

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis, kopiranje in uporabo gradiva v tem dokumentu za potrebe učiteljev pri pouku, šolskih krožkih in drugih aktivnostih na šoli, povezanimi s tekmovanji v organizaciji DMFA Slovenije. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Referenčna koda datoteke je zapisana ob vsaki strani tega dokumenta.

1. $d = 3,05$ m, $a = 9,00$ m, $h = 2,45$ m.

a) V navpični smeri žoga prosto pada. Za čas padanja t velja:

$$d = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 0,79 \text{ s}.$$

1: pravičen izraz za čas padanja

V tem času v vodoravni smeri prepotuje razdaljo $2a$ s hitrostjo

$$v_0 = \frac{2a}{t} = 22,8 \text{ m/s} \approx 23 \text{ m/s}.$$

1: pravičen izraz za v_0

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

b) Žoga prispe do mreže v polovičnem času; v tem času se spusti za

$$d_m = \frac{1}{2}g \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{gt^2}{8} = 0,76 \text{ m}$$

1: pravičen izraz za spust na mestu mreže

in se na višini $h' = d - d_m = 2,29$ m dotakne mreže.

1: pravilna numerična vrednost za višino žoge na mestu mreže

Žoga torej ne preleti mreže, saj je $h' < h$.

1: sklep

[3 t.]

c) Za novo višino d' in čas preleta igrišča t' velja:

$$d' = \frac{1}{2}gt'^2, \quad t' = \sqrt{\frac{2d'}{g}},$$

Po času $t'/2$ mora biti tik nad mrežo.

1: zapis t' in pogoja za prelet

Torej se v tem času spusti ravno za razliko med začetno višino in višino mreže:

$$d' - h = \frac{1}{2}g \left(\frac{t'}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}d', \quad h = \frac{3}{4}d',$$

1: pravičen zapis razlike višin s t'

1: pravilna zveza med h in d'

od koder lahko takoj izrazimo začetno višino:

$$d' = \frac{4}{3}h = 3,27 \text{ m} \approx 3,3 \text{ m}.$$

1: pravilna numerična vrednost

[4 t.]

2. $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $k = 100 \text{ N/m}$, $k_l = 0,3$, $k_t = 0,2$.

a) Klada se premakne, ko sila v vrivici F preseže silo lepenja.

$$F \geq m_2 g k_l,$$

1: zapis pogoja za premik klade

V mejnem primeru za raztezek vrvice h velja:

$$F = kh, \quad h = \frac{m_2 g k_l}{k} = 12 \text{ cm}.$$

Utež se torej spusti za 12 cm.

1: pravilen splošni izraz za raztezek

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

b) Na utež deluje teža in sila vrvice v nasprotni smeri. Vsota sil je enaka masi pomnoženi s pospeškom uteži:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F$$

1: pravilen zapis Newtonovega zakona in obeh sil

$$F = kh = m_2 g k_l,$$

$$a_1 = g \left(1 - \frac{m_2 k_l}{m_1} \right) = 3,9 \text{ m/s}^2.$$

1: ugotovitev, da je sila vrvice enaka kot pri a)

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

c) Takoj, ko se klada premakne, nanjo deluje sila trenja (in nič več sila lepenja).

1: ugotovitev, da trenje nadomesti lepenje

Ker je ta sila manjša od sile lepenja, se klada prične gibati pospešeno, s pospeškom a_2 :

$$m_2 a_2 = F - m_2 g k_t = m_2 g k_l - m_2 g k_t = m_2 g (k_l - k_t),$$

1: ugotovitev, da je sila vrvice v trenutku premika tolikšna kot pri a)

$$a_2 = g(k_l - k_t) = 0,98 \text{ m/s}^2 \approx 1,0 \text{ m/s}^2.$$

1: pravilen izraz za pospešek uteži

1: pravilna numerična vrednost

[4 t.]

3. $R = 9$ cm, $H = 20$ cm, $\rho_0 = 1$ kg/dm³, $h_b = 24$ cm.

a) Označimo z $V_0 = 4\pi R^3/3$ prostornino krogle s polmerom R in s H višino gladine, ko v merilnem valju ni žoge. Ko suha žoga plava, je v vodo potopljena polovica žoge, kar pomeni, da je skupna prostornina vode in polovice žoge enaka prostornini valja z višino h in osnovno ploskvijo πR^2

$$\pi R^2 H + \frac{1}{2} V_0 = \pi R^2 h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h,$$

kar nam da za višino gladine $h = H + 2R/3 = 26$ cm.

