UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Tomas Rode

Osnovni izreki teorije blaginje

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Matija Vidmar

Ljubljana, 2020

KAZALO

Osnovni izreki teorije blaginje

POVZETEK

V ekonomiji delovanje trga pogosto obravnavamo preko modeliranja ravnanja ekonomskih subjektov, ki v njem sodelujejo. Tak je tudi pristop teorije blaginje; predpostavlja potrošnike, ki maksimizirajo svoje preference, in podjetja, ki maksimizirajo dobiček. Teorija blaginje ponuja okvir za premišljevanje o zaželenosti dobljenih ravnovesij. V delu diplomskega seminarja opredelimo njene osnovne pojme in se osredotočimo na tri osnovne izreke teorije blaginje. Prva dva izreka teorije blaginje govorita o odnosu med cenovnimi ravnovesji in Pareto optimalnostjo. Poleg Pareto optimalnosti je pomemben kriterij, uporabljen pri sojenju o stanjih v gospodarstvu, dan s funkcijo družbene blaginje. Te koncepte dopolnjuje formulacija tretjega izreka, izreka Arrowa o nemogočem, ki predstavi nekatere neobhodne omejitve pri agregiranju preferenc posameznikov.

Fundamental Theorems of Welfare Theory

ABSTRACT

In economics, the functioning of the market is often discussed through modeling the behavior of economic entities that participate in it. Such is the approach of welfare theory; it assumes consumers that maximize their preferences and businesses that maximize profits. The theory of welfare economics provides a framework for thinking about the desirability of the resulting equilibria. In this work we define its basic concepts and focus on three basic theorems of welfare economics. The first two theorems of welfare economics speak to the relationship between price equilibria and Pareto optimality. In addition to Pareto optimality, an important criterion useful in judging the state of the economy is given by the social welfare function. These concepts are complemented by the formulation of the third theorem, Arrow's impossibility theorem, which presents some necessary limitations in aggregating preferences of individuals.

Math. Subj. Class. (2020): 91B15

Ključne besede: cenovno ravnovesje, Pareto optimalnost, funkcija družbene blaginje, Arrow.

Keywords: price equilibrium, Pareto optimality, social welfare function, Arrow.

1. UVOD

Teorija blaginje je veja ekonomske teorije, ki proučuje zaželenost različnih stanj v gospodarstvu, pri čemer se osredotoča predvsem na mikroekonomsko ravnanje subjektov na trgu. Njen cilj je formulacija ekonomskih in matematičnih orodij, preko katerih lahko sodimo o omenjenih stanjih. Eden ključnih konceptov za obravnavo stanj v gospodarstvu je Pareto optimalnost. Dano stanje je Pareto optimalno, če nobeden od subjektov ne more s prehodom v kakšno drugo stanje povečati svoje dobrobiti, ne da bi pri tem koga oškodoval. Velik del teorije blaginje sloni na ideji "funkcije družbene blaginje", ki predstavlja, kar imamo za dobro in kar želimo v družbi maksimizirati [13]. Posredno nam to področje daje enega od kriterijev za ekonomsko odločanje, saj lahko ukrepe primerjamo po predvidenih učinkih na družbeno blaginjo.

Cilj diplomske naloge je obravnava treh osnovnih izrekov teorije blaginje. Naloga je, vključno z uvodom, razdeljena na osem delov. V drugem delu predstavimo osnovne pojme, povezane z obravnavo različnih stanj gospodarstva, in model trga, ki ga predlaga teorija blaginje. V tretjem delu formuliramo in dokažemo prvi osnovni izrek teorije blaginje, ki govori o tem, kdaj so stanja, ki izhajajo iz ravnovesja na trgu, Pareto optimalna. V četrtem delu storimo enako še za drugi osnovni izrek, ki nam da pogoje, pod katerimi lahko vsako Pareto optimalno stanje na privzetem trgu dobimo iz ravnovesja s specifično obliko prerazporejanja dobrin. V petem delu diplomske naloge opredelimo koncept funkcije družbene blaginje. V naslednjem razdelku obravnavamo izrek Arrowa o nemogočem, ki govori o skupinskem odločanju in predstavi omejitve obravnave gospodarskih stanj s funkcijo družbene blaginje. Sedmi del govori o nadgradnji predstavljenih orodij in pomanjkljivostih teorije blaginje. Sledi še zaključek diplomske naloge, kjer povzamemo njene ugotovitve.

2. MODEL TRGA IN OSNOVNI POJMI

Vzemimo trg z I potrošniki, J podjetji in L izdelki, kjer sta I in L iz $\mathbb{N}$, J pa iz $\mathbb{N}_0$. Za vsakega potrošnika $i = 1, \dots, I$ imamo potrošno množico $X_i \subset \mathbb{R}^L$ in preferenčno relacijo $\succeq_i$ na X_i. Preferenčna relacija je formalno podmnožica parov iz dane množice; $\succeq_i \subset X_i \times X_i$. Namesto $(x, y) \in \succeq_i$ zaradi nazornosti pišemo $x \succeq_i y$ in to interpretiramo tako, da i-ti potrošnik x preferira pred y (ima x raje od y) ali je med njima indiferenten. Potrošnik je med dvema potrošnima vektorjema x in y indiferenten, kadar velja $x \succeq_i y$ in hkrati tudi $y \succeq_i x$. Indifentnost potrošnika do teh vektorjev označujemo z $x \sim_i y$. Stroga preferenca pa nastopi, kadar imamo navadno preferenco in ne velja indiferentnost. Pišemo $x \succ_i y \iff (x \succeq_i y) \wedge \neg(x \sim_i y)$. Omejitve, ki izhajajo iz potrošne množice, si lahko tolmačimo kot posledice narave izdelkov (potrošimo na primer lahko samo celo število avtomobilov), pravne ureditve in drugih omejujočih okoliščin. Proračunske omejitve ne zmanjšujejo množic X_i, saj jih bomo upoštevali kasneje (pri definiciji cenovnih ravnovesij). Privzemimo, da so *vse preferenčne relacije v nadaljevanju racionalne*, v smislu sledeče definicije.

Definicija 2.1 (Racionalnost preferenc)**.** Preferenčna relacija $\succeq$ na dani množici X je tranzitivna, če za $\forall a \in X, \forall b \in X, \forall c \in X : a \succeq b \wedge b \succeq c \implies a \succeq c$. Relacija je sovisna, če za $\forall a \in X, \forall b \in X$ velja: $a \succeq b \vee b \succeq a$. Preferenčna relacija je racionalna, če je tranzitivna in sovisna.

Primer 2.2. Naj bodo na danem trgu trije potrošniki, torej naj bo $I = 3$, in trije izdelki (maslo, topovi in zimski plašči), torej je $L = 3$. Smiselno je določiti, da za potrošne množice velja $X_i \subsetneq \mathbb{R}^3$, ker lahko kupimo samo nenegativno število omenjenih izdelkov in samo celo število plaščev in avtomobilov. Zamislimo si lahko tudi, da je tretji potrošnik bivši kriminalec in da mu država zato prepoveduje trgovanje s topovi. Dobimo torej še manjšo potrošno množico; za $i \in \{1, 2\}$ je $X_i \subset \mathbb{R}_0^+ \times (\mathbb{Z}_0^+)^2$, za tretjega potrošnika pa velja $X_3 \subset \mathbb{R}_0^+ \times \{0\} \times \mathbb{Z}_0^+$. Vzemimo zdaj tri potrošne vektorje $\{[1, 0, 5], [2, 7, 0], [4, 1, 3]\} \subset X_1$ (pri maslu določimo, da je merska enota kilogram). Naj velja, da prvi potrošnik preferira potrošnjo $[1, 0, 5]$ pred potrošnjo $[2, 7, 0]$ in portošnjo $[2, 7, 0]$ pred $[4, 1, 3]$. To zapišemo s preferenčno relacijo: $[1, 0, 5] \succeq_1 [2, 7, 0]$ in $[2, 7, 0] \succeq_1 [4, 1, 3]$. Zaradi tranzitivnosti velja tudi $[1, 0, 5] \succeq_1 [4, 1, 3]$. $\diamondsuit$

Za vsako podjetje $j = 1, \ldots, J$ imamo produkcijsko množico $Y_j \subset \mathbb{R}^L$ vseh produkcijskih vektorjev, ki tvorijo uresničljiv načrt za podjetje. Naj bodo Y_j neprazne in naj velja, da *ni brezplačnega kosila*, torej da je vsak nenegativen produkcijski vektor ničeln; $(y \in Y \wedge y \geq 0) \implies y = 0$. To pomeni, da iz nič ni mogoče ustvariti ničesar. Če imamo $J = 0$, na trgu ni proizvodnje in modeliramo le blagovno menjavo med potrošniki.

Primer 2.3. Pravilo, da na trgu ni brezplačnega kosila, lahko ilustriramo s sledečim primerom. Imejmo na trgu eno podjetje, v našem primeru pekarno, in tri proizvode – moko, vodo in kruh. Proizvodna množica podjetja, Y_1, ne bo vsebovala vektorjev, kot je $[0, 0, 1]$. Za proizvodnjo kruha pekarna porablja moko in vodo, torej bo Y_1 na primer vsebovala vektor $[-1, -1, 2]$. $\diamondsuit$

Začetno skupno stanje izdelkov v lasti potrošnikov je določeno z vektorjem $\overline{\omega} \in \mathbb{R}^L$, $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \overline{\omega}_L)$. Za vsakega potrošnika i imamo začetno premoženje izdelkov $\omega_i \in \mathbb{R}^L$. Veljati mora: $\overline{\omega} = \sum_i \omega_i$. Potrošniki so tudi lastniki podjetij, torej ima poleg izdelkov vsak potrošnik i delež $\theta_{ij} \in [0{,}1]$ v podjetju j. Veljati mora $\sum_i \theta_{ij} = 1$ za vsako podjetje j. Pri modelu trga privzamemo, da je trg *brez trenja* (nimamo transakcijskih stroškov) in da ima vsak izdelek svojo ceno. Privzemamo tudi nezmožnost vplivanja na ceno s strani ekonomskih agentov (to imenujemo *prilagajanje agentov cenam*).

Definicija 2.4 (Alokacija)**.** Alokacija $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J)$ je specifikacija potrošnega vektorja $x_i \in X_i$ za vsakega potrošnika $i = 1, \ldots, I$ in produkcijskega vektorja $y_j \in Y_j$ za vsako podjetje $j = 1, \ldots, J$. Kadar je $J = 0$, je dovolj specificirati samo potrošni vektor za vsakega posameznika.

Definicija 2.5 (Uresničljiva alokacija)**.** Alokacija je uresničljiva, če velja $\sum_i x_{i\ell} = \overline{\omega}_\ell + \sum_j y_{j\ell}$ za vsak proizvod $\ell = 1, \ldots, L$; torej, če velja $\sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j$. V primeru trga brez proizvodnje vzamemo, da je prazna vsota ničelna.

Definicija 2.6 (Pareto dominacija in Pareto optimalnost)**.** Uresničljiva alokacija (x, y) je Pareto optimalna, če ne obstaja uresničljiva alokacija (x', y'), ki jo Pareto dominira. Alokacija (x', y') Pareto dominira alokacijo (x, y), če je $x'_i \succeq_i x_i$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, I$ in $x'_i \succ_i x_i$ za vsaj en i.

Pareto optimalnost je zelo uporaben koncept za ocenjevanje ustreznosti izbrane alokacije. Alokacija, ki ni Pareto optimalna, velja za nezaželeno z vidika družbene blaginje, saj obstaja alokacija, ki jo vsaj kak posameznik strogo preferira pred neoptimalno, pri čemer so ostali do nje vsaj indiferentni. Pomembno pa je poudariti, da je Pareto optimalnih alokacij lahko več in da niso vse enakovredne. Oglejmo si primer.

Primer 2.7. Vzemimo trg brez proizvodnje z dvema potrošnikoma in eno dobrino. Vzemimo, da sta za oba potrošnika preferenci dani z $x \succ_{1,2} y \iff x > y$. Alokacija, kjer bo vso razpoložljivo količino dobrine potrošil eden od igralcev, je Pareto optimalna, vendar je z vidika distribucije dobrin sporna. $\diamondsuit$

Definicija 2.8 (Cenovno ravnovesje s transferji)**.** Na trgu, danim z

$$\left(\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \overline{\omega}\right),$$

je alokacija (x^*, y^*) skupaj s cenovnim vektorjem $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L$ cenovno ravnovesje s transferji, če obstaja *preskrbljenost agentov* $(w_1, w_2, \ldots, w_I) \in \mathbb{R}^I$, za katero je $\sum_i w_i = \overline{\omega} \cdot p + \sum_j y_j^* \cdot p$, tako da velja sledeče.

i) Za vsako podjetje j, y_j^* maksimizira dobiček v Y_j, torej

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ za vsak } y_j \in Y_j.$$

ii) Za vsakega potrošnika i je x_i^* maksimalen glede na $\succeq_i$ v dani proračunski množici

$$\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\}.$$

iii) Alokacija (x^*, y^*) je uresničljiva, torej $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Opomba 2.9. Na cenovno ravnovesje s transferji lahko gledamo tako, da si predstavljamo, da država najprej zaseže vse premoženje, potem pa vsakemu posamezniku dodeli neko preskrbljenost (in torej proračunsko omejitev), s katero lahko na trgu kupuje izdelke.

