Marko Slapar

Zapiski predavanj iz matematične analize

Ljubljana, Junij 2012

Naslov: Zapiski predavanj iz matematične analize
Avtor: Marko Slapar
1. izdaja
Dostopno na spletnem naslovu `http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma`

CIP - Katataloški zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517(0.034.2)

SLAPAR, Marko

Zapiski predavanj iz Matematične Analize [Elektronski vir]/
Marko Slapar. - 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2012

Način dostopa (URL):`http://hrast.pef.uni-lj.si/~slaparma/MA.pdf`

ISBN 978-961-276-478-4 (pdf)

262520576

Kazalo

POGLAVJE 1

Odvod

1.1. Definicija odvoda in osnovne lastnosti

DEFINICIJA 1.1.1. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}$. Če obstaja limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

rečemo, da je f *odvedljiva* v točki a in limito

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

imenujemo *odvod funkcije f v točki a*.

Z uvedbo nove spremenljivke $h = x - a$ lahko odvod pišemo tudi kot limito

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

PRIMER 1.1.2. Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^2 + x$ v točki $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) - 6}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{5h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + h) = 5$$

PRIMER 1.1.3. Pokažimo, da funkcija $f(x) = |x|$ ni odvedljiva v točki 0.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Ker je izraz $|h|/h$ enak 1 za pozitivne h in -1 za negativne h, zgornja limita, in s tem tudi odvod v točki 0, ne obstaja.

Pokažimo, da je odvedljivost v točki strožji pogoj kot le zveznost.

IZREK 1.1.4. *Če je funkcija f v a odvedljiva, je f v a zvezna.*

DOKAZ. Velja

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f(a) + (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f(a) + 0 f'(a) = f(a).$$

□

DEFINICIJA 1.1.5. Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je *odvedljiva na intervalu* (a, b), če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$. Če je funkcija f odvedljiva na (a, b) in je odvod $f'(x)$ zvezna funkcija na (a, b), rečemo, da je f *zvezno odvedljiva* na (a, b).

OPOMBA. V kolikor je funkcija definirana na $[a, b]$, lahko definiramo (desni) odvod funkcije f v točki a kot limito

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Podobno definiramo lahko (levi) odvod v točki b kot

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Za funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rečemo, da je *odvedljiva na* $[a, b]$, če je odvedljiva na (a, b) in ima v a oz. b desni oz. levi odvod.

IZREK 1.1.6. *Če sta f in g odvedljivi v a, so v a odvedljive tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in $f \cdot g$. Če je $g(a) \neq 0$ je v a odvedljiva tudi f/g. Velja*

(i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
(ii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *(Leibnizova formula)*
(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

DOKAZ. (i)

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x) - (f(a) \pm g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} (f/g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)/g(x) - f(a)/g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} \\ & \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x - a)} + \lim_{x \to a} \frac{f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{f(a)}{g(a)g(x)} \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{(g(a))^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \end{aligned}$$

□

IZREK 1.1.7. *Naj bo g odvedljiva v točki a in f odvedljiva v točki $g(a)$. Potem je funkcija $f \circ g$ odvedljiva v a in velja*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \quad \textit{(verižno pravilo)}$$

Dokaz. Označimo $b = g(a)$.

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= g'(a)\lim_{s\to b}\frac{f(s)-f(b)}{s-b} = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a).
\end{aligned}
$$

Z s smo označili $g(x)$ in ker je g zvezna v a, gre $s = g(x)$ proti $b = g(a)$, ko gre x proti a. $\square$

1.2. Odvodi osnovnih funkcij

$f(x) = c$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$$

$f(x) = x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1$$

$f(x) = x^n,\ n\in\mathbb{N}$: Z indukcijo pokažimo, da je

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Po zgornjem formula velja za $n = 1$. Predpostavimo, da velja $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$. Potem je

$$(x^n)' = (xx^{n-1})' = x'x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}.$$

$f(x) = e^x$:

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

$f(x) = \ln x$: Velja

$$x = e^{\ln x}$$

in če obe strani odvajamo in upoštevamo verižno pravilo, dobimo

$$1 = e^{\ln x}(\ln x)'$$

oziroma

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$f(x) = a^x,\ a > 0$:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a.$$

$f(x) = x^a,\ a\in\mathbb{R}$:

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x}\frac{a}{x} = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

$f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ in $g(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

in

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$\underline{f(x) = \sin x:}$

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} + \cos x = -\sin x \cdot 0 - \cos x \\ &= \cos x\end{aligned}$$

$\underline{f(x) = \cos x:}$

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$$

$\underline{f(x) = \tan x:}$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\underline{f(x) = \arcsin x:}$

$$\begin{aligned}(\sin(\arcsin x))' = (x)' &\Rightarrow \cos(\arcsin x)(\arcsin x)' = 1 \\ &\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}\end{aligned}$$

Ker je

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$$

lahko poenostavimo

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\underline{f(x) = \arccos x:}$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\underline{f(x) = \arctan x:}$

$$\begin{aligned}(\tan(\arctan x))' = (x)' &\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}(\arctan x)' = 1 \\ &\Rightarrow (\arctan x)' = \cos^2(\arctan x)\end{aligned}$$

Ker je

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2$$

lahko poenostavimo

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Primer 1.2.1. Izračunajmo odvod funkcije

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a}),$$

pri čemer je a poljubno realno število.

$$\begin{aligned}(\ln(x + \sqrt{x^2 + a}))' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} 2x\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\end{aligned}$$

Če v zapisu funkcije $f(x)$ vstavimo $a = 1$, dobimo funkcijo $\operatorname{arsh} x$, ki je inverzna funkcije funkciji $\operatorname{sh} x$, in če vstavimo $a = -1$ dobimo funkcijo $\operatorname{arch} x$, ki je inverz funkcije $\operatorname{ch} x$. Torej

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

pri čemer smo izpeljali

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{x^2-1}.$$

PRIMER 1.2.2. Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^x$.

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(1 + \ln x).$$

Podobno izračunamo vse odvode funkcij oblike $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

PRIMER 1.2.3. Izračunajmo odvod funkcije

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Ker je limita

$$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

je funkcija $f(x)$ zvezna na vsej realni osi. Za $x \neq 0$ je odvod funkcije enak

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3}.$$

V točki $x = 0$ je nekoliko bolj zapleteno, saj moramo izračunati limito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \stackrel{y=1/h}{=} \lim_{y \to \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0.$$

Torej je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

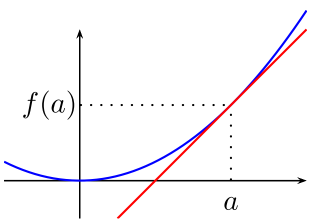
Ker je

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{y=1/x}{=} \lim_{y \to \pm\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0,$$

je f' zvezna in zato f zvezno odvedljiva.

1.3. Geometrijska interpretacija odvoda

Vzemimo poljubno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ in poskusimo določiti tangento na graf funkcije $f(x)$ v točki $a \in D$.



SLIKA 1.1. Tangenta na graf funkcije

Povsem elementarno je težko določiti enačbo tangente, ker poznamo le eno točko, skozi katero mora iti tangenta. To je točka $(a, f(a))$. Za določitev premice pa bi radi poznali koordinate dveh točk, ki ležita na premici. Seveda pa je enostavno določiti enačbo sekante, ki gre skoti točki $(a, f(a))$ ter $(x, f(x))$, pri čemer je x neko število blizu a. Označimo z k_x smerni koeficient te sekante. Izračunamo ga kot kvocient

$$k_x = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Opazimo, da (vsaj za lepe funkcije) velja princip, da bližje ko izberemo točko x točki a, bolj se bo sekanta ujemala s tangento. Za smerni koeficient k tangente to pomeni

$$\lim_{x \to a} k_x = k,$$

ž oziroma

$$k = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x).$$

Definicija 1.3.1. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a. *Tangenta* funkcije f v točki a je premica

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Normala v točki a je premica

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Primer 1.3.2. Določimo tangento in normalo na graf funkcije

$$f(x) = x \arctan x$$

v točki $x = 1$. Velja

$$f'(1) = (\arctan x + \frac{x}{1 + x^2})|_{x=1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Zato je tangenta v točki $x = 1$ enaka

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi - 2}{4}(x - 1) = \frac{\pi - 2}{4}x + \frac{1}{2}$$

in normala je

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi - 2}(x - 1).$$

1.4. Odvodi višjega reda

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I. Odvod f' je nato zopet funkcija, definirana na intervalu I. V kolikor je $f' : I \to \mathbb{R}$ odvedljiva, označimo $(f')' = f''$ in to funkcijo imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Postopek lahko indukcijsko nadaljujemo. Recimo, da imamo n-ti odvod funkcije f, t.j. $f^{(n)}$, in da je le ta funkcija odvedljiva. Označimo $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$ in funkciji rečemo $(n + 1)$-*odvod* funkcije f.

Primer 1.4.1. Izračunajmo višje odvode funkcije $f(x) = xe^x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x + xe^x \\
f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \\
f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= (n + x)e^x.
\end{aligned}$$

Definicija 1.4.2. Naj bo I poljuben interval. Z $\mathcal{C}(I)$ označimo množico zveznih funkcij na I. Če je I odprt interval, s $\mathcal{C}^n(I)$ označimo množico n-krat zvezno odvedljivih funkcij na I, t.j. funkcij, ki jih lahko n-krat odvajamo na I in je njihov n-ti odvod zvezen. S $\mathcal{C}^\infty(I)$ označimo množico neskončno krat odvedljivih funkcij, t.j. funkcij, ki jih lahko poljubno krat odvajamo.

1.5. Geometrijske lastnosti prvega odvoda

Trditev 1.5.1. *Naj bo f definirana v okolici točke a in naj bo f v a odvedljiva.*

(i) Če je $f'(a) > 0$ funkcija f narašča v a, t.j. obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) < f(a)$ za $x \in (a-\delta, a)$ in $f(a) < f(x)$ za $x \in (a, a+\delta)$.

(ii) Če je $f'(a) < 0$ funkcija f pada v a, t.j. obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) > f(a)$ za $x \in (a-\delta, a)$ in $f(a) > f(x)$ za $x \in (a, a+\delta)$.

Dokaz. Pokažimo samo točko (i), saj se (ii) dokaže podobno. Po predpostavki velja

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Iz definicije limite sledi, da obstaja $\delta > 0$, da velja

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

če je $x \in (a-\delta, a+\delta) \backslash \{a\}$. Na intervalu $(a-\delta, a)$ je $x - a < 0$ in je zato $f(x) < f(a)$. Na $(a, a+\delta)$ je $x - a > 0$ in zato $f(a) < f(x)$. □

Izrek 1.5.2 (Rolleov izrek). *Naj bo f zvezna na intervalu $[a, b]$, odvedljiva na (a, b), in naj velja $f(a) = f(b)$. Potem obstaja $\xi \in (a, b)$, da velja $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ker je funkcija zvezna na $[a, b]$ ima f na $[a, b]$ maksimum in minimum. V kolikor f ni konstantna, je vsaj eden od njiju različen od $f(a)(= f(b))$. Recimo, da je to maksimum (enak sklep je za minimum) in da je le ta dosežen v $\xi \in (a, b)$. Ker ima f v ξ maksimum, funkcija v ξ ne narašča in ne pada, in iz prejšnje trditve sledi, da je $f'(\xi) = 0$. □

Opomba. Rolleov izrek nam pove, da ima funkcija, ki je zvezna na $[a, b]$, odvedljiva na (a, b), in za katero velja $f(a) = f(b)$, vsaj eno točko $\xi \in (a, b)$, za katero je tangenta vzporedna z x-osjo.

Izrek 1.5.3 (Lagrangeov izrek). *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Potem obstaja $\xi \in (a, b)$, da velja*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Dokaz. Definirajmo $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funkcija g je zvezna na $[a, b]$ ter odvedljiva na (a, b) in velja $g(a) = f(a)$ in $g(b) = f(a)$. Po Rolleovem izreku obstaja $\xi \in (a, b)$, da velja $g'(\xi) = 0$, kar pomeni

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

oziroma

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

Posledica 1.5.4. *Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Velja*

(i) $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$ natanko tedaj, ko je f naraščajoča na (a, b).

(ii) $f'(x) \leq 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$ *natanko tedaj, ko je* f *padajoča na* (a, b).
(iii) *Če je* $f'(x) > 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$, *je* f *strogo naraščajoča na* (a, b).
(iv) *Če je* $f'(x) < 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$, *je* f *strogo padajoča na* (a, b).

Dokaz. (i) Predpostavimo, da je $f'(x) \geq 0$ na (a, b). Naj bosta $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Iz Lagrangeovega izreka sledi $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ za nek $\xi \in (x_1, x_2)$. Ker je $f'(\xi) \geq 0$ velja $f(x_2) \geq f(x_1)$. Obratno, če je f naraščajoča, za $h > 0$ velja $f(x+h) \geq f(x)$ in za $h < 0$ $f(x+h) \leq f(x)$. Zato je za vsak majhen $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

in tako

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Podobno dokažemo ostale trditve.