1: ugotovitev, da je potrebno prostornini vode dodati polovico prostornine krogle

1: izračunana višina gladine 26 cm ali enačba za najvišjo točko, v kateri upošteva polmer krogle

Najvišja točka na žogi je še za polmer R višje:

$$h_a = h + R = H + \frac{5R}{3} = 35 \text{ cm.}$$

1: pravi končni rezultat $h_a = 35$ cm

[3 t.]

b) Ko je žoga na dnu, so vse pore napolnjene z vodo, gladina je takrat na višini $h_b = 24$ cm. Označimo delež prostornine žoge, ki ga predstavljajo pore, z η . Ohranjanje prostornin nam da

$$\pi R^2 h_b = \pi R^2 H + (1 - \eta)V_0 = \pi R^2 H + (1 - \eta)\frac{4}{3}\pi R^3,$$

kjer drugi člen na desni predstavlja prostornino sten por v žogi oziroma tisti del prostornine potopljene žoge, ki ga ne zapolnjuje voda v porah.

1: ugotovitev, da voda zapolni v žogi prostornino por ηV_0 in da za stene ostane $(1 - \eta)V_0$ prostornine

1: pravilno zapisana enačba, iz katere se da izračunati η

Enačbo poenostavimo v $4R - 3(h_b - H) = 4\eta R$ in za η dobimo

$$\eta = 1 - \frac{3(h_b - H)}{4R} = 1 - \frac{3 \cdot 4 \text{ cm}}{4 \cdot 9 \text{ cm}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

1: pravi končni rezultat $\eta = 2/3$

[3 t.]

c) V žogi prazen prostor v porah predstavlja $\eta = 2/3$ celotne prostornine in stene por $1 - \eta = 1/3$ celotne prostornine. Masa sten por je enaka masi žoge, ki je iz podatkov pri a) delu enaka masi izpodrinjene vode $m = \rho_0 V_0/2$. Gostota sten por ρ je masa sten ulomljeno s prostornino sten, kar nam da

$$\rho = \frac{m}{(1 - \eta)V_0} = \frac{\rho_0 V_0}{2(1 - \eta)V_0} = \frac{\rho_0}{2(1 - \eta)} = \frac{1}{2/3} \rho_0 = \frac{3}{2} \rho_0 = 1,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

1: pravilno nastavljena enačba, iz katerega se da izračunati ρ

1: pravi končni rezultat $\rho = 1,5$ kg/dm³

[2 t.]

d) Ko je žoga tik pod gladino, še vedno velja ravnovesje sil, in je celotna masa v krogli s polmerom R (torej na mestu, ki ga zaseda z vodo delno prepojena žoga) enaka masi izpodrinjene vode, torej je prostornina V vode v žogi ravno tolikšna, da je masa z vodo delno prepojene žoge enaka masi vode s prostornino V_0

$$\rho_0 V_0 = (1 - \eta)\rho V_0 + \rho_0 V,$$

oziroma

$$V = V_0 \left(1 - (1 - \eta) \frac{\rho}{\rho_0} \right) = V_0 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} V_0.$$

1: pravilno nastavljena enačba bilance prostornin za lego žoge tik pod gladino

Zdaj ponovno pogledamo bilanco prostornin

$$\pi R^2 h_d = \pi R^2 H + V_0 - V = \pi R^2 H + \frac{1}{2} V_0 = \pi R^2 H + \frac{2}{3} \pi R^3,$$

kar nam da

$$h_d = H + \frac{2R}{3} = h = 26 \text{ cm.}$$

1: **pravilen končni rezultat $h_d = 26 \text{ cm}$.**

[2 t.]

Če tekmovalac do rezultata $h_d = h = 26 \text{ cm}$ pride na podlagi pravilnega razmisleka (opisano spodaj), dobi obe točki.

Do istega rezultata lahko pridemo z razmislekom. Ko voda postopno pronica v pore, žoga plava, a se njena najvišja točka spušča proti gladini. Če si kot "žogo" mislimo samo snov, ki tvori stene por, je masa žoge konstantna in se sila vzgona ne spreminja, dokler žoga plava na gladini. Na začetku vodo izpodriva del sten por, ki je pod gladino, in zrak, ki je v porah pod gladino. Ko voda vdira v pore, se prostornina zraka pod gladino zmanjšuje, da se ohranja sila vzgona, žoga tone in vodo izpodriva vse več sten por. Gladina vode se ne spreminja, saj vsak mililiter zraka pod gladino nadomesti mililiter snovi, ki tvorijo stene por. Zato je gladina vode, dokler žoga plava, na isti višini kot pri vprašanju a) in je enaka $h = 26 \text{ cm}$. Gladina se začne spuščati šele, ko se žoga potaplja pod gladino, saj takrat zraka, ki ga iztisne iz por voda, ne nadomešča več snov, iz katere so stene por, ker je ta snov že vsa pod vodno gladino.