Opomba 2.10. Na prvi pogled se zdi, da smo v točki i) maksimizirali prihodke, zato velja poudariti, da so stroški že upoštevani v proizvodnem vektorju. Izrazimo jih kot porabo izdelkov, pri katerih bo imel proizvodni vektor negativni predznak, stroški pa bodo ravno enaki produktu njihove količine in cene. Spomnimo na predpostavko iz modela trga, ki pravi, da *ni brezplačnega kosila*.

Opomba 2.11. Točko ii) lahko izrazimo tudi na druge načine. Na primer: za vsakega potrošnika i velja, da je $p \cdot x_i^* \leq w_i$, in če je $x_i \succ x_i^*$, potem je $p \cdot x_i > w_i$.

Opomba 2.12. Če alokacija (x^*, y^*) nastopa v cenovnem ravnovesju s cenovnim vektorjem p pri preskrbljenostih w, potem nastopa tudi v cenovnem ravnovesju s cenovnim vektorjem αp pri preskrbljenostih αw za vsak $\alpha > 0$. To je posledica arbitrarnosti denarne enote.

Poseben primer cenovnega ravnovesja s transferji je *Walrasovo ravnovesje*, kjer je $w_i = p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^*$, torej ima proračunska množica obliko $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^*\}$. Walrasovo ravnovesje je ravnovesje na privzetem trgu, kjer so potrošniki hkrati tudi lastniki podjetij in jim zato pripada ustrezen delež v njihovih dobičkih. Proračun potrošnika je torej dan z vsoto vrednosti njegovega začetnega premoženja in prihodkov z naslova lastništva deležev v podjetjih.

Definicija 2.13 (Lokalna nenasičenost)**.** Preferenčna relacija $\succeq_i$ na potrošni množici X_i je lokalno nenasičena, če za vsak $x_i \in X_i$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $x_i' \in X_i$, da je $||x_i' - x_i|| \leq \varepsilon$ in $x_i' \succ_i x_i$. Lokalna nenasičenost nam pove, da v bližini vsake točke v X_i obstaja neka druga točka, ki jo i-ti potrošnik preferira pred njo.

Opomba 2.14. Iz lokalne nenasičenosti preferenc torej sledi, da je vsaka točka X akumulacijska.

3. Prvi osnovni izrek teorije blaginje

Z modelom trga, ki smo ga definirali v predhodnem poglavju, lahko formuliramo prvi osnovni izrek teorije blaginje, ki govori o Pareto optimalnosti cenovnih ravnovesij. Dokaz tega izreka je preprost, saj ob danih predpostavkah iz definicij pojmov relativno hitro sledi, da je vsaka alokacija, ki Pareto dominira tiste v cenovnem ravnovesju s transferji, neuresničljiva.

Izrek 3.1 (Prvi osnovni izrek teorije blaginje). *Na trgu* $\left(\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega}\right)$ *je pri lokalno nenasičenih preferencah vseh potrošnikov vsaka alokacija* (x^*, y^*) *iz cenovnega ravnovesja s transferji* (x^*, y^*, p) *Pareto optimalna. V posebnem je vsaka alokacija Walrasovega ravnovesja Pareto optimalna.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Vzemimo cenovno ravnovesje s transferji (x^*, y^*, p) in pripadajoče preskrbljenosti agentov $(w_1, w_2, \ldots, w_I)$. Velja $\sum_i w_i = \overline{\omega} \cdot p + \sum_j y_j^* \cdot p$. Naj bo $i \in \{1, \ldots, I\}$. Ker je x_i^* maksimalen glede na $\succeq_i$ in proračunsko množico $\{x_i \in X_i : p \cdot x_i \leq w_i\}$, iz definicije cenovnega ravnovesja s transferji sledi, da če je $x_i \succ_i x_i^*$, potem je $p \cdot x_i > w_i$. Pokazali bomo, da zaradi lokalne nenasičenosti velja še dodatno: če je $x_i \succeq_i x_i^*$, potem je $p \cdot x_i \geq w_i$.

Naj bo $x_i \succeq_i x_i^*$. Zaradi lokalne nenasičenosti preferenc lahko tvorimo zaporedje potrošnih vektorjev $(x_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, za katere velja $||x_i^{(n)} - x_i|| \leq 1/n$ in $x_i^{(n)} \succ x_i$. Ker velja, da je $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$ in $\forall n : p \cdot x_i^{(n)} > w_i$, sledi, da je $p \cdot x_i \geq w_i$.

Recimo, da (x, y) Pareto dominira (x^*, y^*); torej, da je $x_i \succeq_i x_i^*$ za vsak i in $x_i \succ_i x_i^*$ za nek i. Mora veljati $\sum_i p \cdot x_i > \sum_i w_i = p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^*$. Dodatno velja, ker y_j^* maksimizira dobiček pri p za vsako podjetje j, da je $p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j^* \geq p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Opazimo torej, da je $\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Ker je alokacija (x, y) uresničljiva, bi morala veljati enačba $\sum_i x_i = \overline{\omega} + \sum_j y_j$, kar je v protislovju z $\sum_i p \cdot x_i > p \cdot \overline{\omega} + \sum_j p \cdot y_j$. Alokacija, ki bi Pareto dominirala alokacijo iz cenovnega ravnovesja, torej ne obstaja in je (x^*, y^*) Pareto optimalna. □

Čeprav je videti, da imamo pri prvem osnovnem izreku teorije blaginje minimalne predpostavke, je treba poudariti, da v modelu trga privzemamo popoln trg, ki je brez trenja in kjer ima vsak izdelek svojo ceno. Na pravih trgih predpostavka ničelnih transakcijskih stroškov ne velja. Transakcijskih stroškov ne smemo enačiti s stroški plačila, ampak vključujejo vse stroške, ki nastanejo pri prenosu dobrin in storitev. V tej obravnavi torej ne vključujemo na primer stroškov identifikacije, pregleda in spremljave poslovnih partnerjev ter stroškov pogajanj.

Privzemamo tudi prilagajanje agentov cenam, kar očitno ne velja pri trgih z veliko tržno močjo posameznih agentov. Predpostavka bi veljala samo v primeru, da je na trgu veliko število podjetij, ki proizvajajo povsem zamenljive izdelke in morajo zato prevzeti tržno ceno svojega izdelka. To bi moralo veljati za vsak izdelek na takem trgu.

Naš model tudi ne velja v primeru eksternalij. Implicitno namreč privzamemo, da samo dejanje proizvodnje enega podjetja ali potrošnje enega potrošnika nima vplivov na druge agente na trgu. Tega zopet ne moremo trditi za trge v splošnem. Za primer, ko ima proizvodnja negativne eksternalije, lahko vzamemo problem globalnega segrevanja. Vsaka proizvodnja, ki ima za svoj učinek izpust toplogrednih plinov, ima negativne eksternalije na vse tržne udeležence. Primer negativne eksternalije potrošnje imamo lahko pri kajenju, kjer potrošnja predstavlja negativno eksternalijo, kadar potrošnik potencialno poveča obremenitev zdravstvenega sistema.

Zanemarili smo tudi pomen asimetrije informacij, saj smo privzeli polno informiranost vseh agentov. To na primer ne velja, kadar se pričakovanja potrošnikov razlikujejo od prejete koristnosti.

V vseh naštetih primerih model, ki smo ga privzeli za formulacijo izreka, ne velja v celoti. Iz tega sledi, da se potencialno lahko pojavljajo cenovna ravnovesja, katerih alokacija ni Pareto optimalna. Prvi osnovni izrek teorije blaginje torej ne govori o splošno veljavnih lastnostih ravnovesij na trgih, ampak je teoretično orodje, ki nam pomaga razumeti način delovanja t. i. *nevidne roke trga*. Pomaga nam tudi razumeti, pod kakšnimi okoliščinami deluje in kakšni so njeni učinki.

4. Drugi osnovni izrek teorije blaginje

Drugi osnovni izrek teorije blaginje nam pove, pod katerimi pogoji je vsaka Pareta optimalna alokacija dosegljiva kot cenovno ravnovesje z ustreznimi transferji. Gre torej za obrat prvega osnovnega izreka teorije blaginje. Pomemben privzetek bo konveksnost preferenc. Drugi osnovni izrek teorije blaginje bomo pokazali v dveh delih. V prvem delu si bomo pomagali z definicijo cenovnega kvazi-ravnovesja s transferji, ki jo lahko razumemo kot nekoliko ohlapnejšo obliko že prej omenjenega cenovnega ravnovesja s transferji.

Najprej bomo formulirali blažjo obliko izreka. Izrek pravi, da se, kadar so izpolnjeni določeni pogoji, vsaka Pareto optimalna alokacija nahaja v cenovnem kvazi-ravnovesju pri ustreznih transferjih. V drugem delu bomo formulacijo iz prvega dela dopolnili tako, da bomo dodali pogoje, pod katerimi je vsako cenovno kvazi-ravnovesje tudi običajno cenovno ravnovesje s transferji.

Za dokaz prve formulacije drugega osnovnega izreka teorije blaginje bomo potrebovali sledeči izrek:

Izrek 4.1. *[Izrek o ločujoči hiperravnini] Naj bosta A in B neprazni, disjunktni in konveksni podmnožici $\mathbb{R}^n$. Obstajata vektor $v \neq 0$ in $c \in \mathbb{R}$, da velja:*

$$y \cdot v \geq c \geq x \cdot v,$$

za vsak $x \in A$ in vsak $y \in B$. Torej obstaja hiperravnina $\{z; z \cdot v = c\}$ (v je normala), ki ločuje A in B.

Za dokaz tega izreka bomo potrebovali sledeče definicije in leme:

Definicija 4.2 (Rob, notranjost in zaprtje množice)**.** Rob ∂A množice $A \subset \mathbb{R}^n$ je množica takih točk $a \in \mathbb{R}^n$, da vsaka okolica a vsebuje točko iz A in točko iz A^c. $\partial A = \{a \in \mathbb{R}^n; (\forall \varepsilon > 0 : K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ in } K(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset)\}$.

Notranjost A^o množice A je množica takih točk $a \in A$, da obstaja okolica a, ki je v celoti vsebovana v A. $A^o = \{a \in A; (\exists \varepsilon > 0 : K(a, \varepsilon) \subset A)\}$

Zaprtje $\overline{A}$ množice A je množica takih točk $a \in \mathbb{R}^n$, da vsaka okolica a vsebuje točko iz A. $\overline{A} = \{a \in \mathbb{R}^n; (\forall \varepsilon > 0 : K(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)\}$.

Množica A je zaprta, če je $A = \overline{A}$.

Lema 4.3. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ zaprta, neprazna in konveksna. Obstaja enolično določen vektor $x \in K$ z minimalno 2-normo (dolžino).*

Dokaz (prirejen po [1]*).* Naj bo $d = \inf\{||x||_2; x \in K\}$. Vzemimo zaporedje $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ iz K tako, da je $\lim_{j\to\infty} ||x_j||_2 = d$. Ker je K konveksna, je za $\forall i, j : \frac{(x_i + x_j)}{2} \in K$ in zato

$||x_i + x_j||_2^2 \geq 4d^2$. Za razliko členov zaporedja velja:

$$\begin{aligned} ||x_i - x_j||_2^2 &= ||x_i||_2^2 - 2x_i^T x_j + ||x_j||_2^2 = \\ &= 2||x_i||_2^2 + 2||x_j||_2^2 - ||x_i + x_j||_2^2 \leq \\ &\leq 2||x_i||_2^2 + 2||x_j||_2^2 - 4d^2 \xrightarrow[i,j\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Vidimo, da je zaporedje Cauchyjevo, torej ima limito $x \in K$, saj je K zaprta; zaradi zveznosti norme je $||x||_2 = d$. S tem je dokazana eksistenca. Dokažimo še enoličnost. Recimo, da je $y \in K$ tudi tak, da je $||y||_2 = d$, potem mora veljati (po enakem premisleku kot prej) $0 \leq ||x - y||_2^2 \leq 2||x||_2^2 + 2||y||_2^2 - 4d^2 = 0$, torej je $x = y$. □

Lema 4.4. *Naj bo $a \geq 0$ in $R \subset \mathbb{R}^n$ konveksna. Podmnožica tistih elementov v R, ki so vsaj za a oddaljeni od $\mathbb{R}^n \setminus R$, $R_{-a} = \{r \in R; K(r, a) \subseteq R\}$, je tudi konveksna.*

Dokaz (prirejen po [12]*).* Naj bosta $x, y \in R_{-a}$ in $\lambda \in [0, 1]$. Za vsak u z $||u||_2 \leq a$ sta $x + u \in R$ in $y + u \in R$. Ker je R konveksna, je tudi

$$\lambda(x + u) + (1 - \lambda)(y + u) = \lambda x + (1 - \lambda)y + u \in R.$$

Sledi konveksnost, saj je res $\lambda x + (1 - \lambda)y \in R_{-a}$. □

Lema 4.5. *Naj bo B zaprta množica in $A \subseteq B$. Velja $\overline{A} \subseteq B$. Pravimo, da je zaprtje $\overline{A}$ množice A najmanjša zaprta množica, ki vsebuje A.*

Dokaz. Vzemimo zaprto množico B, ki vsebuje A; $B = \overline{B}$ in $A \subseteq B$. Za $x \in \overline{A}$ velja, da je $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ za vsak $\varepsilon > 0$. Iz $A \subseteq B$ sledi, da je tudi $K(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, zato je $x \in \overline{B} = B$. □

Lema 4.6. *Naj bo množica $R \subset \mathbb{R}^n$ konveksna z $R^{\circ} \neq \emptyset$. Velja: $\overline{R^{\circ}} = \overline{R}$.*

Dokaz (prirejen po [3]*).* Očitno je $\overline{R^{\circ}} \subseteq \overline{R}$, saj je $R^{\circ} \subseteq R \subseteq \overline{R}$ in je zaprtje množice najmanjša zaprta množica, ki jo vsebuje. Dokazati moramo, da je $\overline{R^{\circ}} \supseteq \overline{R}$. Naj bo $x \in \overline{R}$ in $y \in R^{\circ}$. Taki točki lahko izberemo, saj ima R neprazno notranjost.