Opomba. Za funkcijo $f(x) = x^3$ velja $f'(0) = 0$, a funkcija vseeno strogo narašča na celem $\mathbb{R}$ (tudi skozi točko 0). Zato imamo v točkah (iii) in (iv) implikacijo le v eno smer in ne ekvivalence.

□

1.6. Ekstremi funkcij

Definicija 1.6.1. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija f ima v $a \in D$ *globalni maksimum* (*globalni minimum*), če za vsak $x \in D$ velja $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$. Funkcija f ima v b *lokalni maksimum* (*lokalni minimum*), če ima f zožena na neko okolico b v b globalni maksimum (globalni minimum).

Definicija 1.6.2. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ odvedljiva v $a \in D$. Če je $f'(a) = 0$, rečemo, da je a *stacionarna točka* za funkcijo f.

Trditev 1.6.3. *Naj bo* $f : I \to \mathbb{R}$, *kjer je* I *interval. Če ima* f *v* $a \in I$ *lokalni ekstrem in je* f *v* a *odvedljiva, je* a *stacionarna točka, i.e.* $f'(a) = 0$.

Dokaz. Ker je f v a odvedljiva, je a nujno notranja točka intervala I. Če je $f'(a) > 0$, f v a narašča, in zato f v a nima lokalnega ekstrema. Če je $f'(a) < 0$, f v a pada in zopet v a ne more imeti lokalnega ekstrema. Torej je nujno $f'(a) = 0$. □

Iskanje globalnih ekstremov. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem ima f na $[a, b]$ tako globalni minimum kot tudi globalni maksimum. Iz trditve 1.6.3 sledi, da so edini možni kandidati za točke, kjer ima funkcija globalne ekstreme,

1. robni točki a in b,
2. stacionarne točke za f, t.j. točke, kjer je $f'(x) = 0$ in
3. točke $x \in (a, b)$, kjer funkcija f ni odvedljiva.

Da poiščemo globalni maksimum in globalni minimum moramo preveriti vrednosti funkcije f v teh točkah, in izbrati največjo oziroma najmanjšo. Običajno točk, v katerih moramo vrednosti preveriti ni veliko, seveda pa se lahko tudi zgodi, da je takih ročk neštevno mnogo, in nam ta strategija ni v veliko pomoč.

Primer 1.6.4. Poiščimo globalni ekstrem funkcije

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos^2 x$$

na intervalu $[0, 2\pi]$. Funkcija je odvedljiva na $[0, 2\pi]$ zato so kandidati za globalne ekstreme le stacionarne in robne točke. Stacionarne točke so

$$f'(x) = \sqrt{3} \cos x - 2 \cos x \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3} - 2 \sin x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pi/2,\ 3\pi/2,\ x = \pi/3,\ x = 2\pi/3.$$

Preverimo vrednosti v stacionarnih točkah in robnih točkah intervala: $f(0) = 1$, $f(2\pi) = 1$, $f(\pi/2) = \sqrt{3}$, $f(3\pi/2) = -\sqrt{3}$, $f(\pi/3) = 7/4$, $f(3\pi/2) = 7/4$. Globalni minimum je $-sqrt3$, dosežen v $x = 3\pi/2$ in globalni maksimum je $7/4$, dosežen v $x = \pi/2$ in $x = 3\pi/2$.

PRIMER 1.6.5. Poiščimo dve nenegativni števili z vsoto 9, tako da bo produkt prvega s kvadratom drugega največji možen. Če eno od teh dveh števil označimo z x, je drugo število $9 - x$. Poiskati moramo torej maksimum funkcije

$$f(x) = x(9-x)^2,$$

kjer je f definirana na $[0, 9]$. Poiščimo stacionarne točke:

$$f'(x) = (9-x)^2 - 2x(9-x) = (9-x)(9-3x) \Leftrightarrow x = 9,\ x = 3.$$

Ker nas zanimajo le stacionarne točke iz notranjosti intervala, je to le $x = 3$. Kandidata za ekstrem sta tudi $x = 0$ in $x = 9$. Preverimo vrednosti: $f(0) = 0$, $f(9) = 0$, $f(3) = 108$. Maksimum 108 je torej dosežen v točki $x = 3$.

Klasifikacija lokalnih ekstremov. Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Če je v točki $c \in (a, b)$ lokalni ekstrem, je c stacionarna točka. V tem razdelku si bomo pogledali, kdaj je stacionarna točka dejansko lokalni ekstrem in, ali je ta lokalni ekstrem lokalni maksimum ali lokalni minimum.

IZREK 1.6.6. *Naj bo f definirana in odvedljiva v okolici točke a in naj bo $f'(a) = 0$.*

(i) Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) \le 0$ za $x \in (a-\delta, a)$ in $f'(x) \ge 0$ za $x \in (a, a+\delta)$, ima f v a lokalni minimum.
(ii) Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) \ge 0$ za $x \in (a-\delta, a)$ in $f'(x) \le 0$ za $x \in (a, a+\delta)$, ima f v a lokalni maksimum.
(iii) Če obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) > 0$ za $x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$ oziroma $f'(x) < 0$ za $x \in (a-\delta, a+\delta)\backslash\{a\}$, f v a nima lokalnega ekstrema.

DOKAZ. Dokaz sledi iz Posledice 1.5.4. □

IZREK 1.6.7. *Naj bo f definirana v okolici točke a in naj ima v a drugi odvod. Naj bo $f'(a) = 0$.*

(i) Če je $f''(a) > 0$ ima f v a lokalni minimum.
(ii) Če je $f''(a) < 0$ ima f v a lokalni maksimum.

DOKAZ. Če je $f''(a) > 0$, f' v a narašča, kar sledi iz trditve 1.5.1. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $f'(x) < f'(a) = 0$ za $x \in (a-\delta, a)$ in $f'(x) > f'(a) = 0$ za $a \in (a, a+\delta)$. Torej ima f v a lokalni minimum po točki (i) prejšnjega izreka. Podobno dokažemo točko (ii). □

PRIMER 1.6.8. Klasificirajmo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos^2 x$$

na intervalu $(0, 2\pi)$. Stacionarne točke smo že izračunali: $x = \pi/2,\ x = 3\pi/2,\ x = \pi/3,\ x = 2\pi/3$. Izračunajmo drugi odvod

$$f''(x) = (\sqrt{3}\cos x - 2\cos x \sin x)' = -\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x.$$

$f''(\pi/2) = -\sqrt{3} + 2 > 0$, torej je v $\pi/2$ lokalni minimum. $f''(3\pi/2) = \sqrt{3} + 2 > 0$, torej je v $3\pi/2$ lokalni minimum. $f''(\pi/3) = -1/2$, torej je v $\pi/3$ lokalni maksimum in $f''(2\pi/3) = -1/2$, torej je v $2\pi/3$ lokalni maksimum.

1.7. Konkavnost in konveksnost funkcij

DEFINICIJA 1.7.1. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je *konveksna* na intervalu I, če za vsaki dve točki $a < b \in I$ in za vsak $x \in (a, b)$ velja

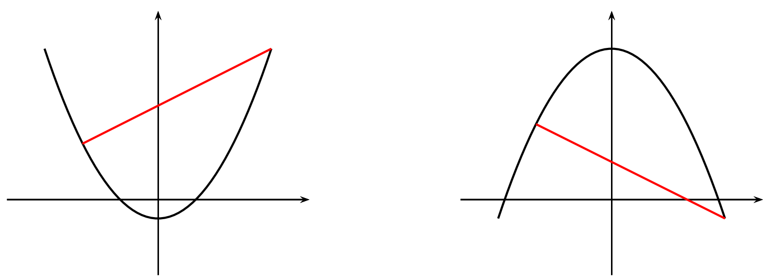
$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Če za vsak par $a < b \in I$ in vsak $x \in (a, b)$ velja

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

je funkcija f konkavna na I.

OPOMBA. Funkcija f je torej konveksna, če graf funkcije med poljubnima točkama $a < b$ leži pod sekanto skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b)$. Če vedno leži nad sekanto, je konkavna.



SLIKA 1.2. Konkavna in konveksna funkcija

Zgornja definicija konveksnosti in konkavnosti vnaprej ne zahteva nobene dodatne lastnosti, vendar ni težko dokazati, da je vsaka konveksna oz. konkavna funkcija nujno vsaj zvezna. V nadaljevanju bomo pogledali še nekaj dodatnih karakterizacij konveksnosti in konkavnosti, ki pa vnaprej predpostavljajo obstoj prvega oziroma drugega odvoda.

TRDITEV 1.7.2. *Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ odvedljiva na odprtem intervalu I. Funkcija f je konveksna na I natanko tedaj, ko za vsak par $x, y \in I$ velja*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

in konkavna, če za vsak par $x, y \in I$ velja

$$f(y) \leq f(x) + f'(x)(y - x).$$

DOKAZ. Trditev bomo pokazali samo za konveksnost. Konkavnost je povsem analogna. Naj bo funkcija odvedljiva funkcija f konveksna na I, in naj bosta $a, x \in I$, $a < x$. Naj bo $a < a + h < x$. Potem velja

$$f(a + h) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}h$$

oziroma

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Zato je

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

oziroma

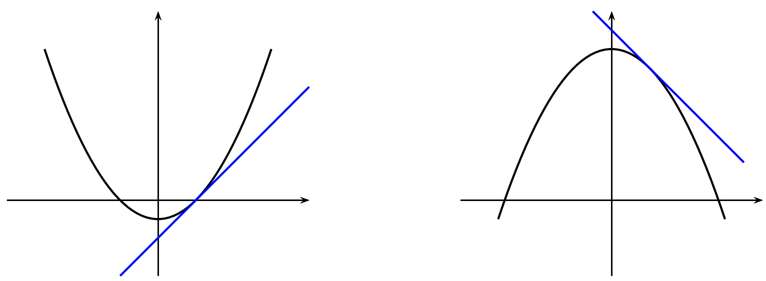
$$f(a) + f'(a)(x-a) \leq f(x).$$

Podobeno lahko vidimo pri $x < a$. Pokažimo še obrat. Naj bosta $a, b \in I$, $a < b$ poljubni točki. Naj bo $a < x < b$. Po predpostavki velja

$$f(x) + f'(x)(a-x) \leq f(a), \quad f(x) + f'(x)(b-x) \leq f(b),$$

torej obe točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ ležita nad tangento v točki $(x, f(x))$. Zato $(x, f(x))$ leži pod daljico s krajiščema $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Ker je x poljubna točka med a in b, celoten graf funkcije f med a in b leži pod to sekanto. Torej je funkcija konveksna. □

Opomba. Zgornji pogoj nam pove, da je funkcija konveksna, če njen graf leži nad katero koli tangento in konkavna, če leži pod tangento. Seveda pa ta pogoj predpostavlja obstoj tangente oziroma odvedljivost funkcije.



Slika 1.3. Konkavna in konveksna funkcija

Trditev 1.7.3. *Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Funkcija f je konveksna na (a, b) natanko tedaj, ko je f' naraščajoča funkcija na (a, b). Funkcija f je konkavna natanko tedaj, ko je f' padajoča funkcija.*

Dokaz. Trditev bomo zopet pokazali le za konveksne funkcije. Konkavnost je podobna. Predpostavimo torej, da je f konveksna. Naj bosta $a < b$ in naj bo $a < x < b$ poljuben. Točka $(x, f(x))$ leži pod sekanto skozi $(a, f(a))$ ter $(b, f(b))$. Naj bo k smerni koeficient te sekante. Velja torej

$$f(x) \geq f(a) + k(x-a), \quad f(x) \geq f(b) + k(x-b)$$

oziroma

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq k, \quad k \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Če pri prvi neenakosti pošljemo x proti a, pri drugi pa proti b, dobimo

$$f'(a) \leq k, \quad k \leq f'(b).$$

Torej je $f'(a) \leq f'(b)$. Ker to velja za poljubna $a < b$ je f' naraščajoča. Obrat je posledica Lagrangeovega izreka. Predpostavimo sedaj, da je f' naraščajoča in naj valja $a < x$. Potem je

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \geq f'(a)(x-a),$$

kar natanko pomeni, da $(x, f(x))$ leži nad tangento v točki $(a, f(a))$. Povsem analogno je za $x < a$

$$f(a) - f(x) = f'(\xi)(a - x) \leq f'(a)(a - x),$$

kar zopet pomeni, da $(x, f(x))$ leži nad tangento v $(a, f(a))$. $\square$

V praksi je najbolj primeren način ugotavljanja konkavnosti in konveksnosti naslednji:

Posledica 1.7.4. *Naj bo $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva. Funkcija f je konveksna na (a, b) natanko tedaj, ko je $f'' \geq 0$ na (a, b). Funkcija f je konkavna natanko tedaj, ko je $f'' \leq 0$ na (a, b).*

Dokaz. Sledi iz zgornje trditve s pomočjo točk (i) in (ii) iz posledica 1.5.4. $\square$

Definicija 1.7.5. Točka, kjer funkcija spremeni konkavnost v konveksnost oziroma obratno, se imenuje *prevoj*.