1. $S_n = 20 \text{ m}^2$, $S_z = 60 \text{ m}^2$, $S_s = 64 \text{ m}^2$, $d_n = 15 \text{ cm}$, $d_z = 20 \text{ cm}$, $T_z = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_s = 24 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_n = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\lambda_n = 1,2 \text{ W/mK}$, $\lambda_n = 0,07 \text{ W/mK}$, $\lambda_{Fe} = 80 \text{ W/mK}$, $S_{Fe} = 10 \text{ cm}^2$.

a) Moč peči mora biti enaka toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop, skozi notranjo steno pa ni izmenjave toplote, ker sta stanovanji pri enaki temperaturi:

$$P = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_s - T_z)}{d_z} = 1040 \text{ W}.$$

1: ugotovitev, da ni prevajanja skozi notranjo steno in da prispevajo le zunanje stene in strop

1: pravilen izraz za moč

1: pravilna numerična vrednost

[3 t.]

b) Ko se temperatura Matičevega stanovanja zniža na T_n , steče toplotni tok tudi iz sosednjega stanovanja, ki prispeva k ogrevanju Matičevega stanovanja, tok skozi zunanje stene in strop pa se zmanjša:

$$P' + \frac{\lambda_n S_n (T_s - T_n)}{d_n} = \frac{\lambda_z (S_z + S_s) (T_n - T_z)}{d_z}.$$

1: pravilen zapis bilance z upoštevanjem notranje stene

Moč peči je v tem primeru enaka

$$P' = \frac{\lambda_z (S_z + S_s) (T_n - T_z)}{d_z} - \frac{\lambda_n S_n (T_s - T_n)}{d_n} = 228 \text{ W},$$

1: pravilen izraz za moč

kar predstavlja znižanje

$$\eta = \frac{P - P'}{P} = 78 \text{ } \%$$

1: pravilna numerična vrednost za izkoristek

[3 t.]

c) Skozi posamezno palico teče v Matičevo stanovanje dodatni toplotni tok

$$P_1 = \frac{\lambda_{Fe} S_1 (T_n - T_z)}{d_n} = 2,13 \text{ W}.$$

V mejnem primeru je toplotni tok iz sosednjega stanovanja skozi notranjo steno in N palic enak toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop:

$$\frac{\lambda_n (S_n - N S_1) (T_s - T_n)}{d_n} + N P_1 = \frac{\lambda_z (S_z + S_s) (T_n - T_z)}{d_z},$$

pri čemer smo upoštevali, da se površina notranje stene zmanjša za $N S_1$. Izraz na levi preuredimo:

$$\frac{\lambda_n (S_n - N S_1) (T_s - T_n)}{d_n} + \frac{\lambda_{Fe} N S_1 (T_n - T_z)}{d_n} = \frac{\lambda_n S_n (T_s - T_n)}{d_n} + \frac{(\lambda_{Fe} - \lambda_n) N S_1 (T_s - T_n)}{d_n}.$$

1: pravilna bilanca tokov

1: upošteva zmanjšanje površine notranje stene

Izluščimo

$$\begin{aligned} N &= \frac{d_n}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)S_1(T_s - T_n)} \left(\frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z} - \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} \right) \\ &= \frac{d_n P'}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)S_1(T_s - T_n)} = \frac{P'}{P_1} \frac{\lambda_{Fe}}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)} = 109. \end{aligned}$$

1: pravilen izraz za N

1: pravilna numerična vrednost

Ker je v našem primeru $\lambda_{Fe} \gg \lambda_n$, lahko končni izraz poenostavimo

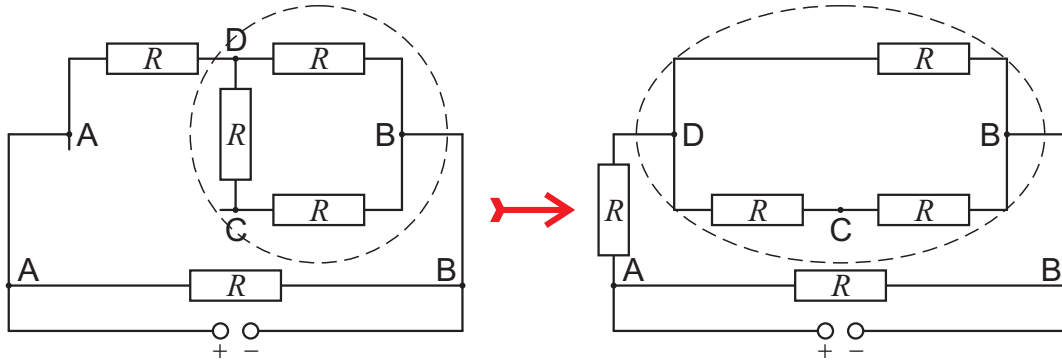
$$N \approx \frac{P'}{P_1} = 108.$$

[4 t.]

Priznamo vse 4 točke za zadnji rezultat, če je podana (naknadna) utemeljitev, da smo lahko zmanjšanje površine notranje stene zanemarili, ker je $NS_1 \ll S_n$, sicer le 3 t.

2. $U = 0,5 \text{ V}$, $I_a = 400 \text{ mA}$, $R_1 = 2,8 \Omega$.

a) Nadomestno vezje, ko je vodnik med ogliščema A in C prekinjen, kaže slika levo. Na sliki desno je vezje preoblikovano, da se nazorneje vidi, kateri uporniki so vezani vzporedno in kateri zaporedno. Točke A, B, C in D na shemi vezave ustrezajo enako označenim ogliščem na sliki tetraedra v nalogi. Na sliki levo je posebej označeno, da sta obe točki A na tetraedru ista točka, enako velja za točki B.



