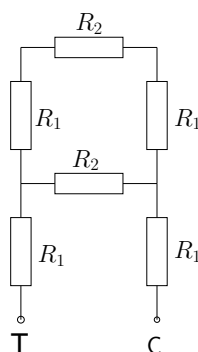
$$\zeta_2 = \frac{3\pi r^2 R_2}{l} = 2,171 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m} \approx 22 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m},$$

kar približno ustreza svincu.

(delno 1 t.)

[8 t.]

b)



Iz sheme vidimo, da je nadomestni upor R_C , ko vezemo vir med točki T in C, enak

$$R_C = 2R_1 + \frac{R_2(2R_1 + R_2)}{2(R_1 + R_2)} = 1,915 \Omega$$

in tok skozi vir

$$I_C = \frac{U}{R_C} = 0,5221 \text{ A} \approx 0,52 \text{ A} \sim I_B,$$

kar je zelo blizu I_B . Zares sta R_B in R_C po velikosti zelo podobna. Razlika je

$$R_B - R_C = R_1 \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} = 0,0363 R_1 = 7,8 \cdot 10^{-3} \Omega$$

oziroma

$$\frac{R_B - R_C}{R_B} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

[2 t.]

1. $U = 24 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1000 \text{ }\mu\text{F}$, $C_3 = 4700 \text{ }\mu\text{F}$.

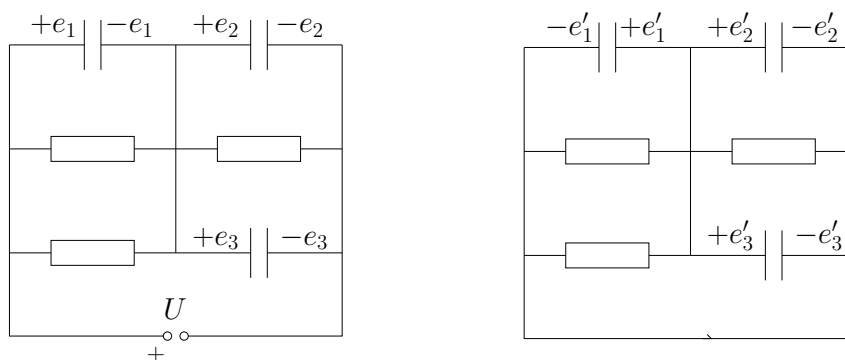
a)

Tok teče skozi vzporedno vezana upornika R_1 in R_3 ter njima zaporedno vezan upornik R_2 (glej sliko pri besedilu naloge). Ker je nadomestni upor vzporedno vezanih upornikov enak $R' = R_1 R_3 / (R_1 + R_3) = 50 \text{ k}\Omega$ — kar je ravno polovica R_2 — se napetost razdeli v razmerju 1:2. Napetost na C_1 je tako $U/3$, na C_2 in C_3 pa $2U/3$. Naboji na kondenzatorjih so

$$e_1 = C_1 \frac{U}{3} = 8 \text{ mAs}, \quad e_2 = C_2 \frac{2U}{3} = 16 \text{ mAs}, \quad e_3 = C_3 \frac{2U}{3} = 75,2 \text{ mAs} \approx 75 \text{ mAs}.$$

[3 t.]

b)



Če je bil na levem priključku vira pozitivni pol (leva slika), se je na levih elektrodah kondenzatorjev nabral pozitivni naboj, izračunan pri a), na desnih pa negativni. Takoj po sklenitvi priključkov se naboji na elektrodah prerazporedijo in sicer tako, da je na levi elektrodi C_1 sedaj negativni pol, na desni pa pozitivni, tako kot na levih elektrodah C_2 in C_3 (desna slika). Vsota pozitivnega in negativnega naboja se ohranja:

$$e'_1 + e'_2 + e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

(delno 3 t.)

Napetost U' na C_1 je nasprotno enaka napetosti na C_2 in C_3 . Za velikosti velja:

$$U' = \frac{e'_1}{C_1} = \frac{e'_2}{C_2} = \frac{e'_3}{C_3} \quad \text{in} \quad e'_2 = \frac{C_2}{C_1} e'_1 = e'_1, \quad e'_3 = \frac{C_3}{C_1} e'_1 = 4,7 e'_1.$$

Iz prve enačbe sledi

$$e'_1 = \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1}} = 12,4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}$$

in

$$e'_2 = 12,4 \text{ mAs} \approx 12 \text{ mAs}, \quad e'_3 = 58,4 \text{ mAs} \approx 58 \text{ mAs}.$$

(delno 2 t.)