Pokažimo, da zaradi konveksnosti R pri vsakem $a \in (0, 1)$ velja $a \cdot x + (1 - a) \cdot y \in R^{\circ}$. Ker je $y \in R^{\circ}$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $K(y, \varepsilon) \subseteq R$. Označimo $z = a \cdot x + (1 - a) \cdot y$. Iščemo $\delta > 0$, da je $K(z, \delta) \subseteq R$. Videli bomo, da $\delta = (1 - a)\varepsilon$ zadostuje temu pogoju. Vzemimo še $w \in \mathbb{R}^n$ tak, da je $||w - z||_2 < (1 - a)\varepsilon$. Ker je $x \in \overline{R}$, je $K(x, \frac{(1-a)\varepsilon - ||w-z||_2}{a}) \cap R \neq \emptyset$. V posebnem obstaja $w_1 \in R$ tak, da je $||w_1 - x||_2 < \frac{(1-a)\varepsilon - ||w-z||_2}{a}$. Definirajmo $w_2 := \frac{w - aw_1}{1-a}$. Velja

$$\begin{aligned} ||w_2 - y||_2 &= ||\frac{w - aw_1}{1 - a} - y||_2 \\ &= \frac{1}{1 - a}||w - aw_1 - (1 - a)y||_2 \\ &= \frac{1}{1 - a}||w - aw_1 + ax - z||_2 \\ &= \frac{1}{1 - a}||w - z + a(x - w_1)||_2 \\ &\leq \frac{1}{1 - a}(||w - z||_2 + a||x - w_1||_2) \\ &< \frac{1}{1 - a}||w - z||_2 + \frac{a}{1 - a} \cdot \frac{(1 - a)\varepsilon - ||w - z||_2}{a} = \varepsilon, \end{aligned}$$

torej je $w_2 \in R$. Po definiciji w_2 velja tudi, da je $w = aw_1 + (1-a)w_2$. Ker sta $w_1, w_2 \in R$, je torej zaradi konveksnosti množice R tudi $w \in R$. Sledi, da je $z \in R^{\mathrm{o}}$.

Pokazali smo, da je $a \cdot x + (1-a) \cdot y \in R^{\mathrm{o}}$ za vsak $a \in (0,1)$. Ker je $x = \lim_{a\to 1} a \cdot x + (1-a) \cdot y \in \overline{R^{\mathrm{o}}}$, sledi, da je $\overline{R} \subseteq \overline{R^{\mathrm{o}}}$. □

Dokaz izreka 4.1 (prirejen po [6] *in* [12]*).* Za A in B iz izreka (neprazni, disjunktni in konveksni podmnožici $\mathbb{R}^n$) definiramo $R = A + (-B) = \{a - b;\ a \in A, b \in B\}$. Ker je $-B$ konveksna in je vsota konveksnih množic tudi konveksna, je R konveksna, očitno pa velja tudi, da je R neprazna. Najprej dokažimo izrek v posebnem primeru, kadar je množica R tudi zaprta. Po lemi 4.3 R vsebuje vektor z minimalno normo. Torej obstajata $f \in A$ in $e \in B$, da je $||f - e||_2 = d(A, B) = \inf\{||x - y||_2; x \in A, y \in B\}$. To sta točki, kjer je dosežena najkrajša razdalja med množicama.

Označimo $v = e - f$ in $c = \frac{||e||_2^2 - ||f||_2^2}{2}$. Pokazali bomo, da je funkcija

$$\begin{aligned} g(x) = v^T x - c &= (e-f)^T x - 1/2 \cdot (e^T e - f^T f) \\ &= (e-f)^T x - 1/2 \cdot (e^T - f^T)(e+f) \\ &= (e-f)^T x - 1/2 \cdot (e-f)^T (e+f) \\ &= (e-f)^T (x - 1/2(e+f)) \end{aligned}$$

nepozitivna na A in nenegativna na B. S tem bomo dokazali, da hiperravnina $\{x; v^T x = c\}$ ločuje A in B. To bomo dokazali s protislovjem. Recimo, da obstaja tak $y \in B$, da je $g(y) = (e-f)^T (y - 1/2(e+f)) < 0$. Velja

$$\begin{aligned} 0 > g(y) = (e-f)^T (y - 1/2(e+f)) = (e-f)^T (y - e + 1/2(e-f)) = \\ = (e-f)^T (y-e) + 1/2 ||e - f||_2^2 \end{aligned}$$

in sledi, da je $(e-f)^T (y-e) < 0$. Oglejmo si:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} ||e + t(y-e) - f||_2^2 \Big|_{t=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (e + t(y-e) - f)^T (e + t(y-e) - f) \Big|_{t=0} = \\ = e^T (y-e) + (y-e)^T e + 2t \cdot ||(y-e)||_2^2 &- (y-e)^T f - f^T (y-e) \Big|_{t=0} = \\ = e^T (y-e) + (y-e)^T e - (y-e)^T f &- f^T (y-e) = 2(e-f)^T (y-e) < 0. \end{aligned}$$

To pomeni, da obstaja t blizu 0, za katerega velja $||e + t(y-e) - f||_2^2 < ||e - f||_2^2$. Ker je $\{y, e\} \subset B$ in je B konveksna, vsebuje tudi $e + t(y-e)$. To je protislovje, saj je $||f - e||_2 = d(A, B) = \inf\{||x - y||_2; x \in A, y \in B\}$.

Na podoben način lahko pokažemo, da je g nepozitivna na A in s tem je izrek dokazan v posebnem primeru, kadar je množica R zaprta.

Recimo, da R ni zaprta. Ker sta množici A in B disjunktni, vemo, da $0 \notin R$. Ločimo dva primera glede na to, ali je $0 \in \overline{R}$. Naj najprej velja nasprotno, torej $0 \notin \overline{R}$. Na množicah $\overline{R}$ in $\{0\}$ uporabimo dokazani primer izreka ($\overline{R} + (-\{0\}) = \overline{R}$ je zaprta) in dobimo, da obstaja $v \neq 0$, da je $(x - y) \cdot v \geq 0$ za vsak $(x - y) \in \overline{R}$, torej tudi za vsak $(x - y) \in R$. Sledi, da je $x \cdot v \geq y \cdot v$, $\forall x \in A$ in $\forall y \in B$.

Zdaj moramo izrek dokazati še v primeru, da je $0 \in \overline{R}$. Zopet lahko ločimo dva primera. Če ima R prazno notranjost, je množica vsebovana v hiperravnini oblike $\{r; r \cdot v = b\}, v \neq 0$. To drži zaradi konveksnosti R, saj bi v nasprotnem primeru dobili n linearno neodvisnih vektorjev v R, njihove konveksne kombinacije pa bi tvorile neprazno notranjost. Ker $\overline{R}$ vsebuje 0, lahko tvorimo zaporedje $r_n \in R$ z $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Ker velja $r_n \cdot v = b$ za vsak

n, je $\lim_{n\to\infty} r_n \cdot v = 0 = b$ in je $(x - y) \cdot v = 0$ za $\forall x \in A$ in $\forall y \in B$. Torej smo dobili ločujočo hiperravnino. V primeru, da je notranjost R neprazna, tvorimo množico

$$R_{-\varepsilon} = \{r \in R; K(r, \varepsilon) \subseteq R\},$$

ki je podmnožica tistih elementov v R, ki so vsaj za $\varepsilon > 0$ oddaljeni od $\mathbb{R}^n \setminus R$. Lema 4.4 pove, da je $\overline{R_{-\varepsilon}}$ zaprta in konveksna. Za $\varepsilon > 0$ je očitno, da $\overline{R_{-\varepsilon}}$ ne vsebuje vektorja 0, ker $0 \notin R$. Zopet lahko uporabimo izrek na množicah $\{0\}$ in $\overline{R_{-\varepsilon}}$ in za vsak ε dobimo vektor $v(\varepsilon)$, da je $z \cdot v(\varepsilon) \geq 0$ za vsak $z \in \overline{R_{-\varepsilon}} \supset R_{-\varepsilon}$.

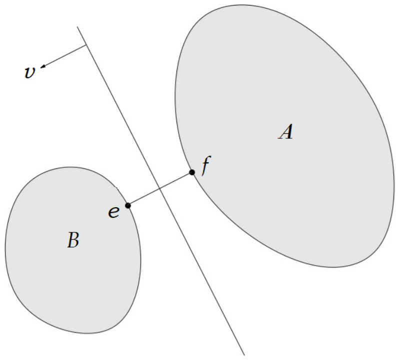
Brez škode za splošnost privzamemo, da je $||v(\varepsilon)||_2 = 1$ in tvorimo konvergentno zaporedje pozitivnih ε_k, kjer je $k = 1, 2, \ldots$, z $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Ker je $||v(\varepsilon_k)||_2 = 1$, vsebuje $v(\varepsilon_k)$ konvergentno podzaporedje. Limito tega podzaporedja označimo z $\overline{v}$.

Iz $\forall z \in R_\varepsilon : z \cdot v(\varepsilon_k) \geq 0$ sledi v limiti, da je $\forall z \in R^o : z \cdot \overline{v} \geq 0$, s ponovnim limitiranjem pa dobimo, da to velja $\forall z \in \overline{R^o}$. Iz leme 4.6 sledi, da je $\overline{R^o} = \overline{R} \supset R$, ker je R konveksna in ima neprazno notranjost. Torej je

$$x \cdot \overline{v} \geq y \cdot \overline{v}$$

za vsak $x \in A$ in vsak $y \in B$. Iz zveznosti norme sledi, da je $||\overline{v}||_2 = 1$, torej je $\overline{v} \neq 0$. S tem je izrek dokazan. $\square$

Za intuitivnejšo predstavo izreka o ločujoči hiperravnini nam je lahko v pomoč spodnja slika. V prvem delu dokaza izreka (kadar je množica R zaprta) smo za ločujočo hiperravnino izbrali tisto, ki je pravokotna na daljico ef in jo razpolavlja.



SLIKA 1. Prikaz izreka o ločujoči hiperravnini. Prirejeno po: [6]

V nadaljevanju te naloge bomo potrebovali tudi izrek o podporni hiperravnini, ki je neposredna posledica zgornjega izreka. Formulirajmo ga že sedaj.

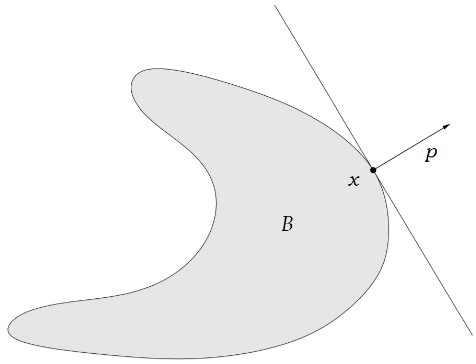
Posledica 4.7 (Izrek o podporni hiperravnini)**.** *Naj bo $B \subset \mathbb{R}^n$ konveksna, neprazna in $x \notin B^o$. Potem obstaja neničeln $p \in \mathbb{R}^n$ ($p \neq 0$), da velja $p \cdot x \geq p \cdot y$ za vsak $y \in B$.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Vzemimo $x \notin B^o$. Potem velja bodisi $x \in \partial B$ bodisi $x \in B^c$, v obeh primerih pa lahko tvorimo zaporedje $x_m \in B^c$ z limito $\lim_{m\to\infty} x_m = x$. Zaradi izreka o ločujoči hiperravnini, ki ga lahko apliciramo na B in $\{x_m\}$, za vsak m obstaja $p_m \neq 0$, $p_m \in \mathbb{R}^n$ ter $c_m \in \mathbb{R}$, da je

$$p_m \cdot x_m \geq c_m \geq p_m \cdot y$$

za vsak $y \in B$. Privzamemo lahko, da je $||p_m|| = 1$ za vsak m. Ker so ti vektorji omejeni, obstaja konvergentno podzaporedje zaporedja p_m, torej lahko vzamemo, da obstaja zaporedje p_k, da je $\lim_{k\to\infty} p_k = p$.