1: ugotovitev, da je vezava ekvivalentna shemi na desni sliki

Upor črtkano obkroženega dela je

$$R'_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R} \right)^{-1} = \frac{2R}{3}.$$

Za nadomestni upor celotnega vezja dobimo

$$R_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + R'_a} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + 2R/3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{3}{5R} \right)^{-1} = \left(\frac{5+3}{5R} \right)^{-1} = \frac{5R}{8}.$$

1: določitev nadomestnega upora vezja ali zveza med izmerjenim tokom I_a in U , ki vsebuje samo upor enega vodnika R in številke

Podatki v nalogi nam dajo

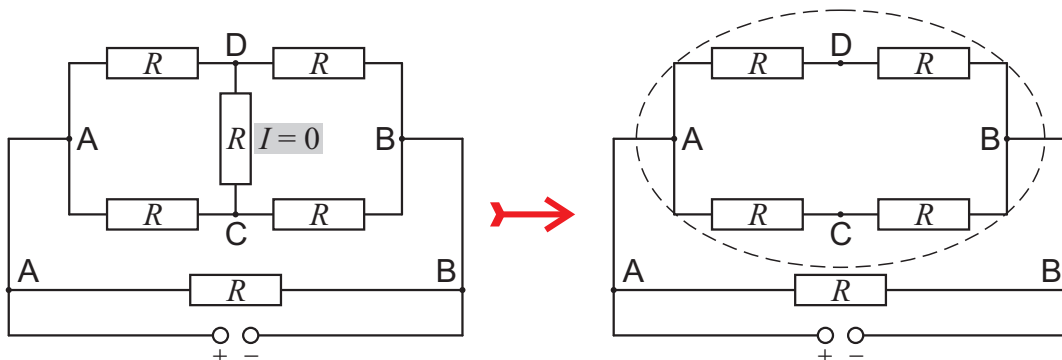
$$U = I_a R_a = \frac{5I_a R}{8} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{8U}{5I_a} = 2 \Omega.$$

1: pravilna končni izraz in vrednost $R = 2 \Omega$
[3 t.]

b) Ker so vsi vodniki enaki, zaradi simetrije po vodniku med ogliščema C in D tok ne teče (slika levo), saj sta na enakem potencialu.

1: ugotovitev, da zaradi simetrije tok med ogliščema C in D ne teče

Vezje se zato poenostavi v vezje na sliki desno.



Upor črtkano obkroženega dela na sliki desno je

$$R'_b = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = R.$$

1: pravilna nadomestna shema vezave in ugotovitev $R'_b = R$

Nadomestni upor celotnega vezja je

$$R_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'_b} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2}.$$

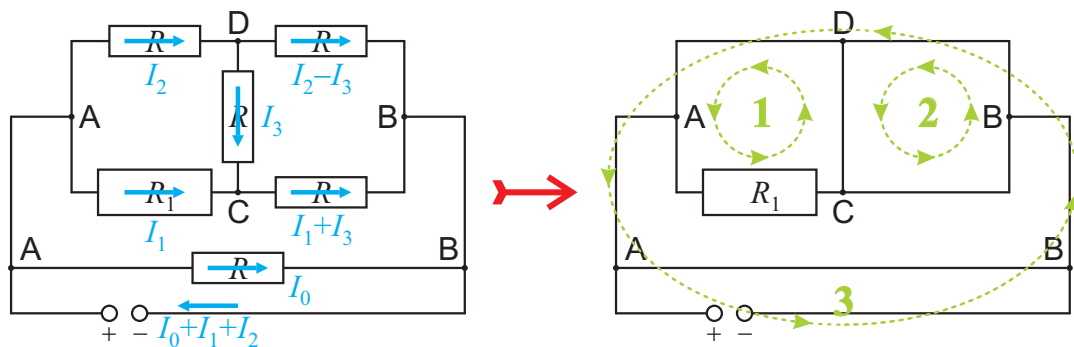
Iskani tok je

$$I_b = \frac{U}{R_b} = 500 \text{ mA}.$$

1: pravilen končni rezultat $I_b = 500 \text{ mA}$.

[3 t.]

c) Simetrije ni več, ker je upor $R_1 = 2,8 \Omega$ med ogliščema A in C različen od uporov vodnikov med ostalimi pari oglišč R , kot kaže shema vezja levo. Označeni so tokovi skozi posamezne dele vezja. Iskani tok skozi vir je $I_c = I_0 + I_1 + I_2$.



1: smiselno označeni tokovi, podobno kot je narejeno na shemi levo

Tok I_0 dobimo zlahka $I_0 = U/R = 250 \text{ mA}$.