Primer 1.7.6. Poiščimo intervala naraščanja in padanja ter konkavnosti in konveksnosti funkcije $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(x - 1)^2 e^{-x},$$

torej je funkcija ves čas padajoča. Drugi odvod je enak

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 1)e^{-x} \\ &= (x^2 - 4x + 3)e^{-x} = (x - 3)(x - 1)e^{-x}. \end{aligned}$$

Torej je funkcija konveksna na $(-\infty, 3)$ in $(1, \infty)$ ter konkavna na $(-3, -1)$.

1.8. L'Hospitalovo pravilo

V tem razdelku si bomo pogledali, kako si lahko pri računanju limit tipa $\frac{0}{0}$ in $\frac{\infty}{\infty}$ pogosto pomagamo z odvodi funkcij. Najprej dokažimo naslednjo pomožno trditev.

Trditev 1.8.1. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni in odvedljivi na (a, b). Naj velja $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Potem obstaja $\xi \in (a, b)$, da velja*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz. Definirajmo

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Funkcija F je definirana na $[a, b]$ in zvezna na (a, b) ter velja $F(a) = F(b)$. Po Rolleovem izreku obstaja $\xi \in (a, b)$, da je $F'(\xi) = 0$, kar pomeni ravno

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

$\square$

Opomba. Lagrangeov izrek je poseben primer zgornje trditve, in ga dobimo, če vzamemo $g(x) = x$.

Izrek 1.8.2 (L'Hospitalovo pravilo 1). *Naj bosta $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljivi in naj velja $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Naj velja $f(a) = g(a) = 0$. Če obstaja limita*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

in velja

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. S pomočjo zgornje trditve imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\&=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Pri zadnji enakosti smo upoštevali, da je $a<\xi<x$ in da zadnja limita dejansko obstaja. $\square$

Opomba. Izrek smo napisali v bolj splošni obliki, torej za enostranske limite. Seveda potem velja tudi za limite.

L'Hospitalovo pravilo velja tudi v primeru limit tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Navedimo izrek brez dokaza.

Izrek 1.8.3 (L'Hospitalovo pravilo 2). *Naj bosta $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ odvedljivi in naj velja $g(x)\neq 0$ in $g'(x)\neq 0$ za vsak $x\in(a,b)$. Naj velja*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to a^+}g(x)=\pm\infty.$$

Če obstaja limita

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$$

in velja

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

S pomočjo vpeljave nove spremenljivke lahko pokažemo, da analogna rezultata valjata tudi za limite v neskončnosti.

Posledica 1.8.4. *Naj bosta $f,g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ odvedljivi pri čemer je $g(x)\neq 0$ in $g'(x)\neq 0$ za vsak $x\in(a,\infty)$. Naj velja ali*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

ali

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}g(x)=\pm\infty.$$

Če obstaja limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

in velja

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DOKAZ. Vpeljemo novo spremenljivko $y = 1/x$. Potem velja

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y\to 0^+}\frac{f(1/y)}{g(1/y)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

□

PRIMER 1.8.5. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sin(\pi x)}.$$

Ker sta tako števec kot imenovalec enaka 0 v točki 1, lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sin(\pi x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{\pi\cos(\pi x)} = -\frac{3}{4\pi}.$$

PRIMER 1.8.6. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}.$$

Števec in imenovalec sta oba enaka ∞ v neskončnosti. Z L'Hospitalovim pravilom dobimo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

PRIMER 1.8.7. Izračunajmo limito

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Limito malo preoblikujemo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}.$$

Velja

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Ker je e^x zvezna, je

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

1.9. Risanje grafov funkcij

Preden skiciramo graf funkcije $f(x)$:

(i) S pomočjo izraza $f(x)$
- Določimo definicijsko območje funkcije f
- Ugotovimo obnašanje f na robu definicijskega območja ali morda v $\pm\infty$
- Najdemo ničle funkcije f

(ii) S pomočjo odvoda $f'(x)$
- Določimo intervale naraščanja in padanja.
- Določimo lokalne in globalne ekstreme.
- Bolj natančno določimo obnašanje v robnih točkah in v $\pm\infty$ (asimptote)

(i) S pomočjo drugega odvoda $f''(x)$.
- Določimo intervale konkavnosti in konveksnosti ter prevoje.

Primer 1.9.1. Čim bolj natančno narišimo graf funkcije

$$f(x) = x^3\frac{1-\ln x}{1+\ln x}.$$

- Definicijsko območje je $(0,\infty)\backslash\{1/e\}$.
- Obnašanje na robu definicijskega območja.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x^3\frac{1-\ln x}{1+\ln x} &= \lim_{x\to 0^+} x^3\frac{1/\ln x-1}{1/\ln x+1} = 0\\
\lim_{x\to 1/e^-} x^3\frac{1-\ln x}{1+\ln x} &= -\infty\\
\lim_{x\to 1/e^+} x^3\frac{1-\ln x}{1+\ln x} &= \infty\\
\lim_{x\to \infty} x^3\frac{1-\ln x}{1+\ln x} &= \lim_{x\to \infty} x\frac{1/\ln x-1}{1/\ln x+1} = \infty
\end{aligned}$$

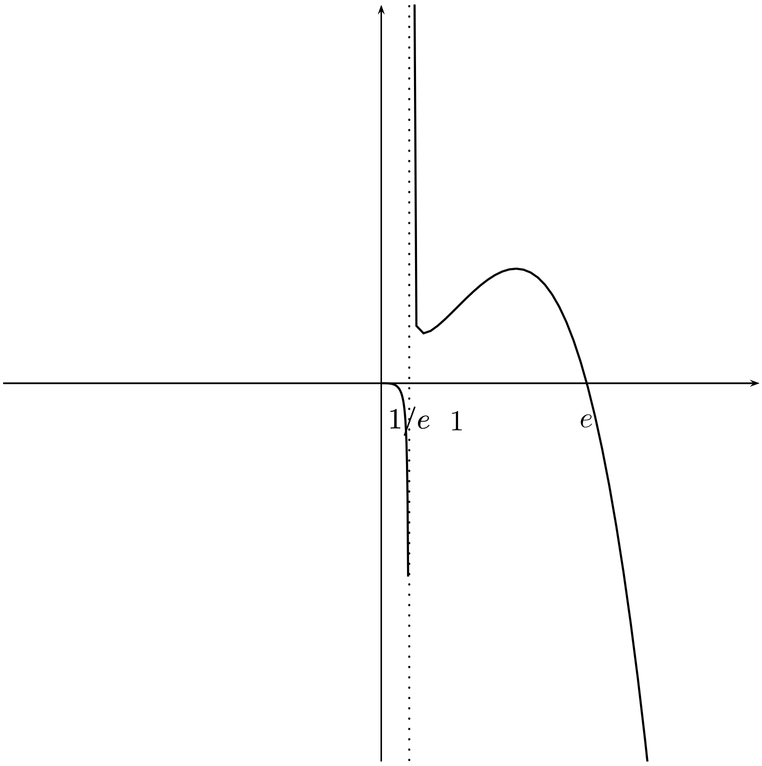
- Ničla funkcije je $x = e$ (v točki $x = 0$ funkcija ni definirana, vendar ima v 0 desno limito 0).
- $f'(x) = 3x^2\frac{1-\ln x}{1+\ln x} - 2x^2\frac{1}{(1+\ln x)^2} = x^2\frac{1-3\ln^2 x}{(1+\ln x)^2} = 0 \iff x = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$
- Funkcija je strogo padajoča, če je $x < e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ ali $x > e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ in strogo naraščajoča na $(e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}, e^{\frac{1}{\sqrt{3}}})$, zato ima lokalni minimum v $e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ in lokalni maksimum v $e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.
- Poglejmo si, pod kakšnim kotom se graf funkcije približuje izhodišču

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\frac{1-3\ln^2 x}{(1+\ln x)^2} = 0,$$

  zato se ničli približije vodoravno.
- Izračunajmo drugi odvod

$$f''(x) = -2x\ln x\frac{3\ln^2 x + 3\ln x + 2}{(1+\ln x)^3}.$$

  Ker je $3\ln^2 x+3\ln x+2$ vedno pozitiven, drugi odvod spremeni predznak zgolj pri $x = 1$ ($\ln x = 0$) in $x = 1/e$ (ničla $1 + \ln x$ v imenovalcu). Drugi odvod je pozitiven na $(1/e, 1)$ in negativen na $(0, 1/e) \cup (1,\infty)$.



SLIKA 1.4. Graf funkcije $f(x) = x^3 \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

1.10. Krivulje v $\mathbb{R}^2$

POGLAVJE 2

Nedoločeni integral

2.1. Definicija nedoločenega integrala

DEFINICIJA 2.1.1. Odvedljiva funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ je nedoločeni integral funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ na odprtem intervalu I, če za vsak $x \in I$ velja $F'(x) = f(x)$. Pišemo

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

PRIMER 2.1.2. Funkcija $F(x) = \cos x + x^2/2$ je nedoločeni integral funkcije $f(x) = -\sin x + x$, saj je $(\cos x + x^2/2)' = \sin x + x$.

Vsaka funkcija nima nedoločenega integrala. Poglejmo si primer take funkcije.

PRIMER 2.1.3. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Predpostavimo, da obstaja taka odvedljiva funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da velja $F'(x) = f(x)$. Taka funkcija F bo padala na $(-\infty, 0)$, saj je $F'(x) = -1$ za $x < 0$ in naraščala na $(0, \infty)$, saj je $F'(x) = 1$ za pozitivne x. Zato mora imeti F v točki $x = 0$ lokalni minimum in s tem $F'(0) = 0$, kar pa ni res. Seveda ima funkcija f nedoločeni integral na intervalu $(-\infty, 0)$ in tudi na $(0, \infty)$, vendar smo pokazali, da nedoločenega intervala nima na vsem $\mathbb{R}$. Funkcija f iz tega primera ni zvezna funkcija. Kasneje bomo pokazali, da imajo vse zvezne funkcije nedoločeni integral.

TRDITEV 2.1.4. *Če je funkcija $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$, je za vsak $C \in \mathbb{R}$ tudi funkcija $G(x) = F(x) + C$ tudi nedoločeni integral funkcije f. Obratno, če sta $F(x)$ in $G(x)$ nedoločena integrala funkcije f na odprtem intervalu I, obstaja $C \in \mathbb{R}$, da je $G(x) = F(x) + C$.*

DOKAZ. Prvi del je preprost, saj je $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Obratno, naj bosta F, G oba nedoločena integrala funkcije f na I in definirajmo $H(x) = G(x) - F(x)$. Velja $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Naj bosta $x, y \in I$ poljubni števili. Po Lagrangeovem izreku je $H(y) - H(x) = H'(\xi)(y - x) = 0$. Torej je $H(x) = H(y)$. Ker to velja za vsak par števil, je funkcija H konstanta, torej $H(x) = C$ za nek $C \in \mathbb{R}$ in s tem $G(x) = F(x) + C$. $\square$

2.2. Integrali nekaterih elementarnih funkcij

Večino spodnjih integralov dobimo preprosto tako, da preberemo nazaj tabelo odvodov. Pri ostalih integralih pa lahko veljavnost preverimo preprosto z odvajanjem. Bomo pa kasneje nekatere od teh formul tudi samostojno izpeljali.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C,\ a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\arcsin x$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2 + C$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$+C
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$
$\sqrt{x^2\pm a^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin x + C$

2.3. Lastnosti nedoločenega integrala

Naslednji dve lastnosti nedoločenega integrala sledita direktno iz definicije in linearnosti odvoda

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$$

Bolj podrobno si oglejmo metodo integracije po delih (per-partes) in zamenjavo spremenljivke.

Trditev 2.3.1 (per-partes). *Naj bosta $f(x)$ in $g(x)$ odvedljivi. Potem velja*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Dokaz. Dokaz je posledica Leibnizove formule za odvod produkta

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Če obe strani integriramo, dobimo

$$\int (f(x)g(x))'\ dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

in ker je $\int (f(x)g(x))'\ dx$ po definiciji enak $f(x)g(x)$ dobimo zgornjo formulo. $\square$

Opomba. Naj bo $f(x)$ odvedljiva funkcija. Oznaki $df = f'(x)\,dx$ rečemo *diferencial funkcije* f. S pomočjo te oznake lahko zgornjo formulo krajše napišemo kot

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

kjer smo označili $u = f(x)$ in $v = g(x)$. Formulo za integracijo po delih lahko razumemo kot (ne preveč dober) poskus formule za integracijo produkta dveh funkcij.