Do enakega rezultata pridemo tudi, če predpostavimo nasprotno polariteto vira.

[5 t.]

c)

Na vseh upornikih je enaka napetost

$$U' = \frac{e_1}{C_1} = 12,4 \text{ V}$$

in požene skozi njih enak tok, saj so vrednosti vseh uporov enake:

$$I'_1 = \frac{U'}{R_1} = I'_2 = I'_3 = 0,124 \text{ mA} \approx 0,12 \text{ mA}.$$

[2 t.]

2. $m_k = 200$ kg, $\rho_t = 1100$ kg/m³, $\lambda = 0,3$ W/mK, $d = 0,1$ mm, $r = 9$ m, $T_1 = 100$ °C = 373 K, $T_0 = 25$ °C = 298 K, $p_0 = 1$ bar = 10⁵ Pa, $\alpha = 3$ W/m²K, $a = 0,7$, $m_0 = 300$ kg.

a)

Masa tkanine m_t , iz katere je balon, je

$$m_t = 4\pi r^2 d \rho_t = 111,97 \text{ kg} \approx 112 \text{ kg}.$$

Ravnovesje sil, ko balon lebdi, da enačbo

$$[m_k + m_t + m + m_z(T_v)]g = F_v = m_z(T_0)g, \quad (1)$$

kjer je m masa bremena v košari, T_v temperatura vročega zraka v balonu, F_v sila vzgona, ki je enaka teži izpodrinjenega zraka $m_z(T_0)g$ (pri temperaturi okoliškega zraka T_0 !) in $m_z(T_v)$ masa vročega zraka v balonu. Masa $m_z(T)$ je masa zraka v balonu pri temperaturi T in je

$$m_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_z(T) = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{p_0 M}{RT},$$

kjer je $\rho_z(T)$ gostota zraka pri temperaturi T , $R = 8300$ J/kmolK splošna plinska konstanta in $M = 29$ kg/kmol kilomolska masa zraka.

Ker nas zanima največja masa bremena m_b , mora biti takrat sila vzgona največja, torej temperatura zraka v balonu najvišja dopustna $T_v = T_1$. Dobimo

$$m_b = \frac{4\pi r^3}{3} \frac{p_0 M}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) - m_k - m_t = 407,9 \text{ kg} \approx 408 \text{ kg} \sim 410 \text{ kg}.$$

[4 t.]

b)

Gostota toplotnega toka s površja balona v okolico zaradi konvekcije in sevanja je

$$j(T) = \alpha(T - T_0) + (1 - a)\sigma(T^4 - T_0^4),$$

kjer je T temperatura zunanje površine balona. Ker je v nalogi povedano, da je $T_v - T \ll T - T_0$, lahko privzamemo pri izračunu toplotnih izgub kar $T = T_v$. Zanima nas balon, ki nosi največje možno breme m_b , torej velja $T \approx T_1$ in

$$j_b = \alpha(T_1 - T_0) + (1 - a)\sigma(T_1^4 - T_0^4). \quad (2)$$

Ta toplotni tok mora teči tudi skozi steno balona s prevajanjem

$$j_b = \lambda \frac{\Delta T}{d},$$

kjer je $\Delta T = T_1 - T$ iskana razlika temperatur površine tkanine v balonu in na zunanji strani. Gostoti toplotnih tokov izenačimo in dobimo

$$\Delta T = \frac{d}{\lambda} (\alpha(T_1 - T_0) + (1 - a)\sigma(T_1^4 - T_0^4)) = 0,14 \text{ K}.$$

Vidimo, da bi, če bi bili natančni, morali v enačbi (2) namesto $T = T_1 = 373$ K, vzeti $T = T_1 - \Delta T = 372,86$ K. Razlika med $373^4 - 298^4$ in $372,86^4 - 298^4$ je očitno zanemarljiva in približek $T = T_1$ v (2) upravičen.