Tokova I_1 in I_2 , ki ju moramo še določiti, poiščemo z uporabo Kirchhoffovega izreka o napetostih po zaključenih zankah, pri čemer so zanke, ki jih uporabimo, oštevilčene na sliki desno. V enačbah se pojavi tudi tok I_3 v vodniku med ogliščema C in D, ki zaradi $R_1 \neq R$ sedaj ni nič. Pri zapisu enačb za napetosti se držimo dogovora, da v smeri toka potencial na uporniku pade oziroma je napetost negativna. Zanke 1 (A-C-D-A), 2 (C-B-D-C) in 3 (B-D-A-vir-B) na desni sliki dajo po vrsti enačbe

$$-I_1 R_1 + I_3 R + I_2 R = 0, \quad (1)$$

$$-(I_1 + I_3)R + (I_2 - I_3)R - I_3 R = 0, \quad (2)$$

$$(I_2 - I_3)R + I_2 R - U = 0. \quad (3)$$

1: za neodvisne zanke zapisane enačbe za napetosti

Z vpeljavo $x \equiv R_1/R = 1,4$ in upoštevajoč $U/R = I_0$ dobimo preglednejši zapis istih enačb

$$xI_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad (1)$$

$$I_1 - I_2 + 3I_3 = 0, \quad (2)$$

$$2I_2 - I_3 = I_0. \quad (3)$$

Iz (2) izrazimo $I_1 = I_2 - 3I_3$ in rezultat nesemo v (1), kar nam da

$$(x - 1)I_2 - (3x + 1)I_3 = 0$$

oziroma

$$I_2 = \frac{3x+1}{x-1}I_3. \quad (1+2)$$

1: reševanje enačb za tokove in vsaj en korak, ki zmanjša število neznanih tokov s 3 (I_1, I_2, I_3) oziroma 4 (I_1, I_2, I_3, I_0) za eno neznanko, ki ni I_0

Ko (1+2) vstavimo v (3) dobimo

$$2\frac{3x+1}{x-1}I_3 - I_3 = I_0 \quad \implies \quad I_3 = \frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{0,4}{10}I_0 = \frac{1}{25}I_0 = 10 \text{ mA}.$$

Zdaj iz (1+2) izračunamo

$$I_2 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 = \frac{5,2}{10}I_0 = \frac{13}{25}I_0 = 130 \text{ mA}$$

in nato iz (2) še

$$I_1 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 - 3\frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{4}{5x+3}I_0 = \frac{2}{5}I_0 = 100 \text{ mA}.$$

Za tok skozi vir dobimo

$$I_c = I_0 + I_1 + I_2 = \left(1 + \frac{4}{5x+3} + \frac{3x+1}{5x+3}\right)I_0 = \frac{8(x+1)}{5x+3}I_0 = \frac{48}{25}I_0 = 480 \text{ mA}.$$

1: pravilen rezultat za tok skoti vir $I_c = 480 \text{ mA}$
[4 t.]

3. $a = 10 \text{ cm}$, $d = 0,1 \text{ mm}$, $U = 1 \text{ kV}$, $b = a = 10 \text{ cm}$, $\varepsilon = 3$, $v = 1 \text{ m/s}$.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3} C_0,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2 / d = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0,89 \text{ nF}$ in je $C_1 = 0,30 \text{ nF}$.

1: **pravilen izraz za kapaciteto praznega kondenzatorja**

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}} \right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon \varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 = \frac{3}{7} C_0 = 0,38 \text{ nF}.$$

1: **pravilno nastavljen izraz (recipročna vrednost skupne kapacitete je vsota recipročnih vrednosti kapacitet) za kapaciteto dveh zaporedno vezanih kondenzatorjev**

1: **pravilen izraz za kapaciteto z delom traku z dielektričnostjo ε polnega kondenzatorja**

1: **pravilne vrednosti obeh kapacitet $C_1 = 0,30 \text{ nF}$ in $C_\varepsilon = 0,38 \text{ nF}$**

[4 t.]

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε , ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\varepsilon, x} = \frac{x}{a} C_\varepsilon \quad \text{in} \quad C_{1, (a-x)} = \frac{a-x}{a} C_1.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\varepsilon, x} + C_{1, (a-x)} = \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 + \frac{a-x}{a} \cdot \frac{1}{3} C_0 = \frac{1}{3} C_0 + \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0$$

1: **ugotovitev, da je potrebno zapisati skupno kapaciteto vzporedno vezanih kondenzatorjev, kar pomeni seštevanje kapacitet**

Ko se trak giblje s hitrostjo v , je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε . Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0 = 10 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{2}{21} C_0 = 0,848 \text{ nF/s} \approx 0,85 \text{ nF/s}.$$

1: **ugotovitev, da se navidezno spreminja velikost plošč posameznega kondenzatorja – enemu kot $x(t)$ in drugemu kot $a - x(t)$ – in da je spreminjanje skupne kapacitete linearna funkcija časa**

Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U , se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U \frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} UC_0 = \pm 0,848 \mu\text{A} \approx \pm 0,85 \mu\text{A}.$$

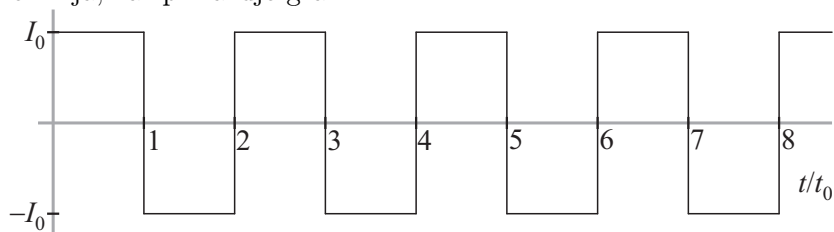
1: pravilna zveza med intervalno linearnim spreminjanjem kapacitete s časom in posledično intervalno konstantnim tokom skozi ampermeter

Ampermeter kaže tok velikosti $I_0 = 0,85 \mu\text{A}$.