Trditev 2.3.2 (substitucija). *Naj bo $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$ ter $\phi(x)$ odvedljiva funkcija. Potem velja*

$$F(\phi(t)) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Dokaz. Formula je direktna posledica verižnega pravila za odvod:

$$(F(\phi(t)))' = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Obe strani le še integriramo. □

Opomba. Pravilo substitucije običajno uporabimo na naslednji način. Recimo, da želimo izračunati integral $\int f(x)\,dx$. Uvedemo novo spremenljivko t s pomočjo formule $x = \phi(t)$ in izračunamo integral

$$G(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Potem je

$$F(x) = \int f(x)\,dx = G(\phi^{-1}(x)).$$

Primer 2.3.3. S pomočjo integracije po delih izračunajmo integral

$$\int x^2 \sin x\,dx.$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x\,dx &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.
\end{aligned}$$

Primer 2.3.4. S pomočjo integracije po delih izračunajmo integral

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x\,dx &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\
&= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Primer 2.3.5. Izračunajmo integral

$$\int xe^{-x^2}\,dx.$$

Vpeljimo substitucijo $x = \sqrt{t}$. Potem je $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int x\varepsilon^{-x^2}\,dx &= \int \sqrt{t}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \\
&= \int \frac{1}{2}e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C \\
&= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.
\end{aligned}$$

PRIMER 2.3.6. Izračunajmo integral

$$\int \tan x\, dx.$$

Uvedimo substitucijo $t = \cos x$. Potem je $dt = -\cos x dx$.

$$\begin{aligned}\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{dt}{t} \\ &= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

2.4. Integracijske metode

Integracija racionalnih funkcij. V tem razdelku bomo pogledali metodo, ki nam (pod določenimi pogoji) omogoča integracijo racionalnih funkcij. Radi bo torej izračunali integral

$$\int R(x)\, dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx,$$

kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ poljubna polinoma. Postopek je naslednji:
1. Če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q polinoma najprej delimo. Tako dobimo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int p_1(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\, dx,$$

pri čemer sta p_1 in r polinoma, in je stopnja r manjša od stopnje q. Prvi integral preprosto izračunamo, za drugega pa postopek nadaljujemo.
2. Polinom q razcepimo na nerazcepne faktorje:

$$q(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdots (x-a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}$$

3. Racionalno funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ razcepimo na parcialne ulomke

$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{q(x)} = &\frac{A_1^1}{(x-a_1)} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}^1}{(x-a_1)^{n_1}} + \cdots \\ &+ \frac{A_1^k}{(x-a_k)} + \frac{A_2^k}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_{n_k}^k}{(x-a_k)^{n_k}} \\ &+ \frac{C_1^1 x + D_1^1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{C_2^1 x + D_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{n_1}^1 x + D_{n_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \cdots \\ &+ \frac{C_1^l x + D_1^l}{(x^2+p_lx+q_l)} + \frac{C_2^l x + D_2^l}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + \cdots + \frac{C_{n_1}^l x + D_{n_1}^l}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}\end{aligned}$$

3. Vsakega od sumandov v razcepu na parcialne ulomke integriramo.
Izračunati moramo torej znati naslednje tipe integralov

$$(i) \int \frac{dx}{x-a} \qquad (ii) \int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

$$(iii) \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\, dx \qquad (iv) \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\, dx,$$

pri čemer je kvadratni polinom v imenovalcu zadnjih dveh integralov nerazcepen, torej nima realnih ničel. Poglejmo vsakega od zgornjih integralov.
(i)

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

(ii)

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,$$

(iii) Označimo z $D = p^2 - 4q$ diskriminanto kvadratnega polinoma v imenovalcu integrala

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}.$$

Ker smo predpostavili, da je ta kvadratni polinom nerazcepen, je $D < 0$. Najprej pišemo

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p) + (b - \frac{ap}{2})}{x^2+px+q}.$$

Zato je

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{2b+ap}{2}\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Prvi integral lahko preprosto izračunamo s pomočjo vpeljave nove spremenljivke $t = x^2+px+q$, $dt = 2x+p$:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x^2+px+q).$$

Pri drugem integralu najprej kvadratni polinom x^2+px+q zapišemo v temenski obliki

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-D}{4}.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $t = x + p/2$ preprosto dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+px+q} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{-D}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{-D}} = \frac{2}{\sqrt{-D}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{-D}}.\end{aligned}$$

Če združimo skupaj, dobimo pri $D = p^2 - 4q < 0$

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx =& \frac{a}{2}\ln(x^2+px+q) \\ &+ \frac{2b-ap}{2}\frac{2}{\sqrt{-D}}\arctan\frac{(x^2+px+q)'}{\sqrt{-D}} + C.\end{aligned}$$

(iv) Pri integralu

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

bomo nekoliko manj natančni, in bomo samo pokazali, kakšna je oblika rezultata. Označimo zopet $D = p^2 - 4q < 0$. Podobno kot zgoraj, naredimo najprej razcep

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\frac{a}{2}(2x+p) + \frac{2b-ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}.$$

Zato je

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \frac{2b-ap}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Prvi integral je

$$\int \frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^n}\,dx = -\frac{n}{(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Poglejmo si še drugi integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{dx}{\left((x+p/2)^2+\left(\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)^2\right)^n} \\
&= \frac{4^n}{(-D)^n}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{-D}}(x+p/2)\right)^2+1\right)^n} \\
&= \left((\frac{2}{\sqrt{-D}}\right)^{2n-1}\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}
\end{aligned}$$

kjer je $t=\frac{2}{\sqrt{-D}}(x+p/2)$. Torej moramo izračunati integral

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Poskusimo z integracijo po delih

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^{n+1}} \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{t^2dt}{(t^2+1)^{n+1}} \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{n+1}}dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} - 2n\int \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Torej dobimo formulo

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

oziroma

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{t}{(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Induktivno lahko iz te formule izpeljemo, da je

$$I_n = \frac{P(t)}{(t^2+1)^{n-1}} + A\arctan t,$$

kjer je $P(t)$ nek polinom stopnje $2n-3$ in A neka konstanta. Če vrnemo v rezultat prvotno spremenljivko in združimo, dobimo

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,dx = &\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} \\
&+ A\ln(x^2+px+q) + B\arctan\frac{(x^2+px+q)'}{\sqrt{-D}} + C,
\end{aligned}$$

kjer je polinom P nek polinom (ni poljuben, vendar ga nismo natančno izračunali) stopnje manjše ali enake $n-3$ in sta A in B neki konstanti.

Če zberemo vse skupaj dobimo, da je integral

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

oblike

$$\begin{aligned}
&\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = \\
&\frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1-1}\cdots(x-a_k)^{n_k-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l-1}} \\
&+ A_1\ln|x-a_1| + \cdots + A_k\ln|x-a_k| \\
&+ B_1\ln(x^2+p_1x+q_1) + \cdots + B_l\ln(x^2+p_kx+q_k) \\
&+ C_1\arctan\frac{(x^2+p_1x+q_1)'}{\sqrt{-D}} + \cdots + C_l\arctan\frac{(x^2+p_kx+q_k)'}{\sqrt{-D}},
\end{aligned}$$

kjer je $P(x)$ stopnje največ $(n_1-1)+\cdots(n_k-1)+2(m_1-1)+\cdots 2(m_l-1)-1$, torej eno manj kot v imenovalcu. Zadnjo formulo lahko razumemo kot nastavek za izračun integrala racionalne funkcije. Kot smo videli, za ta nastavek potrebujemo razcep polinoma q na nerazcepne faktorje. Le to je v splošnem zelo težko doseči, saj od nas pravzaprav zahteva, da poiščemo vse ničle (realne in kompleksne) polinoma q. V kolikor nam to uspe, uporabimo zgornji nastavek in preko odvajanja določimo konstante. Poglejmo si to na nekaj primerih

Primer 2.4.1. Izračunajmo integrale

- $\int \frac{3x^3+2}{x^3+x}\,dx$
- $\int \frac{x^2+x+1}{x^4+4x^2}\,dx$
- $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

Integrali trigonometričnih funkcij. Poglejmo si integrale oblike

$$\int R(\sin\varphi,\cos\varphi)d\varphi,$$

kjer je R neka racionalna funkcija dveh spremenljivk. Tak integral lahko vedno prevedemo na integral neke racionalne funkcije (kar smo obravnavali zgoraj) s pomočjo substitucije

$$x = \tan\frac{\varphi}{2}.$$

Poglejmo si zakaj. Velja

$$1+\tan^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

zato velja

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

in zato

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

ter

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Izračunajmo še $d\phi$

$$dx = \frac{1}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi$$

in zato

$$d\varphi = \frac{2}{1+x^2}.$$

Prvotni integral po uvedbi nove spremenljivke postane

$$\int R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}dx,$$

Primer 2.4.2. Izračunajmo integral

$$\int \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi.$$

Po vpeljavi nove spremenljivke $x = \tan\frac{\varphi}{2}$ prevedemo integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi}d\varphi &= \int \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}}\frac{2}{1+x^2}dx \\
&= \int \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = \int\left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)dx \\
&= -x + 2\arctan x + C = -\tan\frac{\varphi}{2} + 2\arctan\tan\frac{\varphi}{2} + C \\
&= -\tan\frac{\varphi}{2} + \phi + C
\end{aligned}$$

Poglejmo si sedaj nekaj posebnih primerov, ko lahko uvedemo bolj prijazno substitucijo. Pri integralu oblike

$$\int R(\sin^2\varphi, \cos\varphi)\sin\varphi d\phi$$

uvedemo novo spremenljivko

$$x = \cos\varphi,$$

ki nam integral prevede v integral

$$\int R(\sin^2\varphi, \cos\varphi)\sin\varphi d\phi = -\int R(1-x^2, x)\,dx.$$

Podobno pri integralu

$$\int R(\cos^2\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi d\phi$$

uvedemo novo spremenljivko

$$x = \sin\varphi,$$

ki nam integral prevede v integral

$$\int R(\cos^2\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi d\phi = \int R(1-x^2, x)\,dx.$$

Primer 2.4.3. Izračunajmo integral

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi.$$

Integral lahko preoblikujemo v

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\cos\varphi d\varphi$$

in je zgornje oblike. Vpeljemo novo spremenljivko $x = \sin\varphi$ in dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}d\varphi &= \int \frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx\\ &= \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C\\ &= \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{4}\ln\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} + C\end{aligned}$$

kar lahko izračunamo po metodi za integracijo racionalnih funkcij.

Kot zadnji si oglejmo še integral oblike

$$\int R(\sin^2\varphi, \cos^2\varphi)d\varphi,$$

torej integral, kjer funkciji kosinus in sinus oba nastopata le v sodih potencah. V tem primeru uvedemo substitucijo

$$x = \tan\varphi,$$

ki nam s pomočjo formul

$$\begin{aligned}\cos^2\varphi &= \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+x^2}\\ \sin^2\varphi &= 1-\cos^2\varphi = \frac{x^2}{1+x^2}\\ d\varphi &= \cos^2\varphi\,dx = \frac{dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

prevede integral v

$$\int R(\sin^2\varphi, \cos^2\varphi)d\varphi = \int R\left(\frac{x^2}{1+x^2}, \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Primer 2.4.4. Izračunajmo integral

$$\int \frac{1}{1+\cos^2\varphi}d\varphi.$$

Po uvedbi spremenljivke $x = \tan\varphi$ prevedemo integral v

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos^2\varphi} d\varphi &= \int \frac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= \int \frac{1}{2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{\tan\varphi}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

POGLAVJE 3

Določeni ali Riemannov integral

3.1. Definicija določenega integrala

Definicija 3.1.1. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na zaprtem intervalu. S točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

razdelimo interval $[a, b]$ na n podintervalov. Vsak tak izbor točk

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

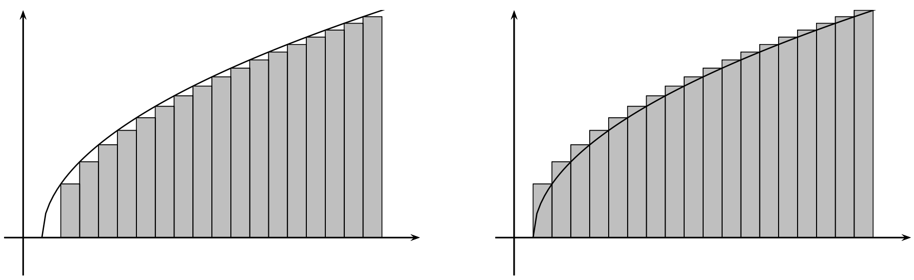
imenujemo *particija* intervala $[a, b]$. Označimo

$$m_k = \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

in definiramo vsoti

$$s(D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad S(D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

$s(D)$ imenujemo *spodnja Darbouxova vsota funkcije f prirejena delitvi D*, $S(D)$ pa *zgornja Darbouxova vsota prirejena delitvi D*.



