Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo
Katedra za algebro in analizo

Tadej Starčič

NALOGE IZ MATEMATIČNE ANALIZE Z REŠITVAMI

Učno gradivo

Ljubljana, 2015

Predgovor

Razumevanje matematike se lahko utrdi in poglobi le tako, da se matematične koncepte in računske metode preizkusi z reševanjem nalog. Zelo pomembno je potem to znanje uporabiti v drugih naravoslovnih vedah, pa tudi na ostalih področjih.

Zbirka vsebuje naloge z rešitvami oziroma z nasveti za reševanje. Obsega pa snov diferencialnega in integralnega računa, ter njuno uporabo. Teme, povezane z odvodom so, poleg osnovnih lastnosti, še Rolleov in Lagrangeov izrek, L'Hopitalovo pravilo, ekstremalni problemi, risanje grafov in krivulj, ter Taylorjeva vrsta. Integralni račun pa se obravnava skozi nedoločeni integral, določeni integral, posplošeni integral, ter uporabo integrala v geometriji in fiziki. Zelo zaželjeno je, da bralec zato pozna osnovne koncepte števil, številskih vrst, funkcij, limite in zveznosti. Naloge so samostojne in se praviloma ne sklicujejo na ostale naloge. Prav na koncu so dodane še rešitve, večinoma so to rezultati in uporabni nasveti, precej nalog pa je rešenih v celoti.

Izbor nalog je nastajal od študijskega leta 2009/10 do sedaj, v tem času namreč na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani med drugim vodim vaje iz predmeta Matematična analiza. V veliki meri so to naloge z vaj, izpitov in kolokvijev pri omenjenem predmetu. Vrstni red nalog, njihova težavnost in struktura zato naravno sledijo toku premišljevanja študenta. Zbirka je tako še posebej namenjena študentom Pedagoške fakultete, študijskega programa dvopredmetnega učitelja matematike, ki matematično analizo poslušajo v prvem letniku študija. Gotovo pa bo prav prišla tudi študentom, ki poslušajo sorodna predavanja na drugih fakultetah. Njen osnovni namen je pomoč pri študiju, pravi pomen pa bo dobila v povezavi s celotnim študijskim procesom.

Pa veliko veselja pri reševanju!

Ljubljana, april 2015 — dr. Tadej Starčič

Kazalo

1 Odvod - Osnovne lastnosti

1. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij v točki a:

   (a) $f(x) = x^3, \quad a = 1,$

   (b) $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad a = 2,$

   (c) $f(x) = \frac{3}{x^3}, \quad a = -1,$

   (d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad a = 0.$

   (Nasvet: Posebej izračunaj levi in desni odvod.)

2. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = e^{3x+1},$

   (b) $f(x) = \sqrt{2x},$

   (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}},$

   (d) $f(x) = \sin(3x).$

3. Odvajaj naslednje funkcije:

   (a) $y = 2x^4 + 3x - x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - 3,$

   (b) $y = \frac{3}{x^2} + 2\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}},$

   (c) $y = e^x \cos x,$

   (d) $y = 2x^4 \tan(x),$

   (e) $y = (\sin x + 2^x)\log(x),$

   (f) $y = (x^2 + 2^x) \arcsin x,$

   (g) $y = \frac{e^x}{\sin x},$

   (h) $y = \frac{\arctan x}{\ln x},$

   (i) $y = \frac{2e^x + 1}{\sqrt[3]{x} + \sin x},$

   (j) $y = \frac{\ln(x)e^x}{\sin x},$

   (k) $y = \sin(3x + \frac{\pi}{3}),$

   (l) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x},$

   (m) $y = \arcsin(1 + e^x),$

   (n) $y = e^{\sin x},$

   (o) $y = (1 + \ln(x))^{10} \cos(4x),$

   (p) $y = \frac{\arctan x}{\sqrt[3]{2x+1} + \sin(2x)},$

   (q) $y = \frac{e^{2x} + \arccos(x^2)}{\sqrt[5]{2x+1}},$

   (r) $y = \arctan(e^{2x+1} + \sqrt{2x+1}),$

   (s) $y = \sqrt[5]{\cos(2\ln(x) + 1)},$

   (t) $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}},$

   (u) $y = (1 + 2x)^{\sin^2(x)}.$

4. *Hiperbolične funkcije*, kosinus, sinus in tangens, so definirane z naslednjimi predpisi:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

   Na območjih, kjer so hiperbolične funkcije injektivne, definiramo inverzne funkcije, *area* funkcije, Arsh, Arch in Arth.