1: pravilen končni rezultat $I_0 = 0,85 \mu\text{A}$

[4 t.]

c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0,1$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε , tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf



1: pravilna oblika grafa: pravokoten periodičen, enaki polperiodi, enaka amplituda navzgor in navzdol

1: pravilne vrednosti, perioda je $2t_0 = 0,2$ s, amplituda je $I_0 = 0,85 \mu\text{A}$

[2 t.]

1. razdalja Sonce-Zemlja $d = 1,5 \cdot 10^8$ km, masa Sonca $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Krožno frekvenco kroženja Zemlje okoli Sonca izpeljemo iz Newtonovega zakona:

$$m_Z a_r = m_Z \Omega^2 d = \frac{G m_Z m_S}{d^2}, \quad \Omega^2 = \frac{G m_S}{d^3}.$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje Zemlje okoli Sonca

Telo z maso m v L2 naj kroži z enako frekvenco Ω na razdalji l od Zemlje in $d+l$ od Sonca:

$$m(d+l)\Omega^2 = \frac{G m m_S}{(d+l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2}.$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje telesa v L2 okoli Sonca

Upoštevamo gornji izraz za Ω^2 in okrajšamo m in G :

$$\frac{m_S(d+l)}{d^3} = \frac{m_S}{(d+l)^2} + \frac{m_Z}{l^2}$$

1: pravilna zveza, ki povezuje masi Sonca in Zemlje z obema razdaljama

Izluščimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2} &= \frac{m_S}{m_Z} \left(\frac{d+l}{d^3} - \frac{1}{(d+l)^2} \right) = \frac{m_S}{m_Z} \frac{(d+l)^3 - d^3}{d^3(d+l)^2} = \frac{m_S}{m_Z} \frac{3d^2l + 3dl^2 + l^3}{d^3(d+l)^2} \\ &\approx \frac{m_S}{m_Z} \frac{3d^2l}{d^3d^2}. \end{aligned}$$

Upoštevamo $l \ll d$ in v števcu zanemarimo člena $3dl^2$ in l^3 v primerjavi z $3d^2l$ in v imenovalcu l v primerjavi z d .

1: tekmovalec se zaveda, da mora izraz za l razviti po majhnih l/d

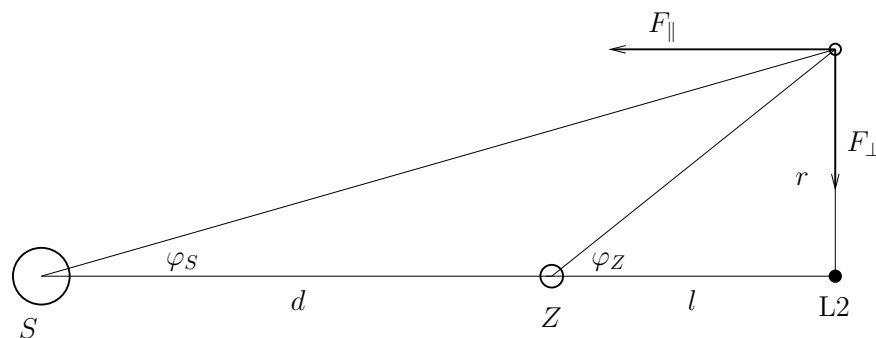
Po preureditvi sledi

$$\frac{1}{l^2} = \frac{m_S}{m_Z} \frac{3l}{d^3}, \quad \frac{d^3}{l^3} = \frac{3m_S}{m_Z}, \quad l = d \sqrt[3]{\frac{m_Z}{3m_S}} = 1,0 \cdot 10^{-2} d = 1,5 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

1: pravilen končni izraz za l

[5 t.]

b) Na sliki so prikazane komponente rezultante sil na teleskop na oddaljenosti r od točke L2. Predpostavljamo, da je r mnogo manjši od l . (Na sliki je zaradi preglednosti razdalja r narisana pretirano velika.)