Slika 3.1. Spodnja in zgornja Darbouxova vsota

Definicija 3.1.2. Naj bosta D in D' delitvi intervala $[a, b]$. D' je finejša od delitve D, če je $D \subset D'$. To pomeni, da delitev D' dobimo tako, da delitvi D morda dodamo še nove delilne točke.

Trditev 3.1.3. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in D, D' delitvi intervala $[a, b]$. Naj bo delitev D' finejša od delitve D. Potem velja*

$$s(D) \leq s(D'), \qquad S(D') \leq S(D).$$

Dokaz. Ker je delitev D' finejša od delitve D, smo dobili delitev D' tako, da smo delitvi D dodali še nekaj točk. Dovolj je torej, če pokažemo, da vsakič ko neki delitvi dodamo še eno točko, s tem povečamo spodnjo

Darbouxovo vsoto in zmanjšamo zgornjo Darbouxovo vsoto. Naj bo torej $D' = D \cup \{x'\}$. Recimo, da se ta nova točka x' nahaja na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Naj m_k infimum funkcije f na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$, m' infimum na intervalu $[x_{k-1}, x']$ in m'' infimum nA intervalu $[x', x_k]$. Velja $m' \geq m_k$ in $m'' \geq m_k$. Zato je

$$\begin{aligned} s(D') &= s(D) - m_k(x_{k+1} - x_k) + m'(x' - x_{k'1}) + m''(x_k - x') \\ &= s(D) + (m' - m_k)(x' - x_{k'1}) + (m'' - m_k)(x_k - x') \geq s(D). \end{aligned}$$

Analogno dokažemo $S(D') \leq S(D)$. □

TRDITEV 3.1.4. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in D, D' poljubni delitvi intervala $[a, b]$. Potem velja*

$$s(D_1) \leq S(D_2).$$

DOKAZ. Naredimo novo delitev $D' = D_1 \cup D_2$. Ta delitev je finejša od obeh delitev D_1 in D_2. Iz prejšnje trditve sledi

$$s(D_1) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D_2).$$

□

Vzemimo sedaj omejeno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spodnje Darbouxove vsote so navzgor omejene, saj za vsako delitev D velja $s(D) \leq S(D')$, pri čemer lahko vzamemo za D' katero koli delitev. Lahko npr. vzamemo $D' = \{a, b\}$, in tako dobimo

$$s(D) \leq M(b - a), \qquad M = \sup f.$$

Podobno so vse zgornje Darbouxove vsote navzdol omejene z npr.

$$S(D) \geq m(b - a), \qquad m = \inf f.$$

Zato lahko označimo

$$\begin{aligned} I_1 &= \sup\{s(D), D \text{ poljubna delitev } [a, b]\} \\ I_2 &= \inf\{S(D), D \text{ poljubna delitev } [a, b]\}. \end{aligned}$$

Seveda velja

$$I_1 \leq I_2,$$

saj je $s(D) \leq s(D')$ za poljubni delitvi D, D'. Vrednosti I_1 in I_2 imenujemo *spodnji* oziroma *zgornji integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$.

DEFINICIJA 3.1.5. Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je (Riemannovo) integrabilna na intervalu $[a, b]$, če velja

$$I_1 = I_2.$$

V tem primeru označimo vrednost $I_1 (= I_2)$ z

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

in ji rečemo *Riemannov* oziroma *določeni integral* funkcije f na intervalu $[a, b]$.

TRDITEV 3.1.6. *Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna na $[a, b]$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja delitev D intervala $[a, b]$, da velja*

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je f integrabilna na $[a, b]$. Ker je I_1 supremum vrednosti $s(D)$, obstaja D_1, da je $s(D_1) \geq I_1 - \varepsilon/2$. Podobno obstaja delitev D_2, da je $S(D) < I_2 - \varepsilon/2$. Označimo $D = D_1 \cup D_2$. Ker je ta delitev finejša tako od D_1 kot tudi D_2, velja $s(D) \geq s(D_1)$ in $S(D) \leq S(D_2)$. Ker je f integrabilna, je $I_1 = I_2$ in zato

$$S(D) - s(D) = S(D) - I_2 + I_1 - s(D) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Pokažimo še obrat. Naj bo ε poljuben. Potem obstaja delitev D, da je

$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Zato velja

$$|I_2 - I_1| \leq S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Ker je ε poljuben, je $I_2 = I_1$. □

Izrek 3.1.7. *Vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ je integrabilna.*

Dokaz. Če je f na $[a, b]$ zvezna, je na $[a, b]$ enakomerno zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bo δ tak, da bo $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ če le velja $|x - x'| < \delta$. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ poljubna delitev, katere dolžina najdaljšega podintervala je manjša od δ. Naj bosta m_k in M_k infimum (minimum) in supremum (maksimum) na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Potem velja $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ in velja

$$S(D) - s(D) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Torej je f integrabilna na $[a, b]$. □

Posledica 3.1.8. *Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena in zvezna na (a, b). Potem je f integrabilna na $[a, b]$.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bo $\delta' < \frac{\varepsilon}{4(M-m)}$, kjer je $M = \sup_{[a,b]} f$ in $m = \inf_{[a,b]} f$. Funkcija f je zvezna na $[a + \delta', b - \delta']$, zato je tu integrabilna po zgornjem izreku. Naj bo D' delitev intervala $[a + \delta', b - \delta']$, tako da je $S(D') - s(D') < \varepsilon/2$. Potem je $D = D' \cup \{a, b\}$ delitev intervala $[a, b]$, in velja

$$S(D) - s(D) \leq 2(M - m)\delta' + S(D') - s(D) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Torej je f integrabilna po trditvi 3.1.6. □

Izrek 3.1.9. *Vsaka monotona funkcija na $[a, b]$ je integrabilna.*

Dokaz. Predpostavimo, da je f naraščajoča (analogno dokažemo za padajoče funkcije). Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ poljubna delitev, za katero je dolžina najdaljšega podintervala manjša od $\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Potem velja

$$
\begin{aligned}
S(D)-s(D) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}((f(b)-f(a)) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Torej je f integrabilna. □

Naslednji izrek navedimo brez dokaza. Dokaz je očiten za zvezne funkcije, saj v tem primeru tudi kompozitum zvezna funkcija.

Izrek 3.1.10. *Naj bo f integrabilna funkcija na $[a, b]$ in g zvezna funkcija na $[m, M]$, kjer je $m = \inf f$ in $M = \sup f$. Potem je $g \circ f$ integrabilna na $[a, b]$.*

Primer 3.1.11. Izračunajmo določeni integral funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$. Ker je funkcija zvezna, je integrabilna. Naj bo $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ delitev intervala $[0, 1]$. Velja

$$
s(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}
$$

in

$$
S(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}
$$

Ker velja

$$
\lim_{n\to\infty} s(D_n) = \lim_{n\to\infty} S(D_n) = \frac{1}{6},
$$

je

$$
\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{6}.
$$

Seveda je takšno računanje integrala nepraktično. Kasneje bomo videli, kako je določeni integral povezan z nedoločenim, kar nam bo omogočalo lažje računanje podobnih integralov.

Poglejmo si še primer funkcije, za katero integral ne obstaja.

Primer 3.1.12. Definirajmo

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} .
$$

Za vsako delitev D intervala $[a, b]$ velja $s(D) = 0$ in $S(D) = b - a$. Torej določeni integral funkcije f ne obstaja na nobenem intervalu $[a, b]$.

3.2. Lastnosti določenega integrala

TRDITEV 3.2.1. *Naj bosta f in g integrabilni na $[a,b]$ in $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem velja*

(i) $f+g$ integrabilna na $[a,b]$ in velja $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
(ii) λf je integrabilna na $[a,b]$ in velja $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
(iii) fg je integrabilna na $[a,b]$.

DOKAZ. (i) Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev intervala $[a,b]$. Naj bodo $m_k = \inf\{f(x) + g(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $m'_k = \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $m''_k = \inf\{g(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Potem velja $m_k \geq m'_k + m''_k$ in zato

$$\begin{aligned} s_f(D) + s_g(D) &= \sum_{k=1}^{n} m'_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} m''_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = s_{f+g}(D), \end{aligned}$$

kjer smo z $s_f(D), s_g(D)$ in $s_{f+g}(D)$ označili spodnje Darbouxove vsote pripadajočih funkcij. Podobno velja

$$S_f(D) + S_g(D) \geq S_{f+g}(D)$$

in skupaj

$$S_f(D) + S_g(D) \geq S_{f+g}(D) \geq s_{f+g}(D) \geq s_f(D) + s_g(D).$$

Naj bo D' taka delitev, da je $\int_a^b f(x)\,dx - s_f(D') < \varepsilon$ in $S_f(D') - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon$ in D'' taka, da je $\int_a^b g(x)\,dx - s_g(D') < \varepsilon$ in $S_g(D') - \int_a^b g(x)\,dx < \varepsilon$ in naj bo $D = D' \cup D''$. Potem je $|s_{f+g}(D) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx| < S_f(D) + S_g(D) - s_f(D) - s_g(D) < 2\varepsilon$ in podobno $|S_{f+g}(D) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx| < S_f(D) + S_g(D) - s_f(D) - s_g(D) < 2\varepsilon$. Ker je ε poljuben, je $f+g$ integrabilna, in velja zgornja formula.
(ii) Predpostavimo najprej, da je $\lambda > 0$. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev, $m_k = \inf\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ in $M_k = \sup\{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}$. Ker je $\sup \lambda f = \lambda \sup f$ in $\inf \lambda f = \lambda \inf f$ je

$$s_{\lambda f}(D) = \lambda s_f(D), \qquad S_{\lambda f}(D) = \lambda S_f(D)$$

dobimo točko (ii). V primeru, če je $\lambda < 0$, je

$$s_{\lambda f}(D) = \lambda S_f(D), \qquad S_{\lambda f}(D) = \lambda s_f(D)$$

Zato je

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \inf_D S_{\lambda f}(D) = \inf_D \lambda s_f(D) = \lambda \sup_D \{s_f(D) = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) Če sta f in g zvezni, to sledi iz dejstva, da je tudi fg zvezna. Če pa sta zgolj integrabilni, pa uporabimo formulo $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ in dejstvo, da je za integrabilno funkcijo tudi njen kvadrat integrabilen, kar sledi iz izreka 3.1.10.

$\square$

Trditev 3.2.2. *Če sta f in g integrabilni na $[a, b]$ in velja $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Pri vsaki delitvi D intervala $[a, b]$ velja $s_f(D) \leq s_g(D)$. Zato velja

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_D s_f(D) \leq \sup_D s_g(D) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

$\square$

Trditev 3.2.3. *Če je f integrabilna na $[a, b]$, je na $[a, b]$ integrabilna $|f|$ in velja*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. Da je $|f|$ integrabilna sledi iz izreka 3.1.10. Kervvelja tako $f(x) \leq |f(x)|$ in $-f(x) \leq |f(x)|$ imamo iz zgornje trditve

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ in } -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

kar nam skupaj da

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

$\square$

Izrek 3.2.4. *Naj bodo $a < c < b$. Potem je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ natanko tedaj, ko je integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$ in velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ in D taka delitev intervala $[a, b]$, da je $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Naj bo $D_1 = (D \cap [a, c]) \cup \{c\}$ in $D_2 = (D \cap [c, b]) \cup \{c\}$. Potem sta D_1 in D_2 zaporedoma delitvi intervalov $[a, c]$ in $[c, b]$ in velja

$$\begin{aligned}\varepsilon > S(D) - s(D) &\geq S(D_1 \cup D_2) - s(D_1 \cup D_2) \\ &= (S(D_1) - s(D_1)) + (S(D_2) - s(D_2)).\end{aligned}$$

Zato velja $S(D_1) - s(D_1) < \varepsilon$ in $S(D_2) - s(D_2) < \varepsilon$ in je f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$. Dokažimo še obrat. Naj bosta D_1 in D_2 delitvi zaporedoma intervalov $[a, c]$ in $[c, b]$, da velja $S(D_1) - s(D_1) < \varepsilon/2$ in $S(D_2) - s(D_2) < \varepsilon/2$. Naj bo $D = D_1 \cup D_2$. Potem je

$$S(D) - s(D) = S(D_1) + S(D_2) - s(D_1) - s(D_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dokažimo še enakost. Velja

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sup s(D) = \sup s(D \cup \{c\}) \\ &= \sup s(D') + \sup s(D'') = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\end{aligned}$$

kjer smo z D označili delitve intervala $[a, b]$, z D' delitve intervala $[a, c]$ in D'' delitve intervala $[c, b]$. $\square$

TRDITEV 3.2.5. *Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in naj bo $m = \inf f$ in $M = \sup f$. Potem velja*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

DOKAZ. Dokaz je očiten, saj za vsako delitev $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ velja

$$m(b-a) = \sum_{k=1}^{n} m(x_k - x_{k-1}) \leq$$
$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M(x_k - x_{k-1}) = M(b-a).$$

Torej velja tudi

$$m(b-a) \leq \sup_D s(D) = \int_a^b f(x)\,dx = \inf_D S(D) \leq M(b-a).$$

□

POSLEDICA 3.2.6 (Izrek o povprečni vrednosti). *Naj bo f zvezna na $[a,b]$. Potem obstaja $\xi \in [a,b]$, da velja*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

DOKAZ. Iz zgornje trditve sledi

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M,$$

kjer je $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$. Ker zvezna funkcija zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom, obstaja tak $\xi \in [a,b]$, da velja

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

3.3. Osnovni izrek integralskega računa

V tem razdelku bomo pogledali, kakšna je povezava med določenim in nedoločenim integralom.