(a) Utemelji, da je sh injektivna povsod na $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti oziroma definicijsko območje Arsh pa je $\mathcal{Z}_{\text{sh}} = \mathcal{D}_{\text{Arsh}} = \mathbb{R}$. Funkcija ch postane injektivna kot zožitev na $[0, \infty)$ z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_{\text{ch}} = [1, \infty) = \mathcal{D}_{\text{Arch}}$, th pa je injektivna povsod na $\mathbb{R}$ z zalogo vrednosti $\mathcal{Z}_{\text{th}} = (-1, 1) = \mathcal{D}_{\text{Arth}}$.

(b) Izpelji naslednji zvezi med hiperboličnimi funkcijami:

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1, \qquad \text{th}^2(x) = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

(c) Pokaži, da lahko area funkcije izrazimo z ostalimi elementarnimi funkcijami na naslednji način:

- $\text{Arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$,
- $\text{Arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$,
- $\text{Arth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad |x| < 1$,

(d) Dokaži, da so odvodi hiperboličnih in njihovih inverznih funkcij enaki:

- $(\text{sh}x)' = \text{ch}x$,
- $(\text{ch}x)' = \text{sh}x$,
- $(\text{th}x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$,
- $(\text{Arch}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,
- $(\text{Arsh}x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- $(\text{Arth}x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

5. Dana naj bo funkcija $f(x) = x^3 - 11x + 7$.

(a) Zapiši enačbo tangente in normale na graf funkcije f v točki $(3, 1)$.

(b) Določi tangente na graf funkcije f s koeficientom -8. Poišči vse tangente na graf funkcije f, ki sekajo abscisno os pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

6. Dana je funkcija $g(x) = \frac{x^3}{3}$.

(a) Določi tangento in normalo na graf funkcije g v točki $(-3, -9)$.

(b) Poišči vse tangente na graf funkcije g, ki so vzporedne premici $y = 4y - 2$, ter tudi vse tangente, ki sekajo x-os pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

(c) Določi koeficient premice $y = kx - 18$, da bo ta tangentna na graf funkcije g.

(Nasvet: Upoštevaj, da je koeficient tangente k_T na graf funkcije v dani točki enak odvodu funkcije v tej točki, koeficient normale pa je potem $k_N = -\frac{1}{k_T}$.)

7. Poišči kot med krivuljama z enačbama $y = x^2 + 3x - 2$ in $y = 2x^2 - 6$, t.j. kot med ustreznima tangentama na krivulji v presečni toči.)

8. Določi tangente na dano krivuljo v točkah $(1, y_1)$, ter poišči točke (x_2, y_2) na krivuljah, v katerih imajo tangente koeficient enak 2:

   (a) $y = e^{2x}$, (R: $y = 2x - 2 + e^2$, $(0, 1)$)

   (b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, (R: $y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$)

   (c) $2y = 1 + xy^3$. (R: $y'(2 - 3xy^2) = 1$, $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$)

   (Nasvet: Odvod implicitno podane funkcije v ustrezni točki lahko izračunaš tako, da odvajaš njeno enačbo.)

9. Pokaži, da se krivulji $x^2 - y^2 = a$ in $xy = b$ sekata pravokotno za vsak $a, b \in \mathbb{R}$.

10. V trenutku $t = 0$ začnemo opazovati prevoženo pot nekega avtomobila v odvisnosti od časa t. Opišemo jo s funkcijo $s(t) = t(t - 2)^2$.

    (a) Kako se v odvisnosti od časa t spreminjata hitrost $v(t) = s'(t)$ in pospešek $a(t) = v'(t)$ avtomobila?

    (b) Kdaj avto vozi naprej in kdaj vzvratno? Kdaj pospešuje in kdaj zavira? (Nasvet: Premisli, kaj nam predznak hitrosti oziroma pospeška pove o smeri vožnje oziroma o pospeševanju.)

11. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ 2bx + a, & 0 < x \le 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases} .$$

    Določi parametra a in b, da bo funkcija f zvezna v točkah $x = 0$ in $x = 1$? Ali ima potem funkcija v teh dveh točkah enolično določeno tangento oziroma ali je zvezno odvedljiva? Kako geometrijsko izgleda graf funkcije v teh dveh točkah? (Nasvet: Izračunj leve in desne odvode funkcije f v točkah $x = 0$ oziroma $x = 1$, kjer je to mogoče, ter jih ustrezno primerjaj.)

12. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(2x) + a, & x \le 0 \\ be^{1-x^2} + cx, & 0 \le x \le 1 \\ \sin(\frac{\pi x}{2}) + d, & x > 1 \end{cases} ,$$

    kjer so a, b, c in d realni parametri. Določi a, b, c in d tako, da bo funkcija f zvezno odvedljiva povsod, ter zapiši predpis odvoda f'.

13. Določi realne parametre a, b, c, d, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln(x), & x \in [1, e] \\ cx^2 + d, & x > e \end{cases}.$$

povsod zvezno odvedljiva, ter zapiši f'.

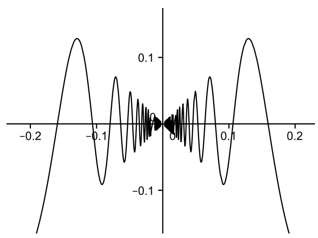
14. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

(a) Dokaži, da funkcija f ni odvedljiva v točki $x = 0$.

(b) Pokaži, da je funkcija g odvedljiva v $x = 0$, vendar pa ni zvezno odvedljiva. Odvod funkcije g tudi izračunaj in ga zapiši.

(Nasvet: Odvode v točki $x = 0$ izračunaj po definiciji, ter se spomni, da je $\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ pa ne obstaja.)



15. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & x \leq 0 \\ x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases},$$

Ali je funkcija f odvedljiva oziroma zvezno odvedljiva? Ali je morda obstaja tudi drugi odvod funkcije f? (Nasvet: Desne odvode v točki $x = 0$ izračunaj po definiciji.)

16. Z uporabo odvoda izpelji formulo za

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{(nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1,\, n \in \mathbb{N}.$$

17. Izračunaj višje odvode funkcij

    (a) $f(x) = 2^x$,
    (b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$,
    (c) $f(x) = \frac{1}{x^2-x}$.

    (Nasvet: Izračunaj prvih nekaj odvodov in na podlagi tega ugani formulo za n-ti odvod, ki jo nato z indukcijo dokaži.)

18. Z uporabo odvoda (diferenciala) izračunaj približne vrednosti za:

    (a) $0,99^{12}$,
    (b) $\sqrt{1,01}$,
    (c) $\sin(59^o)$,
    (d) $\arcsin(0,04 + \ln(1,02))$.

    (Nasvet: Izberi ustrezno funkcijo f in ustrezno točko a, ter upoštevaj, da je $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ za majhne h.)

2 Odvod - Rolleov in Lagrangeov izrek

1. Ali lahko uporabiš Rolleov izrek za funkcijo $f(x) = x^7 - 2x^2 - x + 4$ na intervalu $[-1, 1]$. Če je odgovor pritrdilen, ga zapiši.

2. Dana je zvezna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na intervalu (a, b) in osemkrat zavzame isto vrednost (npr. 2). Z uporabo Rolleovega izreka dokaži, da ima potem odvod funkcije f' na intervalu (a, b) vsaj sedem ničel. Ali lahko rezultat posplošiš na funkcijo z n ničlami, t.j. ugotovi in utemelji, najmanj koliko ničel ima odvod g', če ima g natanko n ničel?

3. (a) Zapiši trditev Lagrangeovega izreka za funkcijo $f(x) = (1 + x)^\alpha$ na intervalu $[0, z]$, kjer sta $\alpha > 1$ in $z > 0$ dve konstanti.

   (b) S pomočjo zgoraj zapisanega pokaži posplošeno Bernoullijevo neenakost:
   $$(1 + z)^\alpha \geq 1 + \alpha z, \qquad z > 0,\, \alpha > 1.$$

4. Dana je funkcija $f(x) = \ln(x)$.

   (a) Zapiši trditev Lagrangeovega izreka za funkcijo f na intervalu $[a, a + 1]$, kjer $a > 0$. S pomočjo dobljenega nato dokaži neenakost:
   $$\frac{1}{1+a} < \ln(1 + \frac{1}{a}) < \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$$

   (b) S pomočjo zgoraj dokazane neenakosti dokaži, da za delne vsote harmonične vrste velja
   $$\ln(n) + 1 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n + 1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

5. Dokaži, da za vsako odvedljivo funkcijo $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ z vsaj dvema fiksnima točkama obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, za katero je $f'(\xi) = 1$.