[3 t.]

c)

Temperaturo vročega zraka v balonu T_v izračunamo iz enačbe (1), kjer za maso bremena m vstavimo m_0

$$T_v = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{3R(m_k + m_t + m_0)}{4\pi r^3 p_0 M} \right)^{-1} = 359,4 \text{ K} \approx 360 \text{ K}.$$

Toplotni tok P , ki ga moramo dovajati zraku v balonu je

$$P = jS = 4\pi r^2 j(T_v) = 4\pi r^2 (\alpha(T_v - T_0) + (1 - \alpha)\sigma(T_v^4 - T_0^4)) = 340,06 \text{ kW} \approx 340 \text{ kW}.$$

[3 t.]

3. $d = 10$ cm, $b_1 = 4$ cm, $b_2 = 6$ cm, $a = 20$ cm, $y = 2,8$ cm.

a)

Iz podatka, da z eno samo (prvo) lečo, obrnjeno proti Soncu "pri nobeni oddaljenosti od spodnjega krajišča cevi ne uspe zbrati sončne svetlobe", sklepamo, da je goriščna razdalja prve leče krajša od d , torej krajša od 10 cm.

Ko je proti Soncu obrnjena leča 1, dobimo za vzporedne žarke iz smeri Sonca za drugo lečo enačbo

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{d - f_1} = \frac{1}{f_2}, \quad (1)$$

kjer je f_1 goriščna razdalja leče na krajišču 1 in f_2 goriščna razdalja leče na krajišču 2 ter b_1 razdalja od krajišča 2, kjer se zberejo sončni žarki. Ko cev obrnemo, dobimo analogno

$$\frac{1}{b_2} + \frac{1}{d - f_2} = \frac{1}{f_1}, \quad (2)$$

(delno 2 t.)

kjer je b_2 razdalja za krajiščem 1, kjer se zbere sončna svetloba. Obe enačbi dobimo, ko se spomnimo, da je zaradi vzporedne vpadle svetlobe ta zbrana po prehodu skozi lečo, ki je obrnjena k Soncu, na goriščni razdalji te leče, torej nastane slika Sonca na razdalji d minus goriščna razdalja prve leče pred drugo lečo.

Iz enačbe (1) izrazimo f_2

$$f_2 = \frac{b_1(d - f_1)}{d + b_1 - f_1}.$$

ker je $f_1 < d$, je $f_2 > 0$, torej je druga leča zbiralna. Ko f_2 nesemo v enačbo (2) dobimo po nekaj poenostavitvah, ko se rešimo vseh ulomkov

$$(d - b_1 + b_2)f_1^2 - d(2b_2 + d)f_1 + d^2b_2 = 0$$

(delno 1 t.)

z rešitvama

$$f_1 = d \frac{2b_2 + d \pm \sqrt{4b_1b_2 + d^2}}{2(d - b_1 + b_2)} = d \frac{22 \pm 14}{24}.$$

(delno 1 t.)

Obe rešitvi sta fizikalno smiselni, dobimo $f_1 = \frac{10}{3}$ cm in $f_1' = 15$ cm.

Ker je $f_1' > d$ mora imeti prva leča goriščno razdaljo

$$f_1 = \frac{10}{3} \text{ cm} = 3,33 \text{ cm}.$$

(delno 2 t.)

Za f_2 dobimo v tem primeru

$$f_2 = \frac{b_1(d - f_1)}{d + b_1 - f_1} = 4 \text{ cm} \frac{10 - \frac{10}{3}}{10 + 4 - \frac{10}{3}} = 4 \text{ cm} \frac{20}{32} = \frac{5}{2} \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}.$$

(delno 1 t.)

[7 t.]

b)

Z znanima goriščnima razdaljama sliko plamena izračunamo kot dve zaporedni preslikavi, skozi prvo lečo se plamen preslika na razdaljo

$$b = a \frac{f_1}{a - f_1} = 20 \text{ cm} \frac{10/3}{50/3} = 20 \text{ cm} \frac{1}{5} = 4 \text{ cm}.$$

Velikost slike plamena y' po preslikavi preko prve leče je

$$y' = y \frac{b}{a} = y \frac{4}{20} = \frac{1}{5}y.$$

Slika y' po prvi preslikavi je predmet za drugo lečo, nahaja se $a' = d - b = 6$ cm pred drugo lečo. Enačba za preslikavo preko druge leče nam da razdaljo slike za drugo lečo kot

$$b' = a' \frac{f_2}{a' - f_2} = 6 \text{ cm} \frac{2,5}{6 - 2,5} = 6 \text{ cm} \frac{5}{7} = \frac{30}{7} \text{ cm} = 4,286 \text{ cm} \approx 4,3 \text{ cm}.$$