IZREK 3.3.1 (Osnovni izrek integralskega računa). *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Definiramo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Potem je funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$.

DOKAZ. Naj $x \in (a,b)$ poljuben in h majhen. Potem je

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)\end{aligned}$$

kjer je ξ neko število med x in $x+h$ (posledica 3.2.6). Ko gre h proti 0 gre seveda ξ proti x. Ker je f zvezna v x zato velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x).$$

V primeru, ko je $x=a$ oz. $x=b$ na enak način vidimo, da obstajata desni oz. levi odvod funkcije F in sta enaka $f(a)$ oz. $f(b)$. $\square$

Opomba. Osnovni izrek integralskega računa velja tudi v bolj strogi obliki: Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in zvezna v točki x_0. Potem je

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva v x_0 in velja $F'(x_0) = f(x_0)$. Dokaz te trditve ne nekoliko bolj zahteven.

Osnovni izrek integralskega računa ima naslednji dve neposredni posledici.

Posledica 3.3.2. *Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna. Potem je funkcija*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

nedoločeni integral funkcije f. Torej ima vsaka zvezna funkcija nedoločeni integral.

Posledica 3.3.3. *Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna in $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ nedoločeni integral funkcije f. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Dokaz. Naj bo $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ker sta tako F kot G nedoločena integrala funkcije f velja $F(x) = G(x)+C$. Tako je

$$F(b)-F(a) = G(b)-G(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Primer 3.3.4. Ker je $(x^3/3)' = x^2$ je

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

3.4. Zamenjava spremenljivk in per-partes v določenem integralu

Izrek 3.4.1 (zamenjava spremenljivke). *Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljiva, pri čemer velja $\varphi(\alpha)=a$ in $\varphi(\beta)=b$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Dokaz. Naj bo F nedoločeni integral funkcije f. Le ta obstaja, saj je f zvezna funkcija. Naj bo $G(t) = F(\varphi(t))$. Ker velja $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$, je $G(t)$ nedoločeni integral $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Zato velja

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Primer 3.4.2. Izračunajmo integral

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

V integral uvedimo substitucijo $x = \sin t$. Potem velja

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

Ta integral bi sicer lahko naprej z malo truda izračunali tako, da bi najprej izračunali nedoločeni integral.Lahko pa se lotimo takole. Ker je ploščina pod grafom funkcije $\sin^2 t$ in $\cos^2 t$ enako med $t = 0$ in $t = \pi/2$ velja

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 dt$$

in ker je

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 dt + \int_0^{\pi/2} \cos^2 dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 + \cos^2 dt = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2,$$

je

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \pi/4.$$

Ker je graf funkcije $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ predstavlja del krožnice s središčem v 0 in radijem 1, ki leži v pravem kvadrantu, smo s tem izračunali, da je ploščina kroga z radijem 1 enaka π.

Izrek 3.4.3 (per-partes). *Naj bosta f in g zvezno odvedljivi funkciji na intervalu $[a, b]$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Dokaz. Velja

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Zato je

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

oziroma

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

□

Primer 3.4.4. Izračunajmo integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Če uporabimo per-partes formulo, dobimo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= -(\sin^{n-1} x \cos x)|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cos x \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Zato velja

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Če je n sod, dobimo

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2},$$

saj je

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2.$$

Če je n lih, dobimo

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!},$$

saj je

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1.$$

Ker velja

$$\sin^{2k-1} x \geq \sin^{2k} x \geq \sin^{2k+1} x$$

velja

$$I_{2k+1} > I_{2k} > I_{2k-1}$$

oziroma

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Če malo premečemo, dobimo oceno

$$\frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2.$$

Ker velja

$$\frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 - \frac{1}{2k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2$$
$$= \frac{1}{(2k)(2k+1)}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi/2}{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

velja

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

3.5. Izlimitirani integral

Že iz definicije Riemannovega sledi, da mora za integrabilnost funkcija biti omejena. Prav tako definicija zahteva, da je interval, na katerem funkcijo integriramo omejen. V tem razdelku bomo pogledali, kako lahko razširimo definicijo integrala tudi na primere neskončnih ali pol neskončnih integralov ter neomejenih funkcij.

Definicija 3.5.1. Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna neomejena funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

jo imenujemo *izlimitirani* integral funkcije f na intervalu $(a, b]$, rečemo da *integral konvergira* in limito označimo z

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Če limita ne obstaja, rečemo, da *integral divergira*.

Podobno definiramo izlimitirani integral zvezne neomejene funkcije f : $[a, b) \to \mathbb{R}$ kot

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

če limita seveda obstaja. Poglejmo si nekaj primerov.

Primer 3.5.2. Poglejmo si integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx,$$

kjer je $s < 1$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{b} \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{x^{1-s}}{(1-s)}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-s} - \frac{1}{(1-s) - \frac{\varepsilon^{1-s}}{1-s}} = \frac{1}{1-s},$$

saj je $1 - s > 0$. Torej izlimitirani integral obstaja in je enak

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}.$$

Poskusimo sedaj izračunati

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

V tem primeru je

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln x|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}0-\ln\varepsilon.$$

Ker ta limita ne obstaja, integral

$$\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$$

divergira, kar pomeni, da ne obstaja. Ker za $s>1$ na intervalu $(0,1)$ velja $\frac{1}{x^s}>\frac{1}{x}$, integral

$$\int_0^1\frac{1}{x^s}\,dx$$

divergira za vsak $s\geq 1$.

Posplošitev zgornjih dveh primerov je naslednji izrek, ki ga navedimo brez dokaza.

Izrek 3.5.3. *Naj bo f zvezna na intervalu $[a,b]$. Izlimitirani integral*

$$\int_a^b\frac{f(x)}{(x-a)^s}\,dx$$

obstaja, če je $s<1$. Če je $s\geq 1$ in $f(a)\neq 0$, ta integral divergira.

Definicija 3.5.4. Naj bo $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

jo imenujemo *izlimitirani* integral funkcije f na intervalu $[a,\infty)$, rečemo da *integral konvergira* in limito označimo z

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Če limita ne obstaja, rečemo, da *integral divergira.*

Podobno definiramo integral funkcij na $(-\infty,a]$.

Primer 3.5.5. Poglejmo si integral

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^s}\,dx,$$

kjer je $s>1$.

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{(1-s)x^{s-1}}|_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{(1-s)b^{s-1}}+\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s-1}.$$

Torej za $s>1$ izlimitirani integral obstaja in je enak

$$\int_1^\infty\frac{1}{x^s}\,dx=\frac{1}{s-1}.$$

Poskusimo sedaj izračunati

$$\int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx.$$

V tem primeru je

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln x|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b.$$

Ker ta limita ne obstaja, integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

divergira, kar pomeni, da ne obstaja. Podobno potem za vsak $s \leq 1$ integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$ divergira.

Zopet brez dokaza navedimo bolj splošen izrek

Izrek 3.5.6. *Naj bo f zvezna in omejena na intervalu $[a,\infty)$. Izlimitirani integral*

$$\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^s}\,dx$$

obstaja, če je $s > 1$. Če je $s \leq 1$ in $|f(x)| > \delta$ za vse $x \geq m$, ta integral divergira.

V primeru, ko imamo na integracijskem območju več problemov, moramo vsakega obravnavati posebej. Poglejmo si dva primera.

Primer 3.5.7. Poglejmo si konvergenco integrala

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Za obstoj integrala imamo težavo pri 1 in v ∞. Integral zato razdelimo na dva integrala

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Prvotni integral bo obstajal natanko tedaj, če obstajata vsak od integralov. Poglejmo prvi integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Ker je funkcija $\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ zvezna na $[1,2]$ integral obstaja, saj imamo v imenovalcu $(x-1)^{\frac{1}{2}}$. Prav tako obstaja drugi integral, ker je

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_2^\infty \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}\,dx$$

in je funkcija $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ omejena. Prvotni integral torej obstaja.

Primer 3.5.8. Za katere α obstaja integral

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx?$$

Problem obstoja tega integrala je tako v 0 kot seveda v ∞. Zato integral razbijemo na dva integrala, in vsakega obravnavamo posebej

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx.$$

Obravnavajmo najprej prvi integral.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{(\arctan x)/x}{x^{\alpha-1}}\,dx.$$

Označimo $g(x) = (\arctan x)/x$. Ker velja $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, lahko razumemo g kot zvezno funkcijo na $[0,1]$, ki v 0 nima ničle. Zato integral obstaja, če in samo če velja $\alpha - 1 < 1$, oziroma $\alpha < 2$. Poglejmo si še drugi integral

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx.$$

Ker je funkcija $\arctan x$ omejena in velja $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2 \neq 0$, integral obstaja če in samo če velja $\alpha > 1$. Prvoten integral obstaja natanko tedaj, ko obstajata oba integrala, torej, ko je $1 < \alpha < 2$.

Eulerjeva Γ funkcija. Kot primer izlimitiranega integrala si poglejmo definicijo funkcije Γ, ki je ena pomembnejših funkcij v matematiki.

Definicija 3.5.9. Eulerjeva Γ funkcija je funkcija, definirana na $(0,\infty)$ s zapisom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Poglejmo si najprej, da integral dejansko obstaja za vsak $s > 0$. Ker je težava tako v 0 kot v ∞ zapišemo

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Prvi integral zagotovo obstaja natanko tedaj, ko je $s > 0$. Da ugotovimo obstoj drugega integrala, pišimo

$$\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{x^{s+1}e^{-x}}{x^2}\,dx.$$

Ker je $\lim_{x\to\infty} x^{s+1}e^{-x} = 0$ pri katerem koli s, integral obstaja. Funkcija $\Gamma(s)$ je torej dobro definirana za vsak $s > 0$. Velja

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1.$$

Poglejmo si še $\Gamma(\frac{1}{2})$.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du.$$

Zadnjega integrala še ne znamo izračunati. Preprost izračun je mogoč z uporabo dvojnega integrala. Velja pa

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},$$

torej je

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Trditev 3.5.10. *Za vsak $s > 0$ velja*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Dokaz. Formulo dokažimo s pomočjo integracije po delih.

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^s e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-x^s e^{-x}|_0^b + s\int_0^b x^{s-1}e^{-x}\,dx\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-b^s}{e^b} + s\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{s-1}e^{-x}\,dx \\ &= s\Gamma(s).\end{aligned}$$

□

Trditev nam omogoča, da preprosto izračunamo vrednost Γ funkcije za naravna števila.

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 1\Gamma(1) = (n-1)!.\end{aligned}$$

Eulerjeva Γ funkcija je torej nekakšna posplošitev pojma fakulteta na pozitivna realna števila. Funkcija Γ ima mnogo zanimivih lastnosti, katerih izpeljava pa običajno zahteva tehnike večkratne ali pa kompleksne integracije. Omenimo Eulerjevo zrcalno formulo

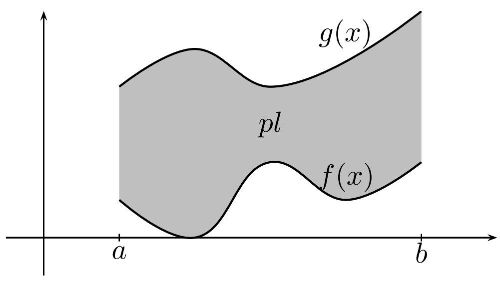
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

ki velja za $0 < s < 1$.

3.6. Uporaba integrala v geometriji

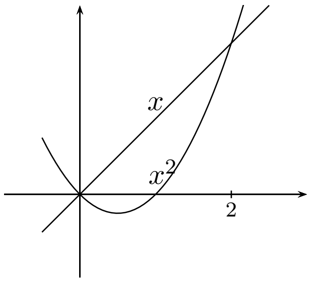
Ploščina med grafoma. Naj bosta funkciji f in g (kosoma) zvezni na intervalu $[a, b]$ in naj velja $f(x) \le g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina med grafoma funkcij f in g nad intervalom $[a, b]$ enaka

$$pl = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

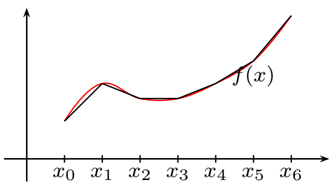


Slika 3.2. Ploščina med grafoma

Primer 3.6.1. Izračunajmo ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = x^2 - x$ in $g(x) = x$. Grafa se sekata v točkah, kjer velja $f(x) = g(x)$, kar pomeni $x^2 - x = x$ oziroma $x = 0$ in $x = 2$.