6. S pomočjo odvoda dokaži:

   (a) $\arctan(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}), \qquad x \in \mathbb{R}$,

   (b) $\mathrm{Arsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Pokaži, da se funkciji $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ in $g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\frac{2x}{1-x^2})$ na intervalih $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ oziroma $(1, \infty)$ razlikujeta kvečjemu za konstante, ki jih tudi določi.

8. Dokaži, da velja:

   (a) $|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$

   (b) $|\sin(2x) - \sin(2y)| \leq 2\,|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$

   (c) Za vsako zvezno odvedljivo funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ obstaja konstanta $C > 0$, da velja

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|, \qquad x, y \in [a, b].$$

   (Nasvet: Zapiši Lagrangeov izrek za dano funkcijo in oceni odvod na danem intervalu.)
   Kaj lahko na podlagi neenakosti sklepaš o enakomerni zveznosti funkcij?

3 Odvod - L'Hopitalovo pravilo

1. S pomočjo L'Hopitalovega pravila ali kako drugače izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x-2}{e^x}$,

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$,

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$,

   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$,

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(2x)}$,

   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$,

   (g) $\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2-3x}$,

   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x\sin(x)}$,

   (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{(\sin x)^2}$,

   (j) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{arctg}(x)}{x^3}$,

   (k) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{arctg}(2x)}{x-\sin 3x}$,

   (l) $\lim_{x\to 0} \arcsin(2x)\cot(3x)$,

   (m) $\lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,

   (n) $\lim_{x\to 0} x(\ln(x))^3$,

   (o) $\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)})$,

   (p) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot(x)}{x})$,

   (q) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

   (r) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

2. Dana je funkcija
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 1 \\ \frac{\ln(2x-1)}{2x-2}, & 1<x \end{cases}.$$
Dokaži, da je funkcija f zvezna v točki 1. Premisli, ali je funkcija f tudi odvedljiva v točki $x=1$? Določi še $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(Nasvet: Desni odvod v točki $x=0$ izračunaj po definiciji.)

3. Določi parametre a, b in c tako, da bo funkcija
$$f(x)=\begin{cases} ax^4+c, & x\leq -1 \\ \arctan(x)+b, & -1<x\leq 0 \\ \frac{\sin(2x)-2\ln(1+x)}{e^{x^2}-1}, & x>0 \end{cases},$$
kjer so a b in c realni parametri. zvezna povsod in zvezno odvedljiva v točki $x=-1$.

4. Določi realne parametre a, b in c da bo funkcija
$$f(x)=\begin{cases} a\sin(\frac{x}{2})+1, & x>\pi \\ bx^2+c, & \pi\geq x\geq 0 \\ dx+\frac{e^x-x-1}{x^2}, & x<0 \end{cases},$$
zvezno odvedljiva povsod?

5. Določi parametre a, b in c tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2+x), & x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & 1 \geq x \geq 0 \\ \frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)}, & x > 1 \end{cases},$$

zvezna v točki $x = 1$ in zvezno odvedljiva v točki $x = 0$, ter izračunaj limito $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Ali je pri dobljenih parametrih funkcija f tudi odvedljiva v točki $x = 1$? (Nasvet: Desni odvod v točki $x = 0$ računaj po definiciji.)

6. Ali obstaja realno število a, pri katerem lahko za izračun limite uporabiš L'Hopitalovo pravilo:

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x + e^{-2x+3} + a}{\ln(x)}$,

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{2e^x + e^{-2x+3} + a}{(\ln x)^2}$.

   Če je odgovor pritrdilen, potem pri ustreznem a limito tudi izračunaj.

4 Odvod - Ekstremi funkcije

1. Dane so funkcije

   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ na intervalu $[-\frac{3}{2}, 3]$,

   (b) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 4$ na intervalu $[-\frac{5}{2}, 2]$,

   (c) $f(x) = x^2 e^x$ na intervalu $[-3, 1]$,

   (d) $f(x) = x - \cos(2x)$ na intervalu $[0, \pi]$.

   - Določi maksimum in minimum danih funkcij na danih intervalih.
   - Določi intervale strogega naraščanja in padanja danih funkcij. S pomočjo ugotovljenega nato klasificiraj lokalne ekstreme oziroma določi prevoje funkcij.