Tedaj je $p \cdot x \geq p \cdot y \; \forall y \in B$ in $||p|| = 1$, v posebnem je $p \neq 0$. □



SLIKA 2. Prikaz izreka o podporni hiperravnini. Prirejeno po: [6]

Zgornja izreka nam bosta v pomoč pri nadaljnem delu. Vrnimo se zdaj k cenovnim ravnovesjem. Kot smo omenili na začetku razdelka, bomo definicijo cenovnega ravnovesja s transferji nekoliko omilili za lažjo formulacijo drugega osnovnega izreka teorije blaginje.

Definicija 4.8 (Cenovno kvazi-ravnovesje s transferji)**.** Na trgu, danim z

$$\left(\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega} \right),$$

je alokacija (x^*, y^*) skupaj s cenovnim vektorjem $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L) \neq 0$ cenovno kvazi-ravnovesje s transferji, če obstaja preskrbljenost agentov $(w_1, w_2, \ldots, w_I)$, za katero je $\sum_i w_i = \overline{\omega} \cdot p + \sum_j y_j^* \cdot p$, tako da veljajo:

i) Za vsako podjetje j, y_j^* maksimizira dobiček v Y_j, torej
$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^* \text{ za vsak } y_j \in Y_j.$$
ii) Za vsakega potrošnika i velja: $p \cdot x_i \leq w_i$ in če je $x_i \succ x_i^*$, potem je $p \cdot x_i \geq w_i$.
iii) Alokacija (x^*, y^*) je uresničljiva, torej $\sum_i x_i^* = \overline{\omega} + \sum_j y_j^*$.

Opomba 4.9. Vsako cenovno ravnovesje s transferji je cenovno kvazi-ravnovesje s transferji. Obratno v splošnem ne velja (glej primer 4.14).

Opomba 4.10. Opazimo, da mora v cenovnem kvazi-ravnovesju s transferji ob predpostavki lokalne nenasičenosti preferenc $\forall i$ veljati $p \cdot x_i^* = w_i$, sicer bi lahko znotraj potrošne množice X_i našli potrošni vektor, ki ga oseba i strogo preferira pred x_i^* in za katerega je $p \cdot x_i < w_i$.

Definicija 4.11 (Konveksnost preferenčne relacije)**.** Naj bo X podmnožica nekega Evklidskega prostora. Preferenčna relacija $\succeq$ na X je konveksna, kadar je množica $\{x' \in X : x' \succeq x\}$ konveksna za vsak $x \in X$.

Opomba 4.12. To lahko povemo tudi drugače – preferenčna relacija $\succeq$ je konveksna, kadar za vsak $x \in X$ velja: za poljubne $\alpha \in [0,1]$ in $\{x_1, x_2\} \subset X$, ki ju preferiramo pred x, tudi $\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2$ preferiramo pred x. Torej: $(\alpha \in [0,1]) \wedge (x_1 \succeq x) \wedge (x_2 \succeq x) \implies (\alpha \cdot x_1 + (1 - \alpha) \cdot x_2) \succeq x$.

Izrek 4.13 (Drugi osnovni izrek teorije blaginje)**.** *Naj bodo na trgu*

$$\left(\{X_i, \succeq_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \overline{\omega} \right)$$

vse množice Y_j konveksne, vsaka preferenčna relacija $\succeq_i$ konveksna in naj velja lokalna nenasičenost preferenc za vsak i. Za vsako Pareto optimalno alokacijo (x^*, y^*) obstaja cenovni vektor $p = (p_1, p_2, \ldots, p_L) \neq 0$, da je (x^*, y^*, p) cenovno kvazi-ravnovesje s transferji.

Dokaz (prirejen po [9]*).* Naj bo V_i množica vseh potrošnih vektrojev, ki jih potrošnik i preferira pred x_i^*. Torej $V_i = \{x_i \in X_i : x_i \succ_i x_i^*\} \subset \mathbb{R}^L$. Z V označimo množico agregiranih potrošenj, ki jih lahko razdelimo na potrošnje posameznikov, za katere velja, da jih vsak potrošnik i preferira pred x_i^*;

$$V = \sum_i V_i = \{\sum_i x_i \in \mathbb{R}^L : x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \ldots, x_I \in V_I\}.$$

Množico, ki vsebuje agregirane proizvodnje, imenujemo

$$Y = \sum_j Y_j = \{\sum_j y_j \in \mathbb{R}^L : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \ldots, y_J \in Y_J\}.$$

Imejmo tudi množico $Y + \{\varpi\} = \{\varpi + \sum_j y_j \in \mathbb{R}^L : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \ldots, y_I \in Y_I\}$, ki je, geometrijsko gledano, množica agregirane potrošnje z izhodiščem v ϖ. $Y + \{\varpi\}$ je torej množica vseh možnih agregiranih proizvodenj, skupaj z začetnim stanjem izdelkov v lasti potrošnikov.

Pokažimo, da je množica V_i konveksna. Vzemimo $x_i^{(1)} \succ_i x_i^*$, $x_i^{(2)} \succ_i x_i^*$ in $\alpha \in [0, 1]$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $x_i^{(1)} \succeq_i x_i^{(2)}$. Torej velja, da je $\alpha \cdot x_i^{(1)} + (1-\alpha) \cdot x_i^{(2)} \succeq_i x_i^{(2)}$, zato je tudi $\alpha \cdot x_i^{(1)} + (1-\alpha) \cdot x_i^{(2)} \succ_i x_i^*$ zaradi tranzitivnosti relacij. Sledi, da je V_i konveksna. Ker velja, da je vsota konveksnih množic konveksna, sta konveksni tudi množici V in $Y + \{\varpi\}$.

Dokažimo, da sta ti množici disjunktni. Za $v \in V \cap (Y + \{\varpi\})$ mora veljati $v = \sum_i x_i$, kjer je $x_i \succ_i x_i^*$ za vsak $i = 1, \ldots, I$, ker je $v \in V$. Ker je $v \in Y + \{\varpi\}$, velja $v = \varpi + \sum_j y_j$, kjer je $y_j \in Y_j$ za vsak $j = 1, \ldots, J$. Alokacija (x, y), dobljena iz v, je uresničljiva in jo vsak kupec preferira pred alokacijo (x^*, y^*). Ker je alokacija (x^*, y^*) Pareto optimalna, tak v ne obstaja. Velja torej, da je $V \cap (Y + \{\varpi\}) = \emptyset$.

Zaradi izreka o ločujoči hiperravnini – ker sta množici V in Y neprazni, disjunktni in konveksni – velja, da $\exists p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$ in $r \in \mathbb{R}$, da je $\forall v \in V : p \cdot v \geq r$ in $\forall y \in Y + \{\varpi\} : p \cdot y \leq r$. Pokazali bomo, da je pri preskrbljenosti agentov, dani z $\forall i = 1, \ldots, I : w_i = p \cdot x_i^*$, trojica (x^*, y^*, p) cenovno kvazi-ravnovesje s transferji. Velja pripomniti, da tretji pogoj cenovnega kvazi-ravnovesja s transferji, ki pravi, da je vsebovana alokacija uresničljiva, že velja, saj je vsaka Pareto optimalna alokacija uresničljiva.

Pokažimo najprej, da za ta p in r velja:

$$\forall i : x_i \succeq_i x_i^* \implies p \cdot (\sum_i x_i) \geq r. \tag{1}$$

Zaradi lokalne nenasičenosti preferenc za vsak $x_i \in X_i$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $x_i' \in X_i$, da je $||x_i' - x_i|| \leq \varepsilon$ in $x_i' \succ_i x_i$. Torej $\forall i : x_i' \in V_i$ in je vsota $\sum_i x_i' \in V$, zato je $p \cdot \sum_i x_i' \geq r \implies \lim_{x_i' \to x_i} p \cdot \sum_i x_i' = p \cdot \sum_i x_i \geq r$.

Vemo torej, da je $p \cdot \sum_i x_i^* \geq r$. Ker je (x^*, y^*) Pareto optimalna alokacija, je tudi uresničljiva, torej je $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \varpi \in Y + \{\varpi\}$, zato je $p \cdot \sum_i x_i^* \leq r$. Sledi:

$$p \cdot \sum_i x_i^* = p \cdot (\sum_j y_j^* + \varpi) = r. \tag{2}$$

Da bi dokazali, da velja prvi pogoj iz definicije cenovnega kvazi-ravnovesja s transferji, moramo utemeljiti, zakaj je $\forall j, \forall y_j \in Y_j : p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$. To dobimo iz dejstva, da je

$\forall j, \forall y_j \in Y_j : y_j + \sum_{n\neq j} y_n^* \in Y$ in zato $\varpi + y_j + \sum_{n\neq j} y_n^* \in Y + \{\varpi\}$. Sledi, da je

$$p \cdot (\varpi + y_j + \sum_{n\neq j} y_n^*) \leq r = p \cdot (\varpi + y_j^* + \sum_{n\neq j} y_n^*)$$

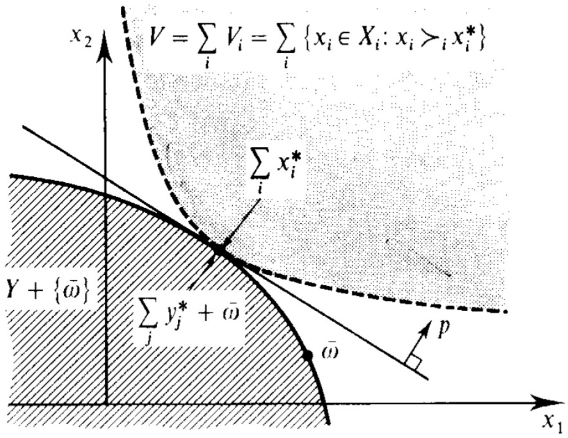
in je torej res $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$.

Drugi pogoj, spomnimo, pravi, da $\forall i : x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^* = w_i$. Tudi ta pogoj velja, ker je (ob upoštevanju enačb (1) in (2)) za vsak i, za katerega je $x_i \succ_i x_i^*$

$$p \cdot (x_i + \sum_{k\neq i} x_k^*) \geq r = p \cdot (x_i^* + \sum_{k\neq i} x_k^*),$$

torej je res $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^* = w_i$.

Pri izbrani preskrbljenosti agentov (x^*, y^*, p) zadošča vsem trem pogojem iz definicije cenovnega kvazi-ravnovesja s transferji. □



SLIKA 3. Prikaz dokaza drugega osnovnega izreka teorije blaginje. Vir: [9]

V naslednjem koraku nas bo zanimalo, kdaj je cenovno kvazi-ravnovesje s transferji tudi pravo cenovno ravnovesje s transferji. Iščemo torej pogoje, pod katerimi sta izjavi $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$ in $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i > w_i$ ekvivalentni. To ne velja samo po sebi. Ogledali si bomo primer cenovnega kvazi-ravnovesja, ki ni pravo cenovno ravnovesje.

Primer 4.14. Vzemimo trg z dvema "neskončno deljivima" izdelkoma ($L = 2$). Naj bo začetno stanje izdelkov v lasti potrošnikov $\varpi = [1, 1]$. V našem primeru bo trg brez proizvodnje ($J = 0$), torej se bo na trgu dogajala samo blagovna menjava med dvema potrošnikoma ($I = 2$). Potrošni množici sta $X_i = [0, 2]^2$ za $i = 1, 2$. Za preferenčni relaciji potrošnikov naj velja:

$$[x_1, x_2] \succeq_1 [y_1, y_2] \iff (x_1 + 1) \cdot x_2 \geq (y_1 + 1) \cdot y_2 \text{ in}$$
$$[x_1, x_2] \succeq_2 [y_1, y_2] \iff x_1 \geq y_1.$$

Pokažimo, da je alokacija $([0, 1],[1, 0])$ skupaj s cenovnim vektorjem $p = [1, 0]$ cenovno kvazi-ravnovesje s transferji pri preskrbljenosti potrošnikov $w = [0, 1]$. Točki i) iz definicije je zadoščeno, ker na trgu ni nobenega podjetja. Točka ii) pravi, da morata za vsakega potrošnika i veljati $p \cdot x_i^* \leq w_i$ in implikacija $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$. V primeru prvega potrošnika je

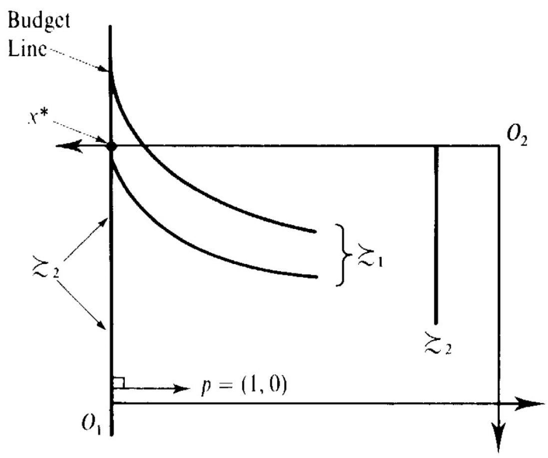
$$p \cdot x_1^* = [1, 0] \cdot [0, 1] = 0 \leq w_1 = 0,$$

za veljavnost implikacije pa mora iz $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}] \succ_1 [0,1]$ slediti $x_1^{(1)} \geq 0$. Izjava na desni strani implikacije vedno drži, saj imamo v potrošnih množicah samo nenegativne vektorje, torej zahteve za prvega potrošnika veljajo. Preverimo še, da veljajo za drugega. Podobno kot pri prvem potrošniku je tudi pri drugem

$$p \cdot x_2^* = [1,0] \cdot [1,0] = 1 \leq w_2 = 1.$$

V primeru drugega potrošnika upoštevajmo, da je $[x_2^{(1)}, x_2^{(2)}] \succ_2 [1,0] \iff x_2^{(1)} > 1$. Implikacijo iz točke ii) za drugega potrošnika lahko zamenjamo z $x_2^{(1)} > 1 \implies p \cdot [x_2^{(1)}, x_2^{(2)}] \geq w_2$. Izjavo na desni strani lahko poenostavimo in dobimo $x_2^{(1)} \geq 1$, torej implikacija drži. V definiciji cenovnega ravnovesja s transferji nam preostane preveriti samo še, da je alokacija uresničljiva. To je res, saj je $x_1^* + x_2^* = [0,1] + [1,0] = [1,1] = \overline{\omega}$.