Velikost slike po preslikavi skozi drugo lečo je

$$y'' = y' \frac{b'}{a'} = y' \frac{30/7}{6} = \frac{5}{7} y' = \frac{5}{7} \frac{1}{5} y = \frac{1}{7} y = \frac{28 \text{ mm}}{7} = 4 \text{ mm}.$$

Slika plamena nastane 4,3 cm za krajiščem 2 in je velika 4 mm. Slika je realna in obrnjena enako kot plamen.

Zadnje povedi od tekmovalcev ne zahtevamo.

[3 t.]

4. $m = 0,40$ kg, $k = 5,0$ N/m, $l_0 = 100$ cm, $t_0 = 0,2$ s.

a) Pri prostem padanju sta uteži v breztežnem stanju in nihanje lahko opišemo tako, kot če bi uteži na začetku mirovali na gladki vodoravni podlagi. Ko ju zanimamo drugo proti drugi tako, da je težišče pri miru, lahko nihanje posamezne uteži opišemo kot nihanje telesa na vzmeti s polovično dolžino. Prožnostni koeficient polovične vzmeti je dvakrat večji kot koeficient celotne vzmeti, torej $k' = 2k = 10,0$ N/m. Posamezna utež niha s frekvenco

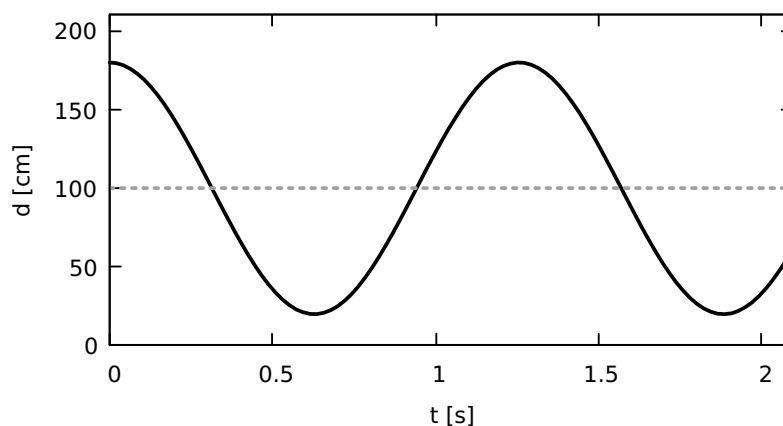
$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 5,0 \text{ s}^{-1}.$$

[3 t.]

b) Amplituda relativnega nihanja je kar enaka začetnemu raztežku, ki meri

$$s_0 = \frac{mg}{k} = 80 \text{ cm}.$$

Uteži nihata okoli ravnovesne lege, ki je pri medsebojni razdalji $l_0 = 100$ cm. Časovni potek kaže graf



[2 t.]

c) Vsaka od uteži niha s polovično amplitudo relativnega nihanja, $x_0 = s_0/2$ in hkrati prosto pada s pospeškom g . Gibanje zgornje uteži lahko zapišemo kot

$$s_1(t) = x_0 \cos \omega t - x_0 - \frac{1}{2}gt^2, \quad x_0 = \frac{1}{2}s_0 = 40 \text{ cm},$$

pri čemer smo odšteli x_0 , da zagotovimo, da je utež ob $t = 0$ v izhodišču koordinatnega sistema, v katerem os x kaže navzgor. Za spodnjo utež velja $s_2(t) = s_1(t) - d(t)$, pri čemer $d(t)$ opisuje relativno gibanje, prikazano na grafu, $d(t) = s_0 \cos \omega t + l_0 = 2x_0 \cos \omega t + l_0$. Sledi

$$s_2(t) = s_1(t) - d(t) = -x_0 \cos \omega t - x_0 - l_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

Vstavimo t_0 in dobimo

$$s_1(t_0) = -37,6 \text{ cm} = -38 \text{ cm}, \quad s_2(t_0) = -180,0 \text{ cm} = -180 \text{ cm}.$$

[5 t.]