Komponenta vsote sil, vzporedna z zveznico Sonce-Zemlja, je enaka:

$$F_{\parallel} = \frac{G m m_S}{(d+l)^2} \cos \varphi_S + \frac{G m m_Z}{l^2} \cos \varphi_Z \approx \frac{G m m_S}{(d+l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2},$$

pri čemer smo upoštevali $r \ll l$ in $r \ll d$, kar pomeni, da sta kota zelo majhna in velja $\cos \varphi_Z \approx 1$ in $\cos \varphi_S \approx 1$. Sila je praktično enaka kot v točki L2, kar zagotavlja, da je obhodni čas teleskopa okoli Sonca enak Zemljinemu. Pomeni tudi, da mora teleskop krožiti na konstantni razdalji glede na Zemljo in glede na Sonce, torej v ravnini, pravokotni na zveznico Sonce-Zemlja-L2.

1: tekmovalec se zaveda, da teleskop kroži okoli L2 v ravnini, pravokotni na zveznico

Za kroženje okoli L2 je odgovorna komponenta vsote gravitacijskih sil, pravokotna na zveznico:

$$F_{\perp} = \frac{Gmm_S}{(d+l)^2} \sin \varphi_S + \frac{Gmm_Z}{l^2} \sin \varphi_Z$$

1: pravi izraz za komponenti sil, ki sta odgovorni za kroženje okoli L2

$$F_{\perp} \approx \frac{Gmm_S}{(d+l)^2} \tan \varphi_S + \frac{Gmm_Z}{l^2} \tan \varphi_Z = \frac{Gmm_S}{(d+l)^2} \frac{r}{(d+l)} + \frac{Gmm_Z}{l^2} \frac{r}{l}.$$

Ker so koti po predpostavki majhni, smo lahko sinuse nadomestili s tangensi. Upoštevajmo še $l \ll d$ in izraz za l , izpeljan pri a):

$$F_{\perp} = \frac{Gmm_S r}{d^3} + \frac{Gmm_Z r}{l^3} = \frac{Gmm_S r}{d^3} + \frac{3Gmm_S r}{d^3} = \frac{4Gmm_S r}{d^3}.$$

1: komponenti sil, izraženi z r

Zapišimo še Newtonov zakon za kroženje s frekvenco ω_{\perp} :

$$ma_r = m\omega_{\perp}^2 r = \frac{4Gmm_S r}{d^3},$$

1: zapis Newtonovega zakona za kroženje okoli L2

od koder takoj sledi

$$\omega_{\perp}^2 = \frac{4Gm_S}{d^3} = 4\Omega^2,$$

oziroma

$$\omega_{\perp} = 2\Omega, \quad \text{ali} \quad t_{\perp} = \frac{1}{2}T_Z = 6 \text{ mesecev},$$

pri čemer je T_Z zemeljsko leto.

1: pravilna povezava z obhodnim časom Zemlje

[5 t.]

2. $d = 5 \text{ cm}$, $\varphi = 15^\circ$, $k_0 = 0,3$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $\rho = 2 \text{ kg/dm}^3$, $\lambda = 1,3 \text{ W/m K}$.

a) Plošča se giblje z enakomerno hitrostjo, ko dinamična sila uravnovesi trenje:

$$mg \sin \varphi = kmg \cos \varphi,$$

1: **zapis pogoja za enakomerno gibanje plošče**

od koder sledi za koeficient trenja $k = \tan \varphi$,

in iz podane enačbe za odvisnost koeficienta trenja od temperature:

$$T = \frac{k_0 T_0}{k} = \frac{k_0 T_0}{\tan \varphi} = 336 \text{ K} = 63 \text{ }^\circ\text{C}.$$

1: **pravilen izraz za T**

1: **pravilna numerična vrednost**

[3 t.]

b) Ko plošča doseže stacionarno stanje, se temperatura spodnje ploskve T ustali, in polovica toplote, ki se sprošča na stiku, se prevaja skozi ploščo do zgornje ploskve na temperature T_0 .

2: **pravilen opis bilance tokov v stacionarnem stanju (lahko tudi implicitno)**

Polovica sproščene toplote je enaka polovici dela trenja:

$$P_{tr} = \frac{1}{2} F_{tr} v = \frac{1}{2} k(T) mg \cos \varphi v$$

1: **pravilen izraz za sproščeno toploto**

in je enaka toplotnemu toku skozi ploščo:

$$P_{prev} = \frac{\lambda S (T - T_0)}{d},$$

kjer je S površina plošče.

1: **pravilen izraz za toplotni tok skozi ploščo**

Velja $m = \rho S d$, temperatura spodnje ploskve T in koeficient trenja k pa sta povezana z zvezo, izpeljano pri a). Iz $P_{tr} = P_{prev}$ sledi:

$$\frac{1}{2} k \rho S d g \cos \varphi v = \frac{\lambda S (T - T_0)}{d}.$$

1: **pravilen zapis bilance tokov**

Velja $k = \tan \varphi$ in sledi

$$v = \frac{2\lambda(T - T_0)}{d^2 \rho g \tan \varphi \cos \varphi} = \frac{2\lambda(T - T_0)}{d^2 \rho g \sin \varphi} = 7,1 \text{ m/s} \approx 7 \text{ m/s}.$$

1: **pravilen izraz za v**

1: **pravilna numerična vrednost**

[7 t.]