Dolžina grafa funkcije. V tem razdelku bomo izpeljali formulo za dolžino grafa zvezno odvedljive funkcije. Naj bo torej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva. Izberemo delitev $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervala $[a, b]$ in graf funkcije f aproksimiramo s poligonsko črto z oglišči $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $\cdots, (x_n, f(x_n))$.



Dolžino grafa funkcije nato aproksimiramo z dolžino te poligonske črte:

$$
\begin{aligned}
l &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1})^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1}),
\end{aligned}
$$

kjer so ξ_k neke točke na intervalih $[x_{k-1}, x_k]$ (uporabili smo Lagrangeov izrek). Naj bosta

$$
m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} \sqrt{1 + (f'(x))^2}
$$

za vsak $1 \le k \le n$. Ker je $m_k \le \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \le M_k$ velja

$$
\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).
$$

V limiti torej dobimo

$$
l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx
$$

Primer 3.6.2. Izračunajmo dolžino grafa funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$ med $x = 1$ in $x = e$. Integrirati moramo funkcijo

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx &= \sqrt{1 + (\frac{1}{2x} - \frac{x}{2})^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4} - 2 + \frac{1}{4x^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1 + \frac{1}{4x^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Torej je dolžina grafa enaka

$$l = \int_1^e \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

Volumen in površina vrtenine. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo $f > 0$ na (a, b). Če zavrtimo graf funkcije f okrog x-osi dobimo rotacijsko telo, ki mu rečemo vrtenina. Izpeljimo formulo za volumen te vrtenine. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev intervala $[a, b]$. Naj bo $m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f$ in $M_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f$. Za volumen V_k vrtenine nad intervalom $[x_{k-1}, x_k]$ dobimo oceno

$$\pi m_k^2(x_k - x_{k-1}) \le V_k \le \pi M_k^2(x_k - x_{k-1}),$$

saj je nad tem intervalom vrtenina v celoti vsebovana v valju okrog $[x_{k-1}, x_k]$ z radijem M_k in v celoti vsebuje valj okrog tega intervala z radijem m_k. Zato je

$$\pi \sum_{k=1}^n m_k^2(x_k - x_{k-1}) \le V \le \pi \sum_{k=1}^n M_k^2(x_k - x_{k-1}).$$

Leva vsota je spodnja Darbouxova vsota za funkcijo $\pi(f(x))^2$, desna vsota pa zgornja Darbouxova vsota za to funkcijo pri delitvi D. Torej je

$$\pi \sup s_{f^2}(D) \le V \le \pi \inf S_{f^2}(D)$$

in ker integral f^2 obstaja, dobimo

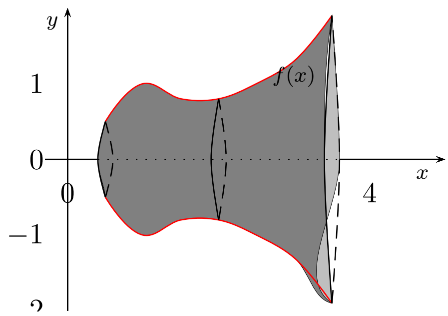
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Če je f zvezno odvedljiva lahko podobno, a malo bolj zapleteno, izpeljemo formulo za površino vrtenine

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

V tem primeru površine nad podintervali poljubne delitve D aproksimiramo z deli plaščev stožcev in postopamo podobno kot pri izpeljavi dolžine grafa.

Primer 3.6.3. Izračunajmo volumen in površino vrtenine, ki jo dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) = \operatorname{ch} x$ okrog x osi med $x = 0$ in $x = a$.



SLIKA 3.3. Rotacijsko telo funkcije $f(x)$

Volumen izračunamo po formuli

$$\begin{aligned} V =& \pi \int_0^a (\operatorname{ch} x)^2\,dx = \pi \int_0^a \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^a (e^{2x} + 2 + e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{4}\,(e^{2x}/2 + 2x - e^{-2x}/2)\Big|_0^a \\ &= \frac{\pi}{4}(2a + \operatorname{sh}(2a)). \end{aligned}$$

Površina je

$$\begin{aligned} P =& 2\pi \int_0^a (\operatorname{ch} x)\sqrt{1 + (\operatorname{ch}' x)^2}\,dx = 2\pi \int_0^a \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^a \operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = 2\pi \int_0^a \operatorname{ch}^2 x\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}(2a + \operatorname{sh}(2a)). \end{aligned}$$

POGLAVJE 4

Funkcijska zaporedja in funkcijske vrste

4.1. Konvergenca in enakomerna konvergenca

Funkcijsko zaporedje ni nič drugega, kot zaporedje funkcij $f_1, f_2, f_3, \ldots$, ki so vse definirane na neki množici $D \subset \mathbb{R}$. V tem razdelku bomo obravnavali dva različna pojma konvergence takih zaporedij, konvergenco po točkah ter enakomerno konvergenco.

DEFINICIJA 4.1.1. Funkcijsko zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira po točkah* na D proti funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $x \in D$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Funkciji f rečemo *limita* zaporedja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

PRIMER 4.1.2. Naj bodo $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane s predpisom $f_n(x) = x^n$. Za vsak $x \in [0,1]$ velja

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

medtem ko je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Limita zaporedja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je torej funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x = 1. \end{cases}$$

Kot vidimo, limitna funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ni zvezna na $[0,1]$, čeprav so tam zvezne vse funkcije f_n. Zveznost torej ni lastnost, ki bi se ohranjala pri konvergenci po točkah.

Bolj uporabna kot konvergenca po točkah je v analizi enakomerna konvergenca.

DEFINICIJA 4.1.3. Funkcijsko zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira enakomerno* na $D \subset \mathbb{R}$ proti funkciji $f : D \to \mathbb{R}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n_0, da je $|f_n(x) - f_x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in D$ in vsak $n \ge n_0$. Funkciji f rečemo *enakomerna limita* zaporedja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Če funkcijsko zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ enakomerno konvergira proti funkciji f, potem proti tej funkciji konvergira tudi po točkah. Pri običajni limiti po točkah namreč zahtevamo, da za vsak $x \in D$ obstaja tak n_0, da velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ če $n \ge n_0$. Pri različnih točkah $x \in D$ so take vrednosti n_0 lahko različne. Pri enakomerni limiti pa dodatno zahtevamo, da tak n_0 lahko izberemo neodvisno on točke x, zato je ta pogoj strožji.

PRIMER 4.1.4. Poglejmo si zopet zgornji primer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane s predpisom $f_n(x) = x^n$. Naj bo $x \in [0,1]$. Potem je $|x^n - 0| < \varepsilon$, če velja $n \ln x < \ln \varepsilon$, oziroma $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. Ker je $\ln 1 = 0$ je $\lim_{x \to 1^-} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = \infty$. Zato noben n_0 ni zadosti dober na vsem $[0,1]$. Zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ torej ne konvergira enakomerno na $[0,1]$. Zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ torej konvergira po točkah, ne konvergira pa enakomerno.

Naslednji trije izreki nakazujejo razlog, zakaj je enakomerna konvergenca precej boljša kot le konvergenca po točkah. Nobeden od teh izrekov namreč ne velja, če enakomerno konvergenco zamenjamo s konvergenco po točkah.

IZREK 4.1.5. *Naj zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konvergira enakomerno na D proti funkciji $f : D \to \mathbb{R}$. Če so vse f_n zvezne v točki $a \in D$, potem je f zvezna v a. Posebej, če so vse f_n zvezne na D je na D zvezna tudi f.*

DOKAZ. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in naj bo n_0 tak, da velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ če $n \geq n_0$. Naj bo δ tak, da velja $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$, čim je $|x - a| < \delta$. Potem za $|x - a| < \delta$ velja

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a) + f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ker za vsak ε lahko izberemo tak δ, je funkcija zveza v a. □

IZREK 4.1.6. *Naj bodo f_n zvezne funkcije, ki enakomerno konvergirajo proti funkciji f na intervalu $[a,b]$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

DOKAZ. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in naj bo n_0 tak, da je $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ za vsak $x \in [a,b]$ in vsak $n \geq n_0$. Potem velja za vsak $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &= \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

S tem je izrek dokazan. □

PRIMER 4.1.7. Naj bodo $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane z $f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$. Za vsak $x \in [0,1]$ velja

$$\lim_{n \to \infty} n^2 x e^{-n^2 x^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x}{e^{n^2 x^2}} = 0,$$

zato je $f_n(x)$ po točkah konvergira proti funkciji $f(x) = 0$. Po drugi strani pa velja

$$\int_0^1 n^2 x e^{-n^2 x^2}\,dx \overset{u = n^2 x^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^{n^2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_{u=0}^{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-u^2}}{2}$$

in zato

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) = \frac{1}{2}.$$

Seveda pa je

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Problem je seveda v tem, da konvergenca ni enakomerna.

IZREK 4.1.8. *Naj bodo f_n zvezno odvedljive funkcije, ki na odprtem intervalu I konvergirajo proti zvezni funkciji f. Naj odvodi f_n' enakomerno konvergirajo na I proti funkciji g. Potem je f odvedljiva in velja $f'(x) = g(x)$. Drugače napisano, velja*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

DOKAZ. Naj bo $a \in I$ poljubna točka. Po zgornjem izreku velja

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Torej je $f(x)$ nedoločeni integral funkcije g oziroma $g = f'$. $\square$

4.2. Funkcijske vrste

Funkcijska vrsta je formalna vsota oblike

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

kjer so f_n funkcije, definirane na neki podmnožici $D \subset \mathbb{R}$. Podobno, kot pri številskih vrstah nas tudi tu zanima konvergenca (vsota vrste), vendar pa, tako kot pri funkcijski zaporedjih, lahko gledamo različne načine konvergence.

DEFINICIJA 4.2.1. Funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergira proti funkciji f na $D \subset \mathbb{R}$, če za vsak $x \in D$ velja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Če za vsak $x \in D$ konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

rečemo, da funkcijska vrsta *konvergira absolutno* proti $f(x)$. Funkcijo f imenujemo *vsota* funkcijske vrste.

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ funkcijska vrsta. Podobno kot pri običajnih številskih vrstah označimo *n-to delno vsoto vrste*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

ki je v tem primeru seveda funkcija $s_n : D \to \mathbb{R}$. Vrsta konvergira na D proti f natanko tedaj, ko proti f po točkah konvergira funkcijsko zaporedje delnih vsot $\{s_n\}_{n=1}^{n}$. Tako je dokaj jasno, kaj naj pri vrstah pomeni enakomerna konvergenca.

Definicija 4.2.2. Funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergira enakomerno proti funkciji f na $D \subset \mathbb{R}$, če zaporedje delnih vsot $\{s_n\}_{n=1}^{n}$, vrste konvergira enakomerno proti $f(x)$.

Izrek 4.2.3 (Weierstrassov M test). *Naj za funkcije f_n velja $|f_n(x)| \leq M_n$ za vsak $x \in D$, kjer so M_n pozitivna števila. Če vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergira, potem funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergira enakomerno in absolutno na D.

Dokaz. Da vrsta konvergira absolutno je posledica primerjalnega kriterija. Naj bo torej $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ vsota vrste, kjer so s_n delne vsote. Pokažimo, da je konvergenca enakomerna. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergira, obstaja tak n_0, da velja $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$, če je le $n \geq n_0$. Za tak n velja

$$|f(x) - s_n(s)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

Zato s_n enakomerno konvergirajo proti f in zato vrsta konvergira enakomerno. $\square$

Primer 4.2.4. Pokažimo, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sqrt{x}}$$

konvergira enakomerno na (a, ∞), kjer je $a > 0$ poljuben. Uporabimo Weierstrassov M test. Velja $e^{-n\sqrt{x}} \leq e^{-n\sqrt{a}}$. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\sqrt{a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^a}\right)^n$$

je konvergentna geometrijska vrsta, torej je naša vrsta enakomerno konvergentna.