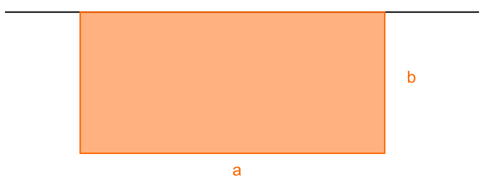
2. Pokaži, da ima funkcija $g(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x - 1$ na intervalu $[-2, 0]$ stacionarno točko, ter z bisekcijo poišči njen približek. Ali je v stacionarni točki na intervalu $[-2, 0]$ lokalni ekstrem ali prevoj?

3. Zapiši število 2012 kot vsoto dveh nenegativnih realnih števil, da bo njun produkt največji.

4. Krogli s polmerom R včrtaj pokončni stožec z največjo prostornino.

5. Krogli s polmerom R včrtaj pokončni valj z največjo prostornino.

6. Babica Jožica želi imeti ograjen zelenjavni vrt pravokotne oblike s površino $10\,\mathrm{m}^2$, ki bo tik ob eni izmed sten njene hiše. (Ograditi je treba le tri stranice.) Kakšnih dimenzij naj bo vrt, da bo zanj potrebno najmanj ograje?



7. Babica Francka želi imeti zelenjavni vrt pravokotne oblike, ki bo tik ob eni izmed sten njene hiše. (Ograditi je treba le tri stranice.) Na voljo ima 10 metrov ograje. Kakšnih dimenzij naj bo vrt, da bo njegova površina največja?

8. Elipsi z enačbo $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ včrtaj pravokotnik tako, da bodo njegove stranice vzporedne koordinatnim osem elipse, ter bo imel maksimalno možno ploščino.

9. Parabola $y=3-x^2$ in x-os omejujeta lik L. V L včrtaj enakokrak trikotnik z ogliščem v $(0,0)$ in osnovnico, vzporedno z x-osjo, da bo ploščina trikotnika največja.

10. Na paraboli $y^2=2x$ (ali $y=\sqrt{x}$) poišči točke, ki so najbližje točki $(2,0)$.
(Nasvet: Spomni se, da je oddaljenost med točkama (x_1,y_1) in (x_2,y_2) enaka $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.)

11. V enem obratu tovarne izdelujejo pločevinaste posode brez pokrova, ki so oblike valja z volumnom $1\,\mathrm{dm}^3$, v drugem obratu te tovarne pa izdelujejo plastične pokrove za te posode. Cena $1\,\mathrm{dm}^2$ pločevine je 2 centa, cena $1\,\mathrm{dm}^2$ plastike pa 1 cent. Kakšne naj bodo dimenzije posode (s pokrovom), da bodo stroški materiala minimalni? (Če ne gre, določi dimenzije posode brez pokrova, da porabimo čim manj pločevine.)

12. Izdelati želimo lonec brez pokrova v obliki valja za 10 litrov juhe. Kakšne morajo biti dimenzije, da se porabi čim manj materiala? (Debelino lonca lahko zanemarimo.)

13. Mojster Miha želi zgraditi silos za žito v obliki valja s sferno kupolo. Cena materiala za kupolo je dvakrat večja od cene materiala za valjasti del silosa. Kakšnih dimenzij naj bo silos za $1000\,\mathrm{m}^3$ žita, da bo njegova izgradnja najcenejša?

14. Iz žice želimo izdelati model pravilne 3-strane prizme s prostornino $2\,\mathrm{dm}^3$. Kakšni naj bosta dimenziji roba osnovne ploskve in višine, da bomo porabili najmanj žice? Odgovor utemelji.

15. Iz 4 metrov žice želimo izdelati model pravilne 4-strane piramide. Kakšni naj bosta dimenziji roba osnovne ploskve a in višine v, da bo prostornina piramide V največja?

16. Mravljica s tal opazuje 1 meter široko sliko, ki visi 2 metra nad tlemi. Kako daleč od stene naj se postavi, da bo videla sliko pod največjim kotom?