Recimo zdaj, da je $(([0,1],[1,0]),[1,0])$ tudi pravo cenovno ravnovesje s transferji. Za prvega potrošnika mora biti $p \cdot x_1^* = 0 \leq w_1$. Obenem mora veljati, strožje kot pri cenovnem kvazi-ravnovesju, $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}] \succ_1 [0,1] \implies x_1^{(1)} > w_1$. Vemo, da je $[x_1^{(1)}, x_1^{(2)}] \succ_1 [0,1] \iff (x_1^{(1)} + 1)x_1^{(2)} > 1$ in zato lahko zahtevo zapišemo tudi z $(x_1^{(1)} + 1)x_1^{(2)} > 1 \implies x_1^{(1)} > w_1$. Vendar opazimo, da ta implikacija ne more veljati, saj za potrošni vektor $x_2 = [0,2]$ izjava na levi strani drži, izjava na desni pa nam da zahtevo $0 > w_1$, kar je v protislovju z $0 \leq w_1$. Pri izbrani alokaciji in cenovnem vektorju ustrezna preskrbljenost ne obstaja, zato $(([0,1],[1,0]),[1,0])$ ni cenovno ravnovesje s transferji.



SLIKA 4. Grafični prikaz primera 4.14. Vir: [9]

$\diamondsuit$

Kot smo videli, ni vsako cenovno kvazi-ravnovesje tudi cenovno ravnovesje s transferji. Intuitivno lahko povzamemo, da je bistven razlog, zakaj zgornja alokacija ni podprta s pravim ravnovesjem ta, da ima prvi potrošnik ničelno preskrbljenost. Za svojo potrošnjo bo imel drugi potrošnik na voljo le zastonjske dobrine. Takih dobrin bi lahko, če upoštevamo samo proračunsko omejitev, potrošil poljubno mnogo, ne da bi pri tem presegel svojo preskrbljenost. V nadaljevanju se bomo takim primerom izognili in opredelili, kdaj iz cenovnega kvazi-ravnovesja sledi cenovno ravnovesje s transferji.

Za naslednjo trditev potrebujemo definicijo zveznosti relacije. Zadostuje sledeča.

Definicija 4.15 (Zveznost preferenčne relacije)**.** Naj bo X podmnožica nekega Evklidskega prostora. Preferenčna relacija $\succeq$ na X je zvezna, če je za vsaki zaporedji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz X, kjer $x_n \succeq y_n$ za vsak n ter $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, tudi $x \succeq y$.

Lema 4.16. *Naj bo preferenčna relacija $\succeq$ na X zvezna in $x^* \in X$. Za vsako zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, ki ima $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, za katero velja $x \succ x^*$, obstaja n_0 tak, da za vsak $n \geq n_0$ velja $x_n \succ x^*$.*

Dokaz. Vzemimo, da trditev ne velja, torej velja nasprotno – obstaja zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, ki ima $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $x \succ x^*$ in za vsak n_0 obstaja $k \geq n_0$, da je $x_k \preceq x^*$ (zaradi sovisnosti preferenčnih relacij). Iz teh x_k lahko tvorimo podzaporedje, ki ima isto limito, torej x. Velja $x_k \preceq x^*$ za vsak k in $x \preceq x^*$ zaradi zveznosti. Dobili smo protislovje, zato tako zaporedje ne more obstajati. □

Trditev 4.17. *Fiksirajmo indeks potrošnika i. Naj bo X_i konveksna in $\succeq_i$ zvezna preferenčna relacija na njej. Privzemimo tudi implikacijo $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$, kjer so dani potrošni vektor x_i^*, cenovni vektor p in preskrbljenost agenta w_i. Če obstaja $x_i^1 \in X_i$ tak, da je $p \cdot x_i^1 < w_i$, potem velja implikacija $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i > w_i$.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Recimo, da velja nasprotno: $\exists x_i : x_i \succ x_i^* \wedge p \cdot x_i = w_i$. Zaradi konveksnosti X_i je $\alpha x_i + (1-\alpha)x_i^1 \in X_i$ in

$$p \cdot (\alpha x_i + (1-\alpha)x_i^1) = \alpha \cdot p \cdot x_i + (1-\alpha) \cdot p \cdot x_i^1 < \alpha w_i + (1-\alpha)w_i = w_i.$$

za vsak $\alpha \in [0,1)$. Vzemimo zaporedje α_n, ki konvergira proti 1. Potem bo zaporedje $\alpha_n x_i + (1-\alpha_n)x_i^1$ konvergiralo proti x_i. Ker je $x_i \succ x_i^*$, po prejšnji trditvi velja, da je za dovolj pozne α_n zaradi zveznosti relacije $\alpha_n x_i + (1-\alpha_n)x_i^1 \succ x_i^*$. To je protislovje, ker je $p \cdot (\alpha_n x_i + (1-\alpha_n)) < w_i$ in ne more veljati implikacija $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$, ki smo jo privzeli. Tak x_i torej ne more obstajati, zato velja $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i > w_i$. □

Posledica 4.18. *Naj bo X_i konveksna za vsak i, $0 \in X_i$ in naj bo $\succeq_i$ zvezna relacija. Potem je vsako cenovno kvazi-ravnovesje, ki ima $w_i > 0$ za vsak i, cenovno ravnovesje s transferji.*

Dokaz. Posledica velja, ker je $0 \in X_i$ in $w_i > 0$ za vsak i ter $p \cdot 0 < w_i$. □

Posledica nam torej pove, da so (ob dodatnih pogojih za X_i in $\succeq_i$) vse Pareto optimalne alokacije, pri katerih so preskrbljenosti v cenovnih kvazi-ravnovesjih pozitivne, tudi podprte s pravim cenovnim ravnovesjem. Oglejmo si to posledico na primeru.

Definicija 4.19 (Strogo monotone preference)**.** Preference posameznika i so strogo monotone, če za $\{x, y\} \subset X_i$ z $y \geq x$ in $y \neq x$ velja $y \succ_i x$.

Primer 4.20 (Prirejeno po [9])**.** Naj bodo na trgu brez proizvodnje $X_i = [0,\infty)^L$ ter preference zvezne in strogo monotone. Naj bo x^* specifikacija potrošnih vektorjev v cenovnem kvazi-ravnovesju s transferji s preskrbljenostmi $(w_1, \ldots, w_I)$ in naj bo p cenovni vektor, ki v njem nastopa. Ker je $\forall i\ p \cdot x_i^* \leq w_i$ in $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i \geq w_i$, mora veljati $p \geq 0$ in $p \neq 0$. V nasprotnem primeru bi $\exists l \in \{1, \ldots, L\}$ tak, da je $p_l < 0$. Vzemimo $x_i = [x_{i,1}^*, \ldots, x_{i,l-1}^*, x_{i,l}^* + \varepsilon, x_{i,l+1}^*, \ldots, x_{i,L}^*]$ za nek $\varepsilon > 0$ in za nek i. Vemo, da je $x_i \succ_i x_i^*$ zaradi stroge monotonosti preferenc. Velja pa tudi $p \cdot x_i = p \cdot x_i^* + p_l\varepsilon < p \cdot x_i^* \leq w_i$. Implikacija iz pogoja ii) iz definicije cenovnega kvazi-ravnovesja s transferji tedaj ne bi veljala, torej tak l ne obstaja.

Predpostavimo naprej, da je $\overline{\omega} > 0$. Ker je $p \geq 0$ in $p \neq 0$, mora biti $p \cdot \overline{\omega} > 0$ in zato $\sum_i w_i = p \cdot \overline{\omega} > 0$. Vidimo, da $\exists i \in \{1, \ldots, I\}$, da je $w_i > 0$. Za ta i po trditvi 4.17 (z $x_i^1 = 0$) velja $x_i \succ_i x_i^* \implies p \cdot x_i > w_i$. Torej mora biti $p > 0$. V nasprotnem primeru bi $\exists l \in \{1, \dots, L\}$ tak, da je $p_l = 0$, in bi za x_i, definiran enako kot prej, še vedno veljalo $x_i \succ_i x_i^*$, obenem pa $p \cdot x_i = p \cdot x_i^* + p_l\varepsilon = p \cdot x_i^* \leq w_i$, kar je protislovje.

Sledi, da mora na takem trgu cenovno kvazi-ravnovesje biti tudi pravo cenovno ravnovesje. Če je namreč $x_i^* \neq 0$, potem je $p \cdot x_i^* = w_i > 0$ in lahko apliciramo trditev 4.17 z $x_i^1 = 0$, sicer pa je $p \cdot x_i^* = w_i = 0$ in je x_i^* edini vektor v dani proračunski množici $\{x_i \in X_i; p \cdot x_i \leq w_i\}$.

Dobili smo, da je na takšnem trgu vsako cenovno kvazi-ravnovesje tudi pravo cenovno ravnovesje in da je vsak cenovni vektor na takem trgu pozitiven. $\diamondsuit$

Podobno kot pri prvem osnovnem izreku je pomembmo, da tudi pri drugem izreku analiziramo veljavnost predpostavk v izreku. Najprej omenimo, da vsi zadržki, ki smo jih omenili v tretjem razdelku (možnost eksternalij, povečane tržne moči, nepolne informiranosti in transakcijskih stroškov), veljajo tudi v tem razdelku, saj je model isti.

V oči bode privzetek konveksnosti. Čeprav ni povsem nesmiselno predpostaviti, da so preference ter potrošne in produkcijske množice konveksne, je posledica teh predpostavk, da je drugi osnovni izrek teorije blaginje najbolj uporaben, kadar je na trgu veliko agentov [9]. V limiti, ko vzamemo neštevno agentov, namreč velja celo, da privzetki konveksnosti niso več potrebni, prav tako pa odpadejo pogoji tranzitivnosti in sovisnosti preferenc in jih lahko nadomestimo z blažjimi privzetki. [11]

Dodatne omejitve se pojavijo, če bi želeli drugi osnovni izrek teorije blaginje uporabiti v vlogi odločevalca, da bi s pomočjo določitve preskrbljenosti na trgu vspostavili cenovno (kvazi-)ravnovesje z želeno Pareto optimalno alokacijo. Tak odločevalec bi moral imeti popoln pregled nad trgom. Za uveljavitev želenega cenovnega ravnovesja in Pareto optimalne alokacije v njem mora odločevalec izračunati cenovni vektor. To lahko stori samo, če ima podatke o preferencah posameznikov ter o začetnem stanju izdelkov v lasti potrošnikov. Poleg tega pa mora na podlagi teh podatkov potrošnike tudi prepoznati, da lahko vsakemu posamezniku dodeli ustrezno preskbljenost glede na njegove preference, začetno stanje izdelkov v njegovi lasti in razmere na trgu. Zdi se zelo malo verjetno, da bi bila taka informiranost odločevalca mogoča, pa tudi zaželena. Vendar pa bi tudi v primeru polne informiranosti odločevalca naleteli na težave, saj bi moral obstajati mehanizem, kateremu se posamezniki ne bi mogli izogniti, po katerem bi se uveljavljala odločevalčeva volja. Tudi ta pogoj je malo verjeten. Distribucija premoženja zaradi teh pomanjkljivosti praviloma ne deluje na podlagi enkratnih plačil. [9]

5. Funkcija družbene blaginje

V drugem osnovnem izreku teorije blaginje smo izvedeli, pod katerimi pogoji so Pareto optimalne alokacije dosegljive s pomočjo cenovnega ravnovesja. Če se postavimo v vlogo odločevalca, ki želi poskrbeti za čim večjo družbeno blaginjo, zdaj vemo, da lahko – vsaj pod določenimi pogoji – vsako želeno (Pareto optimalno) alokacijo dosežemo z ustreznimi cenovnimi (kvazi-)ravnovesji s transferji. Vendar smo ugotavljali tudi, da Pareto optimalnost ni edini kriterij, po katerem izbiramo ustrezno alokacijo. Kot dodaten kriterij bomo definirali *funkcijo družbene blaginje*.