IZREK 4.2.5. *Naj funkcijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira enakomerno na* $D \subset \mathbb{R}$ *in naj bo* $f : D \to \mathbb{R}$ *vsota vrste. Če so vse funkcije* f_n *zvezne v točki* $a \in D$*, je v* a *zvezna tudi funkcija* f*. Posebej, če so* f_n *zvezne na* D*, je na* D *zvezna tudi funkcija* f*.*

DOKAZ. Dokaz sledi iz analognega dokaza za funkcijska zaporedja. Naj bodo s_n delne vsote vrste. Ker so s_n zvezne v a in ker po predpostavki konvergirajo enakomerno proti f, je v a zvezna tudi f. □

PRIMER 4.2.6. Izračunajmo vsote vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x^n)$$

na $[0, 1]$. Ali vrsta konvergira enakomerno na tem intervalu? V primeru, ko je $x \in [0, 1)$ lahko pišemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2},$$

saj obe vrsti tam konvergirata. Če je $x = 1$, je vsota vrste enaka 0. Ker vsota vrste

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & , 0 \le x < 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$$

ni zvezna funkcija, konvergenca ne more biti enakomerna na $[0, 1]$.

IZREK 4.2.7. *Naj funkcijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira enakomerno na intervalu* $[a, b]$ *in naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *vsota vrste. Naj bodo* f_n *zvezne na* $[a, b]$*. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

DOKAZ. Naj bodo s_n delne vsote vrste. Ker zaporedje delnih vsot enakomerno konvergira proti f, iz analognega izreka za funkcijska zaporedja velja

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx,$$

kar je ravno vsebina izreka. □

IZREK 4.2.8. *Naj bodo* f_n *zvezno odvedljive na odprtem intervalu* I*. Naj funkcijska vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *na* I *konvergira proti* $f : I \to \mathbb{R}$ *in naj* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konvergira enakomerno na* I *proti* $g : I \to \mathbb{R}$*. Potem je* f *odvedljiva na* I *in velja* $f' = g$*.*

DOKAZ. Naj bodo s_n delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in σ_n delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$. Potem σ_n konvergirajo enakomerno proti g in s_n konvergirajo proti f. Ker je $s_n' = \sigma_n$, iz analognega izreka za funkcijska zaporedja sledi $f' = g$. □

4.3. Potenčne vrste

DEFINICIJA 4.3.1. *Potenčna vrsta* centrirana v $a \in \mathbb{R}$ je vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots$$

kjer so $a_0, a_1, a_2, \ldots$ poljubna realna števila.

Vsaka potenčna vrsta centrirana v a zagotovo konvergira v točki $x = a$. Lahko se zgodi, da je to edina točka, v kateri vrsta konvergira. Primer take vrste je

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Ker namreč velja

$$\frac{|(n+1)!x^n|}{|(n+1)!x^n| = (n+1)x}$$

vidimo, da je $|(n+1)!x^{n+1}| > |(n+1)!x^n|$, če je le $(n+1)|x| > \frac{1}{|x|}$. Sami členi vrste torej pri nobenem $x \neq 0$ ne konvergirajo proti 0.

IZREK 4.3.2. *Naj bo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

potenčna vrsta, centrirana okrog $a \in \mathbb{R}$. *Potem obstaja tak* $R \in [0, \infty]$, *da vrsta konvergira na intervalu* $(a-R, a+R)$ *in divergira za vsak* x, $|x-a| > R$. *Še več, za vsak* $r < R$ *vrsta konvergira enakomerno in absolutno na* $[a-r, a+r]$. R *imenujemo konvergenčni radij vrste, in velja*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

DOKAZ. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $a = 0$. Naj bo $A = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Predpostavimo najprej, da je $0 < A < \infty$ in naj bo $|x| < 1/A$. Potem je $1/|x| > A + \varepsilon$ za nek pozitiven ε in ker je A največje stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ obstaja tak n_0, da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} < A + \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Zato je za $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \leq (A+\varepsilon)|x| < 1$$

in vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira pri x po korenskem kriteriju. Naj bo sedaj $|x| > 1/A$. Sedaj je $1/|x| < A - \varepsilon$ za nek ε. Ker je A stekališče množice $\{\sqrt[n]{|a_n|},\ n = 1, 2, \ldots\}$, za neskončno mnogo indeksov n velja $\sqrt[n]{|a_n|} > A - \varepsilon$. Pri vsakem takem n je

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n||x|} > (A-\varepsilon)|x| > 1$$

in zato vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ne konvergira pri takem x, saj členi $a_n x^n$ ne konvergirajo proti 0. Zelo podobno obravnavamo tudi primera $A = 0$ in $A = \infty$. Pokažimo še, da vrsta konvergira enakomerno in absolutno na vsakem $[-r, r]$, kjer je $r < R$. Naj bo $r < x_0 < R$. Ker vrsta pri $x = x_0$ konvergira, velja

$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ in zato obstaja tak $M > 0$, da je $|a_n x_0^n| \le M$ za vsak n. Naj bo $|x| < x_0$ poljuben. Potem velja

$$|a_n x^n| = |a_n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n x_0^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Zato velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

in ker je $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ vrsta po Weierstassovem M testu konvergira enakomerno in absolutno na $(-x_0, x_0)$ in zato tudi na $[-r, r]$. □

Primer 4.3.3. Poglejmo si vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Velja

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

zato je konvergenčni radij $R = 1$. Vrsta torej konvergira na $(-1, 1)$ in divergira za $|x| > 1$. Edini točki, za kateri nismo prepričani sta $x = 1$ in $x = -1$. Pri $x = 1$ dobimo divergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pri $x = -1$ pa dobimo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, ki po Leibnizovem kriteriju konvergira.

Naj bo sedaj

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

potenčna vrsta s konvergenčnim radijem $R \in [0, \infty]$. Če vrsto členoma odvajamo, dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Njen konvergenčni radij je prav tako enak R, saj velja

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Podobno ima členoma integrirana vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

tudi konvergenčni radij enak R. Vse tri vrste torej enakomerno konvergirajo na $[a-r, a+r]$, da vsak $r < R$. Zato z uporabo izrekov 4.2.7 in 4.2.8 dobimo

Izrek 4.3.4. *Naj bo*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R),$$

kjer je R konvergenčni radij vrste. Potem je f odvedljiva na $(a-R, a+R)$ in velja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

ter

$$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

kjer je C neka konstanta.

POSLEDICA 4.3.5. *Naj bo*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R),$$

kjer je R konvergenčni radij vrste. Potem je funkcija f neskončno krat odvedljiva na $(a-R, a+R)$.

Brez dokaza navedimo še Abelov izrek

IZREK 4.3.6 (Abelov izrek). *Naj bo*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

Če vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira, velja

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Izrek nam pove, da če vrsta konvergira tudi v kakšni robni točki konvergenčnega intervala, se vsota potenčne vrste s to vrednostjo na robu razširi do zvezne funkcije.

PRIMER 4.3.7. Pri $|x| < 1$ velja

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

saj imamo opravka z geometrijsko vrsto. Po zgornjem izreku imamo

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

in ta vrsta ima prav tako konvergenčni radij $R = 1$. Hitro lahko preverimo, da v 1 in -1 divergira. Če geometrijsko vrsto integriramo, dobimo

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Ker je $\ln(1) = 0$ je $C = 0$ in dobimo

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

Ta vrsta ima konvergenčni radij zopet enak 1. Pri $x = 1$ vrsta divergira, pri $x = -1$ pa konvergira. Z uporabo Abelovega izreka dobimo

$$\ln(1-(-1)) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

PRIMER 4.3.8. Velja

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots , \quad |x| < 1$$

saj gre zopet za geometrijsko vrsto, tokrat v $-x^2$. Če obe strani integriramo, dobimo

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

Ker je $\arctan 0 = 0$, je $C = 0$. Vrsta za $\arctan x$ konvergira za $|x| < 1$, konvergira pa po Leibnizovem kriteriju tudi v $x = 1$. Z uporabo Abelovega izreka tako dobimo

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

4.4. Taylorjeva vrsta

V prejšnjem razdelku smo videli, da je vsota potenčne vrste neskončni krat odvedljiva funkcija. V tem razdelku se bomo vprašali nekakšen obrat. Kdaj lahko neskončno krat odvedljivo funkcijo razvijemo v potenčno vrsto? Naj bo torej

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad x \in (a-R, a+R),$$

kjer je $R > 0$ konvergenčni radij. Seveda velja $f(a) = a_0$. Če odvajamo, dobimo po izreku 4.3.4

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}|_{x=a} = a_1.$$

Postopek lahko nadaljujemo

$$f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-a)^{n-2}|_{x=a} = 2a_2$$

in še splošno

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-a)^{n-k}|_{x=a} = k! a_k.$$

Torej je edini možni kandidat za vrsto centrirano v a, ki predstavlja neskončno krat odvedljivo funkcijo f v okolici točke a vrsta

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots .$$

To vrsto imenujemo *Taylorjeva vrsta funkcije f v okolici točke a*, polinomu

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

pa rečemo *n-ti Taylorjev polinom funkcije f v okolici točke a*. Vprašanje, ki nas zanima lahko torej preformuliramo kot

Vprašanje. Ali za dano funkcijo $f(x)$, definirano v okolici točke a njena Taylorjeva vrsta v okolici a konvergira proti $f(x)$? Oziroma analogno: Ali zaporedje Taylorjevih polinomov T_n v okolici točke a konvergira proti $f(x)$?

Odgovor na naslednje vprašanje se glasi: Ne vedno. To lahko vidimo iz primera.

Primer 4.4.1. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Funkcija f je neskončno krat odvedljiva v 0 in velja $f^{(n)}(0) = 0$ za vsak n. Torej je Taylorjeva vrsta funkcije f v okolici točke 0 enaka $0+0x+0x^2+\cdots$, in zagotovo ne konvergira proti $f(x)$ nikjer, razen v točki $x = 0$.

Izrek 4.4.2 (Taylorjev izrek o ostankih). *Naj bo f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I in naj bosta $a, b \in I$. Potem obstaja tak ξ med a in b, da velja*

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Dokaz. Označimo

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom, in naj bo K tako število, da velja

$$f(b) - T_n(b) = K(b-a)^{n+1}.$$

Definirajmo

$$F(x) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1}.$$

Polinom $T_n(x)$ je definiran tako, da velja $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ za vsak $k \leq n$ in zato $F^{(k)}(a) = 0$ za vsak $k \leq n$. Nadalje velja $F(a) = F(b) = 0$, zato obstaja po Rolleovem izreku tak ξ_1, da velja $F'(\xi_1) = 0$. Po Rolleovem izreku nadalje obstaja tak ξ_2 med a in ξ_1, da velja $(F')'(\xi_2) = F''(\xi_2) = 0$. Postopek lahko nadaljujemo, in dobimo tak $\xi = \xi_{n+1}$, da velja $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Ker je $T_n^{(n+1)} \equiv 0$ to pomeni

$$f^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!K.$$

Torej je

$$f(b) = T_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)},$$

kar smo želeli pokazati. □

Naj bo sedaj f neskončno krat odvedljiva funkcija na $(a-R, a+R)$ in naj bo $T_n(x)$ n-ti Taylorjev polinom funkcije f okrog točke a. Označimo z

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

n-ti *ostanek*. Po Taylorjevem izreku velja

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ neka točka med a in x. Taylorjeva vrsta bo pri x konvergirala proti $f(x)$ natanko tedaj, ko bo veljalo

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Poglejmo si sedaj nekatere Taylorjeve vrste funkcij.

$\underline{f(x) = \frac{1}{1-x}.}$ Velja $f^{(n)}(0) = n!$. Zato je Taylorjeva vrsta funkcije f ravno geometrijska vrsta

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ,$$

ki konvergira proti funkciji f za vsak $|x| < 1$.

$\underline{f(x) = \ln(1-x).}$ Taylorjeva vrsta funkcije f je vrsta

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots ,$$

ki konvergira proti funkciji f za vsak $|x| < 1$. Vrsto lahko dobimo s pomočjo integracije zgornje vrste.

$\underline{f(x) = e^x.}$ Velja $f^{(n)}(0) = 1$ za vsak n, zato je Taylorjeva vrsta za e^x enaka

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Naj bo najprej $x > 0$. Za ostanek $R_n(x)$ velja

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\right| \le \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Če je $x < 0$ velja

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\right| \le \frac{x^{n+1}e^0}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Taylorjeva vrsta torej konvergira proti e^x za vsak $x \in \mathbb{R}$.

$\underline{f(x) = \sin x.}$ Taylorjeva vrsta funkcije f je vrsta

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \cdots .$$

Ker je $|f^{(n)}(x)| \le 1$ za vsak n in vsak x, velja

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Taylorjeva vrsta torej konvergira proti $\sin x$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

$\underline{f(x) = \cos x.}$ Taylorjeva vrsta funkcije $\cos x$ je vrsta

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \cdots .$$

Podobno kot pri $\sin x$ vidimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

$\underline{f(x) = \sinh x.}$ Velja

$$
\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots) - \frac{1}{2}(1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \cdots) \\
&= x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + \cdots
\end{aligned}
$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, ker tam konvergirata vrsti za e^x in e^{-x}.

$\underline{f(x) = \cosh x.}$ Velja

$$
\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots) + \frac{1}{2}(1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \cdots) \\
&= 1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \cdots
\end{aligned}
$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.