3. $a = 10 \text{ cm}$, $d = 0,1 \text{ mm}$, $U = 1 \text{ kV}$, $b = a = 10 \text{ cm}$, $\varepsilon = 3$, $v = 2 \text{ m/s}$.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3} C_0,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2 / d = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0,89 \text{ nF}$ in je $C_1 = 0,30 \text{ nF}$.

1: **pravilen izraz za kapaciteto praznega kondenzatorja**

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}} \right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon \varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 = \frac{3}{7} C_0 = 0,38 \text{ nF}.$$

1: **pravilen izraz za kapaciteto z delom traku z dielektričnostjo ε polnega kondenzatorja**

1: **pravilne vrednosti obeh kapacitet $C_1 = 0,30 \text{ nF}$ in $C_\varepsilon = 0,38 \text{ nF}$**

[3 t.]

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε , ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\varepsilon, x} = \frac{x}{a} C_\varepsilon \quad \text{in} \quad C_{1, (a-x)} = \frac{a-x}{a} C_1.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\varepsilon, x} + C_{1, (a-x)} = \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 + \frac{a-x}{a} \cdot \frac{1}{3} C_0 = \frac{1}{3} C_0 + \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0.$$

1: **ugotovitev, da je potrebno zapisati skupno kapaciteto vzporedno vezanih kondenzatorjev, kar pomeni seštevanje kapacitet**

Ko se trak giblje s hitrostjo v , je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε . Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0 = 20 \text{ s}^{-1} \cdot \frac{2}{21} C_0 = 1,695 \text{ nF/s} \approx 1,70 \text{ nF/s}.$$

1: **ugotovitev, da se navidezno spreminja velikost plošč posameznega kondenzatorja – enemu kot $x(t)$ in drugemu kot $a - x(t)$ – in da je spreminjanje skupne kapacitete linearna funkcija časa**

Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U , se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U \frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} UC_0 = \pm 1,695 \mu\text{A} \approx \pm 1,70 \mu\text{A}.$$

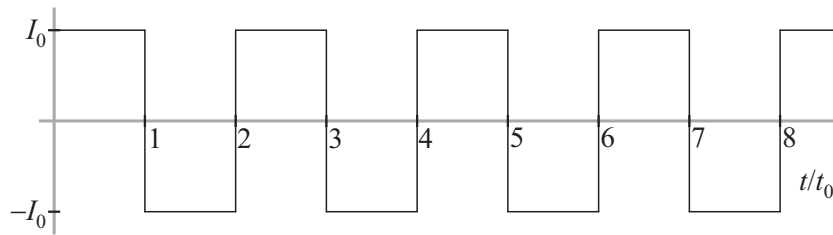
1: **pravilna zveza med intervalno linearnim spreminjanjem kapacitete s časom in posledično intervalno konstantnim tokom skozi ampermeter**

Ampermeter kaže tok velikosti $I_0 = 1,70 \mu\text{A}$.

1: **pravilen končni rezultat $I_0 = 1,70 \mu\text{A}$**

[4 t.]

c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0,05$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε , tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf

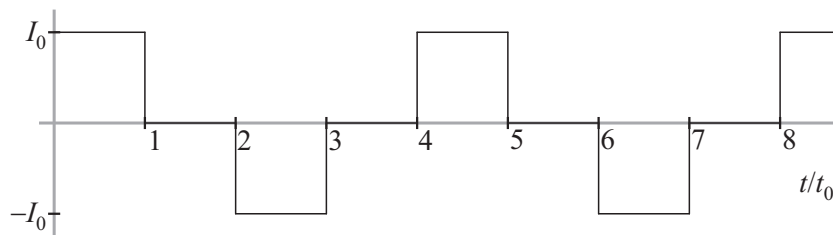


1: **pravilna oblika grafa: pravokoten periodičen, enaki polperiodi, enaka amplituda navzgor in navzdol**

1: **pravilne vrednosti, perioda je $2t_0 = 0,2$ s, amplituda je $I_0 = 1,70 \mu\text{A}$**

[2 t.]

d) Ko je $b = 2a$ se pojavijo poleg intervalov, v katerih kapaciteta s časom linearno narašča ali pada, tudi intervali, ko se kapaciteta ne spreminja, zato je takrat tudi tok skozi ampermeter enak nič. Intervalu konstantnega toka v trajanju $t_0 = a/v = 0,05$ s sledi interval enake dolžine, ko je tok enak nič in je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo ε . V naslednjem intervalu dolžine t_0 ($2t_0 < t < 3t_0$) je tok enako velik kot v prvem intervalu, a negativen. Sledi interval, ko je tok enak nič, nato se vse skupaj ponovi. Amplituda toka je enaka kot pri c), $I = \pm I_0$. Časovna odvisnost je grafično prikazana na sliki



1: **pravilna oblika grafa glede na graf pri c): med zaporednima intervaloma s konstantnim tokom $\pm I_0$ je vedno časovno enako dolg interval s tokom nič**

[1 t.]