V tem rezdelku bomo preference potrošnikov opisovali s *koristnostnimi funkcijami*, $u_i : X_i \to \mathbb{R}$. Za vsak $i \in \{1, \dots, I\}$ in $(x, y) \in X_i^2$ je $x \succeq_i y \iff u_i(x) \geq u_i(y)$. To lahko ob relativno nedolžnih dodatnih predpostavkah naredimo, ker so preference racionalne, torej tranzitivne in sovisne [14].

Definicija 5.1 (Funkcija družbene blaginje)**.** Funkcija družbene blaginje je funkcija $W : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, W = W(v_1, \ldots, v_I)$, ki vsakemu vektorju koristnosti posameznikov določi stopnjo družbene blaginje in s tem določa družbene preference, ki so racionalne.

Osredotočili se bomo na linearno funkcijo družbene blaginje, ki je dana s predpisom

$$W(v_1, \ldots, v_I) = \sum_i \lambda_i v_i$$

za uteži $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_I)$. Smiselno se je omejiti na $\lambda \geq 0$, saj želimo, da je družbena koristnost nepadajoča, kadar narašča koristnost njenega posameznika. Označimo $v = (v_1, \ldots, v_I)$ in pišemo $W(v) = \lambda \cdot v$.

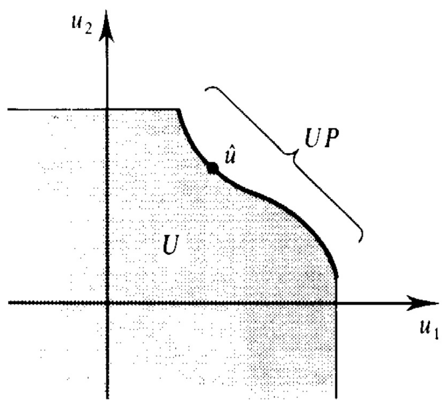
V vlogi odločevalca zdaj želimo najti alokacije, ki maksimizirajo funkcijo družbene blaginje. Pri tem nam bosta v pomoč sledeči definiciji.

Definicija 5.2 (Množica mogočih koristnosti)**.** Na danem trgu je množica mogočih koristnosti $U = \{(v_1, \ldots, v_I) \in \mathbb{R}^I$: obstaja uresničljiva alokacija dobrin (x, y), da je $v_i \leq u_i(x_i)$ za vsak $i = 1, \ldots, I\}$.

Zdaj lahko opredelimo *problem maksimizacije družbene blaginje*. Odločevalec bo iskal alokacijo, kjer je dosežen maksimum funkcije družbene blaginje na množici vseh mogočih koristnosti:

$$\max_{v \in U}(\lambda \cdot v).$$

Definicija 5.3 (Pareto mejna množica)**.** Pareto mejna množica je $UP = \{v \in U$: ne obstaja $v' \in U$, da je $v'_i \geq v_i$ za vsak i in $v'_i > v_i$ za nek $i\}$.



SLIKA 5. Množici U in UP. Vir: [9]

Trditev 5.4. *Velja $UP \subset U$. Vektorji koristnosti iz UP ležijo v ∂U.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Prva trditev je povsem očitna. Za dokaz druge trditve recimo, da $v \in UP$ in $v \notin \partial U$. Spomnimo, da je $\partial U = \{u \in \mathbb{R}^I;$ vsaka okolica u seka U in $U^c\} = \overline{U} \setminus U^\circ$. Ker je $v \in U$, potem vsaka okolica te točke vsebuje točko iz U, namreč kar v. Torej bi moralo biti $K(v, \varepsilon) \cap U^c = \emptyset$ za nek $\varepsilon > 0$. Če izberemo dovolj majhen $\delta > 0$, je $v' = (v_1, \ldots, v_I) + (\delta, \ldots, \delta) \in U$. Dobimo da $v \notin UP$, kar je protislovje. $\square$

Trditev 5.5. *Uresničljiva alokacija $(x, y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ je Pareto optimalna natanko tedaj, kadar je $(u_1(x_1), \ldots, u_I(x_I)) \in UP$.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Vzemimo, da $(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)) \notin UP$, potem obstaja $v^* \in U$, da je $v_i^* \geq u_i(x_i)$ za vsak i in $v_i^* > u_i(x_i)$ za nek i. Vendar velja tudi, da je $v^* \in U$ samo, kadar obstaja uresničljiva alokacija (x^*, y^*), da je $u_i(x_i^*) \geq v_i^*$ za vsak i. Alokacija (x, y) torej ne more biti Pareto optimalna.

Tudi drugi del dokaza naredimo s protislovjem. Privzemimo, da (x, y) ni Pareto optimalna. Sledi, da obstaja uresničljiva alokacija (x', y'), ki jo Pareto dominira. To pomeni, da je $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$ za vsak i in $u_i(x_i') > u_i(x_i)$ za nek i. Dobimo, da mora veljati $(u_1(x_1), \dots, u_I(x_I)) \notin UP$, kar je zopet protislovje. $\square$

Trditev 5.6. *Naj bodo potrošne množice X_i in produkcijske množice Y_j konveksne ter naj bodo koristnostne funkcije u_i konkavne. Potem je množica U konveksna.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Če je $\{v^{(1)}, v^{(2)}\} \subset U$, obstajata uresničljivi alokaciji $(x^{(1)}, y^{(1)})$ in $(x^{(2)}, y^{(2)})$, da je $v_i^{(1)} \leq u_i(x_i^{(1)})$ in $v_i^{(2)} \leq u_i(x_i^{(2)})$ za vsak $i = 1, \dots, I$. Vzemimo $\alpha \in [0{,}1]$. Potem je $\alpha v_i^{(1)} + (1-\alpha) v_i^{(2)} \leq \alpha u_i(x_i^{(1)}) + (1-\alpha) u_i(x_i^{(2)}) \leq u_i(\alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha) x_i^{(2)})$, ker so u_i konkavne funkcije. Zaradi konveksnosti produkcijskih in potrošnih množic množic je $(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha) x^{(2)}, \alpha y^{(1)} + (1-\alpha) y^{(2)})$ alokacija, ki je tudi uresničljiva:

$$\sum_i \alpha x_i^{(1)} + (1-\alpha) x_i^{(2)} = \alpha \sum_i x_i^{(1)} + (1-\alpha) \sum_i x_i^{(2)} =$$
$$= \alpha(\overline{\omega} + \sum_j y_j^{(1)}) + (1-\alpha)(\overline{\omega} + \sum_j y_j^{(2)}) = \overline{\omega} + \sum_j \alpha y_j^{(1)} + (1-\alpha) y_j^{(2)}.$$

Sledi, da je $\alpha v^{(1)} + (1-\alpha) v^{(2)} \in U$ in je U res konveksna. $\square$

Opomba 5.7. Mogoče je dokazati, da v primeru, da so preference potrošnikov $\succeq_i$ konveksne in veljajo še nekateri dodatni pogoji za preference, v družini koristnostnih funkcij, ki predstavljajo $\succeq_i$, obstaja funkcija koristnosti u_i, ki je konkavna. [9]

Trditev 5.8. *Naj bo $v^* = (v_1^*, \dots, v_I^*)$ rešitev problema maksimizacije družbene blaginje z $\lambda > 0$. Vektor v^* je vektor koristnosti Pareto optimalne alokacije ($v^* \in UP$). Če je še U konveksna, potem za vsak $v' \in UP$ obstaja vektor uteži $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_I) \geq 0, \lambda \neq 0$, da je $\lambda \cdot v' \geq \lambda \cdot v$ za vse $v \in U$, torej obstaja neničeln vektor uteži, da je v' rešitev problema maksimizacije družbene blaginje.*

Dokaz (prirejen po [9]*).* Prvi del dokažemo s protislovjem. Recimo, da v^* ni Pareto optimalna, potem obstaja $v \in U$, za katerega je $v \geq v^*$ in $v \neq v^*$. Ker je $\lambda > 0$, je $\lambda \cdot v > \lambda \cdot v^*$, torej v^* ne maksimizira funkcije družbene blaginje.

Za dokaz drugega dela bomo uporabili, da leži $v' \in UP$ na robu množice U. Zaradi izreka o podporni hiperravnini obstaja $\lambda \neq 0$, da je $\lambda \cdot v' \geq \lambda \cdot v$ za vsak $v \in U$. Za uteži mora veljati celo $\lambda \geq 0$, sicer bi pri $\lambda_i < 0$ lahko zaradi konstrukcije U izbrali $v \in U$ z dovolj majhnim $v_i < 0$, da je $\lambda \cdot v > \lambda \cdot v'$ (produkt $\lambda_i \cdot v_i$ lahko naredimo poljubno velik). $\square$

Iz te trditve dobimo, da so torej alokacije, ki jih izberemo z maksimizacijo linearne funkcije družbene blaginje, Pareto optimalne. Dobimo pa tudi, da lahko vsako Pareto optimalno alokacijo dobimo z maksimizacijo neke linearne funkcije družbene blaginje. S tem je pojasnjen odnos med funkcijo družbene blaginje in Pareto optimalnostjo. Z vidika odločevalca lahko z izbiro ustreznih uteži zožamo izbor alokacij, ki jih želimo podpreti s cenovnim ravnovesjem. O načinih izbiranja te funkcije in preferenc, ki jih določa, govori naslednji razdelek. Pred tem si oglejmo preprost primer maksimizacije, kadar so posamezniki v družbi enako obteženi.

Primer 5.9. Naj bosta na trgu brez proizvodnje dva izdelka in dva posameznika z enakima potrošnima množicama $X_{1,2} = [0,1]^2$. Začetno stanje izdelkov v lasti potrošnikov naj bo $\overline{\omega} = [1,1]$. Koristnostni funkciji sta dani s predpisoma $u_1(x_1, y_1) = x_1^{1/2} y_1^{1/2}$ in $u_2(x_2, y_2) = x_2^{1/2} y_2^{1/2}$. Ker želimo, da sta koristnostni funkciji posameznikov enako obteženi, vzamemo $\lambda = [1,1]$ in je torej $W(u_1(x_1, y_1), u_2(x_2, y_2)) = x_1^{1/2} y_1^{1/2} + x_2^{1/2} y_2^{1/2}$. Ker imata oba potrošnika naraščajoče koristnosti za obe dobrini, bo v maksimumu $x_1 = 1 - x_2$ in $y_1 = 1 - y_2$. Pišemo torej $W = x_1^{1/2} y_1^{1/2} + (1 - x_1)^{1/2}(1 - y_1)^{1/2}$. Na robovih območja X_1 bo W zajela vse vrednosti v intervalu $[0,1]$ in dosegla 1 pri potrošnih vektorjih $(1,1)$ in $(0,0)$ za prvega potrošnika. Preostane nam še preveriti notranjost območja, kjer dobimo, da je maksimum dosežen v vseh točkah z $x_1 = y_1$ in da je vrednost W tedaj 1 (ti računi niso prikazani). Izberimo alokacijo, kjer je $x_1 = x_2 = 1/2$ in $y_1 = y_2 = 1/2$. Cenovni vektor, ki to alokacijo podpira, je $p = [1,1]$, preskrbljenosti agentov pa sta $w = [1,1]$. $\diamondsuit$

V tem primeru lahko opazimo, da je alokacij, kjer je dosežen maksimum funkcije družbene blaginje, lahko več. Prav tako smo ugotovili, da obstajajo alokacije, ki so z vidika distribucije dobrin nezaželene, pa so vseeno rešitev problema maksimizacije družbene blaginje (npr. par $(1,1)$ in $(0,0)$). Linearna funkcija družbene blaginje torej ne more v celoti povzeti vseh kriterijev, ki jih imajo odločevalci pri iskanju optimalne alokacije dobrin. Opredelitev W ima še dodatno težavo, da zahteva primerljivost med funkcijami koristnosti posameznikov, čeprav lahko to deloma odpravimo z izbiro uteži. Če smo v prejšnjih razdelkih zahtevali samo, da ima vsak posameznik neko razvrstitev potrošnih vektorjev, moramo zdaj še primerjati, koliko koristnosti prinašajo potrošni vektorji med posamezniki.

6. Izrek Arrowa o nemogočem

Naš tretji osnovni izrek, imenovan tudi izrek Arrowa o nemogočem, ne govori o ravnotežjih, ki nastanejo na trgu, ampak o sistemih odločanja, ki preferencam posameznikov v družbi prirejajo skupne, družbene preference. Za formulacijo privzemimo sledeči model družbe. Naj bo $\mathbf{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ množica vsaj treh možnosti, med katerimi se bodo posamezniki odločali. Privzemimo družbo z $N \in \mathbb{N}$ posamezniki (volilci), torej naj bo množica posameznikov $P = \{1, \ldots, N\}$.

Definicija 6.1 (Preferenca volilca)**.** Preferenca volilca $i \in P$ je tranzitivna in sovisna relacija na $\mathbf{A}$. Razumemo jo lahko kot razvrstitev možnosti v $\mathbf{A}$ od vrha proti dnu, pri čemer dovoljujemo izenačenja.

Razlika med preferenčno relacijo potrošnika in volilca je ta, da potrošnik s preferenčno relacijo ureja elemente v svoji potrošni množici X_i, volilci pa urejajo elemente iste množice A. Razumevanje takšne relacije kot razvrstitve je v tem razdelku še posebej koristna.

Definicija 6.2 (Profil preferenc)**.** Profil preferenc je N-terica tranzitivnih in sovisnih preferenc na $\mathbf{A}$, ki določa preference vsakega volilca iz P.

Definicija 6.3 (Ustava)**.** Ustava je funkcija, ki vsaki N-terici (vsakemu profilu) preferenc volilcev na $\mathbf{A}$ določi sovisno preferenco na $\mathbf{A}$, imenovano družbena preferenca.

Definicija 6.4 (Tranzitivnost ustave)**.** Ustava upošteva tranzitivnost, če je družbena preferenca tranzitivna pri vsakem profilu preferenc volilcev.

Definicija 6.5 (Soglasnost)**.** Ustava upošteva soglasnost, če velja, da v primeru, ko vsak posameznik v družbi strogo preferira $\alpha \in \mathbf{A}$ pred $\beta \in \mathbf{A}$, potem tudi družba strogo preferira α pred β.

Definicija 6.6 (Neodvisnost od nerelevantnih možnosti)**.** Ustava upošteva neodvisnost od nerelevantnih možnosti, če je relativna uvrstitev (višja, nižja ali enaka) dveh možnosti odvisna le od njune relativne uvrstitve v preferencah vsakega volilca. Natančneje, če se profila preferenc X in Y ujemata v relativnih uvrstitvah para $(a, b) \in \mathbf{A^2}$ pri vsakem posamezniku ($\forall i \in P$ je $a \succeq_i b$ v $X \iff a \succeq_i b$ v Y), potem se družbeni preferenci, ki ju določa takšna ustava, ujemata v relativni uvrstitvi para (a, b).

Definicija 6.7 (Diktatorstvo)**.** Ustava je diktatorstvo, če obstaja posameznik $p \in P$, za katerega velja, da za vsak par $(\alpha, \beta) \in \mathbf{A}^2$ družba strogo preferira α pred β, kadarkoli p strogo preferira α pred β.

Izrek 6.8 (Izrek Arrowa o nemogočem)**.** *Vsaka ustava, ki upošteva tranzitivnost, neodvisnost od nerelevantnih možnosti in soglasnost, je diktatorstvo.*

Za dokaz izreka bomo potrebovali še dve definiciji. Najprej bomo dokazali, da imamo v izbranem modelu družbe *izredno ključnega volilca*. Videli bomo, da je ta posameznik tudi diktator nad vsakim parom možnosti iz $\mathbf{A}$.

Definicija 6.9 (Izredno ključni volilec)**.** Posameznik $p \in P$ je izredno ključni volilec za $b \in \mathbf{A}$, če obstaja profil preferenc posameznikov, da lahko p sam, s spremembo svoje preference, premakne b s samega dna ($\forall a \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{b}\} : b \prec a$) na sam vrh ($\forall a \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{b}\} : b \succ a$) družbene preference, pri čemer ostane preostal profil preferenc nespremenjen.

Definicija 6.10 (Diktator za par možnosti)**.** Posameznik $p \in P$ je diktator za par možnosti $(\alpha, \beta) \in \mathbf{A}^2$, če družba striktno preferira α pred β, kadarkoli p striktno preferira α pred β.

Dokaz (prirejen po [7]*).* Naj za ustavo veljajo tranzitivnost, neodvisnost od nerelevantnih možnosti in soglasnost in naj bo $b \in \mathbf{A}$. Najprej želimo pokazati, da bo ustava profilu preferenc, kjer vsak posameznik postavi b samega bodisi na vrh bodisi na dno razvrstitve možnosti, določila družbeno razvrstitev, ki bo imela b prav tako samega bodisi na vrhu bodisi na dnu. Torej naj $\forall i \in P$ bodisi velja $\forall a \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{b}\} : b \succ_i a$, bodisi velja $\forall a \in \mathbf{A} \setminus \{\mathbf{b}\} : b \prec_i a$. Poudarimo, da dovoljujemo tudi profile, ko je za nekatere posameznike b maksimalen glede na njihove preference, za preostale posameznike pa minimalen. Pomembno je samo, da je za vsakega posameznika b na enem od ekstremov te lestvice.

Vzemimo, da to ne velja. Zaradi sovisnosti in zato, ker so v $\mathbf{A}$ vsaj tri možnosti, sledi, da pri takem profilu obstajajo paroma različni $a, b, c \in A$, ki jih družba razvršča tako, da je $a \succeq b$ in $b \succeq c$. Vsak posameznik lahko c prestavi nad a, ne da bi pri tem spremenil relativnih položajev v parih (a, b) in (c, b), saj velja eden od sledečih šestih primerov:

(1) Iz preference, kjer $b \succ a \succ c$, dobimo preferenco, kjer $b \succ c \succ a$.
(2) V preferenci, kjer je $b \succ c \succ a$, ne spreminjamo ničesar.
(3) Iz preference, kjer je $b \succ a \sim c$, dobimo preferenco, kjer je $b \succ c \succ a$.
(4) Iz preference, kjer je $a \succ c \succ b$, dobimo preferenco, kjer je $c \succ a \succ b$.
(5) Iz preference, kjer je $a \sim c \succ b$, dobimo preferenco, kjer je $c \succ a \succ b$.
(6) V preferenci, kjer je $c \succ a \succ b$, ne spreminjamo ničesar.

Ker se v nobenem od naštetih primerov relativna uvrstitev parov (a, b) in (b, c) ne spremeni, je v družbeni preferenci $a \succeq c$ zaradi neodvisnosti od nerelevantnih možnosti in tranzitivnosti. Vendar je zaradi soglasnosti tudi $c \succ a$, kar je protislovje. Pri takem profilu preferenc posameznikov je torej v družbeni preferenci možnost b bodisi sama na vrhu lestvice bodisi sama na dnu.

Zdaj trdimo, da obstaja $p_b \in P$, izredno ključni volilec za $b \in \mathbf{A}$ pri nekem profilu preferenc volilcev; to je posameznik, ki lahko povzroči, da se b v družbeni preferenci premakne z dna na vrh s spremembo položaja b v svojih preferencah (kjer ostane preostali profil preferenc posameznikov nespremenjen). Da bi to videli, vzemimo najprej profil W, kjer imajo vsi posamezniki b na samem dnu v svojih preferencah. Zaradi soglasnosti mora to veljati tudi za družbeno preferenco. Naj zdaj posamezni volilci od 1 do N zaporedoma premaknejo b z dna na vrh preferenc. Naj bo p_b prvi posameznik, ki povzroči, da se spremeni položaj b v družbeni preferenci. To se zgodi najkasneje pri $p_b = N$ zaradi soglasnosti. Označimo z X profil preferenc vseh posameznikov v trenutku pred spremembo položaja b pri volilcu p_b in z Y profil preferenc vseh posameznikov takoj po tej spremembi. Ker pri profilu Y možnost b ni na dnu dobljene družbene preference, mora biti na vrhu. Volilec p_b je torej izredno ključni posameznik za $b \in \mathbf{A}$.

Pokažimo zdaj, da je p_b diktator za vsak par možnosti $a, c \in \mathbf{A}$, ki ne vsebuje b. Iz profila Y sestavimo profil Z tako, da p_b v svoji preferenčni relaciji prestavi a tako, da je $a \succ_{p_b} b \succ_{p_b} c$, ostali pa poljubno zamenjajo relativni uvrstitvi a in c, vendar pustijo b na vrhu oz. dnu vsake relacije. Zaradi neodvisnosti od nerelevantnih možnosti bi moralo v družbeni preferenci veljati $a \succ b$, ker so relativne uvrstitve para (a, b) enake kot v profilu X (ustava pa profilu X določa družbeno preferenco, v kateri se b znajde na dnu). Podobno bi moralo veljati, da je v družbeni preferenci $b \succ c$, saj so relativne uvrstitve para (b, c) enake kot v profilu Y. Zaradi tranzitivnosti mora veljati $a \succ c$. Zaradi neodvisnosti od nerelevantnih možnosti (relativen položaj para (a, c) je pri ostalih volilcih poljuben) mora biti p_b diktator za par (a, c).

Preostane nam le še pokazati, da je p_b dikatator za vse pare možnosti, ki vsebujejo b. Naj bo (a, b) tak in naj bo c tretja možnost. Vemo, da mora obstajati p_c diktator za vse pare možnosti, ki ne vsebujejo c, torej tudi za (a, b). Opazimo pa, da p_b lahko vpliva na relativni položaj para (a, b) v družbenih preferencah, na primer pri prehodu iz profila X na profil Y. Torej mora biti $p_b = p_c = p^*$ diktator za vse pare, ki bodisi vsebujejo bodisi ne vsebujejo b; to je za vse pare možnosti. Ustava je torej diktatorstvo tega posameznika. $\square$

Opomba 6.11. Na prvi pogled se zdi izrek Arrowa o nemogočem šokanten, vendar moramo za pravilno interpretacijo tega izreka bolj podrobno analizirati pomen njegovih predpostavk. Bistveno je razumevanje, da uporabljena definicija diktatorstva ne ustreza pomenu besede diktatorstvo v vsakdanji rabi. V našem modelu je diktator oseba, ki ima vedno odločilni glas v procesu odločanja. Z demokratičnega vidika je seveda še vedno problematično, da se družbene preference vedno ujemajo s preferencami nekega posameznika, vendar so družbene preference vseeno določene preko vnaprej znanega odločevalnega procesa. Ko sicer govorimo o diktatorstvu, imamo v mislih, med drugimi značilnostmi, tudi brezobzirnost do vnaprej določenih procesov. Razlika torej je, da se resnični diktatorji pri svojem delovanju ponavadi ne opirajo na "ustavo". Drugi pomemben vidik pri interpretaciji izreka pa je opazka, da volilna pravila v večini demokratičnih držav ne upoštevajo neodvisnosti od nerelevantnih možnosti. Nekaj najbolj pogostih volilnih pravil si bomo ogledali v naslednjih primerih.

Opomba 6.12. Predpostavka končnega števila volilcev je bistvena v dokazu izreka Arrowa o nemogočem. Množica možnosti $\mathbf{A}$ pa ima lahko neskončno elementov. [15]

Ogledali si bomo tri različna volilna pravila. Prvo pravilo, ki si ga bomo ogledali, je t.i. *običajno pravilo večine (first-past-the-post)*. Volilno pravilo, podobno temu, je pogosto pri predsedniških volitvah. Pri tem pravilu družbeno preferenčno relacijo določimo tako, da možne izbire iz $\mathbf{A}$ razvrstimo po številu volilcev, ki imajo to izbiro na vrhu svoje preferenčne relacije. Oglejmo si primer:

Primer 6.13. Vzemimo, da družba 100 posameznikov ($P = \{1, \ldots, 100\}$) izbira med tremi kandidati – naj bo $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$. Opazimo lahko, da takšna ustava ni diktatorstvo, saj lahko za vsakega posameznika $p \in P$ najdemo profil preferenc, pri katerem se družbena preferenca ne ujema z njegovo. To velja na primer, kadar imamo $a \succ_j b \succ_j c$ za $j \in P \setminus \{p\}$, izbrani volilec p pa $b \succ_p a \succ_p c$.

Z manjšo spremembo pravila velja tudi soglasnost. Kadarkoli je $a \succ_i b$ za vsak $i \in P$ in je a na vrhu preference pri vsaj enem posamezniku, je $a \succ b$ v družbeni preferenci. Pravilo spremenimo tako, da pare, ki se ne pojavljajo na vrhovih preferenc posameznikov, razporedimo glede na število volilcev, ki imajo dano izbiro na drugem mestu v teh preferencah. V družbeni preferenci pa očitno veljata tudi tranzitivnost in sovisnost zaradi tranzitivnosti in sovisnosti relacije $\geq \subset P^2$.

Zdaj bomo pokazali, da to volilno pravilo ni skladno z neodvisnostjo od nerelevantnih možnosti. Naj za $i \in \{1, \ldots, 45\}$ velja $a \succ_i b \succ_i c$, za $j \in \{46, \ldots, 80\}$ naj bo $b \succ_j c \succ_j a$, za preostalih $k \in \{81, \ldots, 100\}$ pa $c \succ_k b \succ_k a$. Če za izbiro uporabimo pravilo večine, dobimo $a \succ b \succ c$, ker upoštevamo samo, katere izbire so na vrhovih preferenc posameznikov. Oglejmo si primer, da si vsi posamezniki $k \in \{81, \ldots, 100\}$ premislijo in začnejo preferirati b pred c. Imeli bomo profil preferenc, v katerem bo še vedno $a \succ_i b \succ_i c$ za $i \in \{1, \ldots, 45\}$ in $b \succ_j c \succ_j a$ za $j \in \{46, \ldots, 80\}$. Družbena preferenca, določena z običajnim pravilom večine pri takem profilu, bo $b \succ a \succ c$. Ker v novem profilu nismo pri nobenem posamezniku spremenili relativne uvrstitve v paru (a, b), neodvisnost od nerelevantnih možnosti ne velja. $\diamondsuit$

Pojav, ko je kandidat, ki ni izvoljen, odločilen za rezultat na volitvah, imenujemo *učinek motilca (spoiler effect)*, neizvoljeni kandidat pa je *volilni motilec*. Učinek motilca je pojav, ki se v demokracijah pogosto dogaja, kadar sta si na primer dva kandidata idejno bližja, tretji kandidat pa se od njiju bistveno razlikuje. Zamislimo si, da imamo dva liberalna kandidata in enega konservativnega. Do učinka motilca v tem primeru lahko pride, kadar se glasovi liberalnih volilcev razdelijo med dva kandidata in zato zmaga konservativni kandidat, čeprav je večina volilcev po nazoru liberalna.

Drugo pravilo, ki si ga bomo ogledali, je *štetje Borda (Borda count)*. To pravilo je zanimivo predvsem, ker upošteva celotno preferenčno relacijo vsakega posameznika. Družbeno preferenco določimo tako, da razvrstimo možnosti iz $\mathbf{A}$ glede na seštevek dobljenih točk pri posameznikih, kjer vsak posameznik dodeli po eno točko najslabše uvrščeneni, dve točki možnosti na predzadnjem mestu itn. Da upoštevamo tudi primere, ko se pri kakšnem posamezniku pojavi indiferentnost med elementoma iz $\mathbf{A}$, vzemimo, da tem možnostim dodelimo aritmetično sredino točk, ki pripadajo zasedenim mestom. Če je na primer $d \succ_i b \sim_i c \succ_i a$, dodelimo možnosti d štiri točke, možnosti a eno točko, možnostma b in c pa po $2{,}5$ točk vsaki. Tudi to pravilo si oglejmo na primeru:

Primer 6.14. Recimo, da imamo tri volilce $P = \{1, 2, 3\}$ in množico $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$. Tudi pri tem volilnem pravilu lahko preverimo, da velja nediktatorstvo – dovolj je pokazati, da prvi posameznik ni diktator. Kadar je $a \succ_1 b \succ_1 c$ in $b \succ_i c \succ_i a$ za $i \in \{2, 3\}$, možnost a prejme 5 točk, možnost b prejme 8 točk in možnost c prejme 5 točk. Družbena preferenca se v tem primeru ne ujema s preferenco prvega posameznika.

Ker tranzitivnost in sovisnost sledita iz tranzitivnosti in sovisnosti relacije $\geq \subset \mathbb{R}^2$, nam preostane, da preverimo soglasnost in neodvisnost od nerelevantnih možnosti. Veljavnost soglasnosti je očitna, saj bo v primeru, da je $a \succ_i b$ za vsak $i \in P$, pri vsakem posamezniku možnost a prejela več točk kot možnost b, torej bo tudi $a \succ b$ v družbeni preferenci.

Tudi pri štetju Borda ne velja neodvisnost od nerelevantnih možnosti. Če zopet vzamemo primer, ko je $a \succ_1 b \succ_1 c$ in $b \succ_i c \succ_i a$ za $i \in \{2, 3\}$, dobimo družbeno preferenco $b \succ a \sim c$. V primeru, ko si prvi volilec premisli in začne preferirati c pred b, je njegova preferenca določena z $a \succ_1 c \succ_1 b$. Nov profil nam da novo družbeno preferenco $b \succ c \succ a$. Ker v novem profilu nismo pri nobenem posamezniku spremenili relativne uvrstitve para (a, c), neodvisnost od nerelevantnih možnosti ne velja. $\diamondsuit$

Ogledali si bomo še *paroma večinsko pravilo (pairwise majority voting)*. To pravilo se pogosto uporablja pri sprejemanju zakonodaje, saj se parlamenti praviloma odločajo samo med dvema alternativama zakona naenkrat (na primer stari in predlagani zakon). (To ne pomeni, da sta v množici $\mathbf{A}$ samo dva zakona, možnosti je lahko več.) Pri tem pravilu primerjamo vse možne pare (a, b) iz $\mathbf{A^2}$, kjer $b \neq a$. Če je $b \succeq_i a$ pri večini $i \in P$, bo $b \succ a$ tudi v družbeni preferenci.

Primer 6.15. Nediktatorstvo in soglasnost bi lahko preverili podobno kot v predhodnih primerih. Preverimo še neodvisnost od nerelevantnih možnosti. Ta lastnost velja, ker je v družbeni preferenci relacija med a in b odvisna le od večinske relativne uvrstitve tega para v preferencah posameznikov. Če bi opravili katerokoli menjavo v preferencah posameznikov, ne da bi pri tem spremenili njuno relativno uvrstitev, se tudi njuna relativna uvrstitev v družbeni preferenci ne bi spremenila.

Za takšno pravilo pa ne velja tranzitivnost. Vzemimo podobno družbo, kjer je $P = \{1, \ldots, 99\}$, $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ in kjer so preference posameznikov dane z $a \succ_i b \succ_i c$ za $i \in \{1, \ldots, 33\}$, z $b \succ_j c \succ_j a$ za $j \in \{34, \ldots, 66\}$ in z $c \succ_k a \succ_k b$ za $k \in \{67, \ldots, 99\}$. Ker veljajo $a \succ_p b$, $b \succ_p c$ in $c \succ_p a$ za večino $p \in P$, nimamo tranzitivnosti v družbeni preferenci. $\diamondsuit$

Kot smo s prikazanimi primeri videli, pomembnost tretjega osnovnega izreka teorije blaginje ni v tem, da bi nas opozarjal na morebitno skrito nedemokratičnost naših volilnih sistemov. Bolj pravilna bi bila ugotovitev, da se nekaterim pomankljivostim, kot sta učinek motilca in netranzitivnost, ne moremo izogniti. Vseeno moramo poudariti, da bi ob privzemanju tranzitivnosti, soglasnosti in neodvisnosti od nerelevantnih možnosti ustave privzeli hkrati tudi obravnavano obliko diktatorstva. Čeprav se zdijo privzetki neškodljivi, moramo biti pazljivi, saj imajo lahko nepredvidene implikacije.

V teoriji blaginje obstaja še bistvenejša ugotovitev, ki sledi iz izreka o nemogočem. Velja, da iz preferenc posameznikov ne moremo z želenim demokratičnim postopkom dobiti funkcije družbene blaginje z družbeno preferenco, za katero bi veljali tranzitivnost in neodvisnost od nerelevantnih možnosti. Tej težavi se lahko izognemo, če namesto relacij za posameznike vzamemo koristnostne funkcije in omogočimo primerljivost koristnosti med posamezniki. [16]

7. Teorija blaginje: dopolnitev in kritika

Teorija blaginje je široko uporabljen koncept za vrednotenje učinkovitosti trgov in odločevalskih ukrepov pri alokaciji dobrin. Njeni močni orodji sta Pareto mejna množica in funkcija družbene blaginje. Ker so točke na Pareto mejni množici Pareto optimalne, nam njim pripadajoče alokacije zagotavljajo minimalen pogoj za družbeno sprejemljivost. Funkcija družbene blaginje omogoča, da oblikujemo kriterij, po katerem izbiramo primerno alokacijo na UP.

Privzete modele je mogoče še bolj razviti in s tem popraviti marsikatero pomankljivost, ki smo jih omenjali ob koncu vsakega razdelka. Analiza s pomočjo druge najboljše Pareto učinkovitosti na primer prepozna, da redistribucija premoženja s pomočjo enkratnih zneskov ni mogoča in predvideva tudi druge institucionalne ovire pri doseganju želenih ciljev [8]. Ob upoštevanju teh omejitev se pogosto izkaže, da so lahko koristni tudi ukrepi, ki bi bili na idealnem trgu neučinkoviti ali celo škodljivi [13]. Predvidevanje in modeliranje takih pomanjkljivosti trga ter možnih ukrepov za zagotavljanje ugodnejših alokacij za vse udeležence na trgu drastično izboljša uporabnost teorije blaginje v praksi. Tak pristop k problematiki družbene blaginje je zelo razširjen tudi kot učni pripomoček [8].

Težava, ki je takšne dopolnitve ne odpravljajo, je, da teorija zanemari način, na katerega se sprejema odločitve o družbeni blaginji. Tudi ob poznavanju najoptimalnejše alokacije namreč ne moremo zagotoviti, da jo bodo odločevalski postopki uresničili. Vzemimo, da želi država odpraviti nepopolnost nekega trga (na primer zmanjševanje eksternalije) z uvedbo davka. Tudi v primeru, da bi lahko povsem natančno izračunali najbolj optimalno višino davka z oceno dobljene alokacije, nam nič ne bi zagotavljalo, da bo ta davek sprejet tudi v političnem procesu. [8] Izrek o nemogočem daje slutiti, da obstajajo kriteriji, bistveni za razumevanje družbene blaginje, ki jih maksimizacija izbrane funkcije družbene blaginje zaradi omenjenih omejitev ne more zaobjeti v celoti, in da se je treba za celostno analizo alokacij, ki vznikajo iz cenovnega in tržnega procesa, ozirati tudi na politične in tržne institucije. Ta namreč predstavljajo ključen faktor pri določanju ustreznosti tržnega ravnovesja. [5]

Seveda ni nujno, da pride do nasprotja med kriteriji, ki jih funkcija družbene blaginje zaobjema, in ostalimi vidiki splošne dobrobiti v skupnosti. Vendar je možnost konflikta dovoljšen razlog, da teorija blaginje sama ne more biti zadostna.

8. Zaključek

Kljub pomankljivostim je teorija blaginje zelo razširjen način za obravnavo ravnovesij na trgu. Koncepti, kot so funkcija družbene blaginje, Pareto optimalnost, Pareto mejna množica in koristnostne funkcije, dajejo zelo uporaben okvir, znotraj katerega se lahko opredelimo do velikega števila gospodarskih stanj in premišljujemo o učinkih ekonomskih ukrepov. Čeprav osnovni izreki teorije blaginje nimajo prevelikega pomena pri praktičnih ekonomskih odločitvah, so vseeno koristni kot teoretično orodje. Prvi izrek nam pomaga pri opisu delovanja nevidne roke trga in nam skupaj z drugim izrekom nudi vpogled v razmerje med cenovnim ravnovesjem in Pareto optimalnostjo. Izrek Arrowa o nemogočem pa nakazuje na omejitve, ki jih srečamo pri maksimizaciji funkcije družbene blaginje.

Slovar strokovnih izrazov

- **endowment** preskrbljenost
- **extremely pivotal voter** izredno ključni volilec
- **spoiler effect** učinek motilca
- **spoiler** volilni motilec
- **second best Pareto efficiency** druga najboljša Pareto učinkovitost
- **first-past-the-post** običajno pravilo večine
- **Borda count** štetje Borda
- **pairwise majority voting** paroma večinsko pravilo

LITERATURA

[1] Wikipedia: *Hyperplane Separation Theorem*, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperplane_separation_theorem`, [6. april 2020]

[2] Ashvin A. Swaminathan: *Arrow's Impossibility Theorem on Social Choice Systems*, dostopno na `https://scholar.princeton.edu/sites/default/files/ashvin/files/arrow-theorem.pdf`, [6. april 2020]

[3] Dan A. Simovici: *Convex Sets* UMB, april 2015, dostopno na `https://www.cs.umb.edu/~dsim/cs671/sCONVs.pdf`, [13. avgust 2020]

[4] A. M. Feldman, R. Serrano: *Arrow's Impossibility Theorem: Two Simple Single-Profile Versions* Brown University Department of Economics, marec 2018

[5] M. Leschke: *A Critique of Welfare Economics* 10.1007/978-3-319-33151-5_4. , 2016

[6] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: *Convex Optimization* Cambridge University Press, 2004

[7] J. Geanakoplos: *Three brief proofs of Arrow's Impossibility Theorem*, Economic Theory 26(1):211-215, 2005

[8] Timothy Besley: *Welfare Economics and Public Chioce*, London School of Economics and Political Science, april 2002

[9] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green: *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995

[10] Dan Usher: *Interpreting Arrow's Impossibility Theorem*, Queen's University, 2017

[11] Robert J. Aumann: Markets with a continuum of traders, Econometrica 32(1):39-50, 1964

[12] Chiaki Hara, Ilya Segal, Steve Tadelis: *Solutions Manual for Microeconomic Theory, Mas-Colell, Whinston and Green*, Oxford University Press, 1997

[13] Yew-Kwang Ng: *Welfare Economics: Introduction and Development of Basic Concepts*: 218, Macmillan Education UK, 1983

[14] Matija Vidmar: *Preference in obstoj funkcije koristnosti : delo diplomskega seminarja*, FMF - Fakulteta za matematiko in fiziko UL, 2011

[15] P. C. Fishburn: *Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters* , Journal of Economic Theory 2:103-106, 1970

[16] A. Sen: *Personal Utilities and Public Judgements: Or What's Wrong With Welfare Economics* The Economic Journal 89(355):537-558, 1979