5 Odvod - Grafi funkcij

1. Dane so funkcije

   (a) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 5$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x}(2-x)$,
   (c) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$,
   (d) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{x+4}$,
   (e) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^3}}$,
   (f) $f(x) = x^2 e^{-x} + 1$,
   (g) $g(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{\frac{1}{2}x}$,
   (h) $k(x) = \frac{e^x}{x^2-3}$,
   (i) $f(x) = xe^{1-x^2}$,
   (j) $f(x) = \ln(2x-1) - 3x$,
   (k) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(3x)$,
   (l) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$,
   (m) $g(x) = \frac{2-5\ln(x)}{x^2}$,
   (n) $f(x) = x^2(\ln(x))^2$,
   (o) $g(x) = \frac{2}{3-x} - \mathrm{arctg}(x)$.
   (p) $g(x) = \frac{1}{x} + 2\mathrm{arctg}(x)$,
   (q) $f(x) = \mathrm{arctg}(2x) - \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$,
   (r) $h(x) = e^{\sin(x)}$.

   - Danim funkcijam določi definicijsko območje, ničle, pole, asimptote in razišči obnašanje na robu definiciskega območja.
   - Poišči intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme, ter zalogo vrednosti danih funkcij.
   - Določi intervale konveksnosti in konkavnosti, ter prevoje. (Če ne gre v splošnem, potem poišči vsaj kakšno točko, v okolici katere je funkcija f konveksna oziroma konkavna.)
   - Čimbolj natančno skiciraj graf funkcije.

6 Odvod - Krivulje v polarni in parametrični obliki

1. V implicitni in parametrični obliki so podane naslednje krivulje:

   (a) $x(t) = 4\cos(t), \quad y(t) = 3\sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$ (elipsa),

   (b) $x(t) = \pm 4\mathrm{ch}(t), \quad y(t) = 3\mathrm{sh}(t), \quad t \in \mathbb{R},$ (hiperbola),

   (c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,$ (asteroida),
   (Nasvet: Parametriziraj z $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.)

   (d) $x(t) = \sin(2t), \quad y(t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$

   (e) $x(t) = t^2 - 1, \quad y(t) = t(t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R},$

   (f) $x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$ (cikloda),

   (g) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$, $a > 0$, (Descartesov list)
   (Nasvet: Vpelji parameter $t = \frac{x}{y}$.)

   (h) $x = \cos at, \quad y = \sin at, \quad z = bt, \quad t \in \mathbb{R},$ (vijačnica).

   - Čimbolj natančno nariši dane krivulje.
     (Nasvet: Skiciraj grafa $x(t)$ in $y(t)$, ter poskusi določiti ekstremne točke, t.j. reši enačbi $\dot{x} = 0$ in $\dot{y} = 0$.
   - Izračunaj naklon krivulje oziroma y'. Izberi si neko točko na krivulji in določi tangento na dano krivuljo v tej točki, če obstaja.

2. V implicitni ali polarni obliki so podane naslednje krivulje:

   (a) $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^+,$ (hiperbolična spirala),

   (b) $r(\varphi) = e^{a\varphi},$ (logaritemska spirala),

   (c) $r(\varphi) = \cos(3\varphi), \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}],$

   (d) $r(\varphi) = a(1 + \cos(\varphi)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi],$ (kardioida),

   (e) $(x^2 + y^2) = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0,$ (lemniskata).
   (Nasvet: Vpelji polarne koordinate.)

   - Čimbolj natančno nariši dane krivulje. (Nasvet: Skiciraj grafe $r(\varphi)$, $x(\varphi)$ in $y(\varphi)$; poskusi določiti ekstremne točke, t.j. reši enačbi $\dot{x} = 0$ in $\dot{y} = 0$.)
   - Izračunaj naklon krivulje oziroma y'. Določi tangento na dano krivulje v točki, ko je kot $\varphi = \frac{\pi}{2}$, če obstaja.

7 Integral - Nedoločeni integral

1. Nedoločeni integral katere funkcije f je dana funkcija F:

   (a) $F(x) = \sqrt[3]{1 + \cos(\ln x)}$,

   (b) $F(x) = e^{x^2} \operatorname{arctg}(x)$,

2. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

   (a) $\int (2x^4 + x + 2x^{-3} + x^{-1} + 2)dx$,

   (b) $\int (\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x})dx$,

   (c) $\int (e^{2x} - e^{x+1})dx$,

   (d) $\int \cos(7x + \frac{\pi}{8})dx$.

3. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke izračunaj naslednje nedoločene integrale:

   (a) $\int (2x+1)^{19} dx$,

   (b) $\int 3x \cos(x^2) dx$,

   (c) $\int x e^{1-x^2} dx$,

   (d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} dx$,

   (e) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2+2}} dx$,

   (f) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^2}} dx$,

   (g) $\int \frac{\ln(x)+1}{x\sqrt[3]{\ln(x)}} dx$,

   (h) $\int \frac{e^x(e^{2x}-2)}{\sqrt{e^x+1}} dx$,

   (i) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$,

   (j) $\int \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{\cos(x)+2} dx$,

   (k) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}} dx$,

   (l) $\int \frac{\sin^3(x)+\sin(x)\cos^4(x)}{\sqrt[3]{\cos(x)}} dx$,

   (m) $\int \frac{\cos^3(x)+5\cos(x)}{3+2\sin(x)} dx$,

   (n) $\int \cos^2(x) dx$,

   (o) $\int \operatorname{ch}^2(x) dx$,

   (p) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$,

   (q) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$,

   (r) $\int \sqrt{1+x^2} dx$,

   (s) $\int \sqrt{x^2-4} dx$,

   (t) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

4. S pomočjo integracije 'per-partes' izračunaj naslednje integrale:

   (a) $\int x e^x dx$,

   (b) $\int (4x-1)\sin(6x) dx$,

   (c) $\int x\cos^2(x) dx$,

   (d) $\int \ln(x) dx$,

   (e) $\int (2x-3)\ln(x+1) dx$,

   (f) $\int (x^2 + \sqrt{x})\ln(2x) dx$,

(g) $\int (2x^2 - 3x + 1)\sin(3x)dx$,
(h) $\int (x^2 - 3x + 1)e^{-2x}dx$,
(i) $\int (2x^2 - 3x + 1)e^{-3x}dx$,
(j) $\int x^{10}e^{-x}dx$,
(k) $\int x^3(\ln x)^2dx$,
(l) $\int e^{2x}\sin(x)dx$.

5. Izračunaj nedoločene integrale naslednjih racionalnih funkcij:

(a) $\int \frac{3+x}{1+x}dx$,
(b) $\int \frac{x^2-3x+2}{x+1}dx$,
(c) $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x-1}dx$,
(d) $\int \frac{x^4+x^2+3}{1+x^2}dx$,
(e) $\int \frac{x+7}{x^2-x-2}dx$,
(f) $\int \frac{x^2+3x+4}{x^2-1}dx$,
(g) $\int \frac{2}{(x-1)(x+1)^2}dx$,
(h) $\int \frac{x^2+9x+5}{(x+1)^2(x-2)}dx$,
(i) $\int \frac{dx}{2+8x^2}$,
(j) $\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$,
(k) $\int \frac{4x}{x^2+1}dx$,
(l) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$,
(m) $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+2}dx$,
(n) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+2x+3)(x+1)}dx$,
(o) $\int \frac{3x^2+4x-1}{(x^2+2x+3)(2x+1)}dx$,
(p) $\int \frac{x-11}{(x^2+4)(x-1)}dx$,
(q) $\int \frac{2x^2+8x-7}{x^3+2x^2-2x+3}dx$,
(r) $\int \frac{2x^2+5x+8}{x^3+4x^2+5x}dx$,
(s) $\int \frac{2}{x^3+1}dx$,
(t) $\int \frac{1}{(1+x^2)^4}dx$.

6. Naj bo $u = \tan(\frac{x}{2})$. Pokaži, da potem velja $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ in $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, ter izračunaj naslednje integrale:

(a) $\int \frac{3}{2\sin^2 x+5\cos^2 x}dx$,
(b) $\int \frac{2}{3+5\cos x}dx$,
(c) $\int \frac{3dx}{2+2\sin x+3\cos x}$,
(d) $\int \frac{2}{1+\cos x+\sin x}dx$.

7. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a) $\int \frac{(e^x-3)e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$,
(b) $\int \frac{e^{2x}-2}{e^x+1}dx$,
(c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x(1+(\ln x)^2)}dx$,
(d) $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2-4}dx$,
(e) $\int (x-3)\ln(x+1)dx$,
(f) $\int x\arctan(2x)dx$,
(g) $\int x\arctan(3x+2)dx$,
(h) $\int x^2\arctan(2x)dx$,
(i) $\int (x^3 - \sqrt[3]{x})\ln(2x)dx$,
(j) $\int e^{\sqrt{x}}dx$,
(k) $\int (\arcsin x)^2dx$,
(l) $\int \sin^3(x)\ \ln(\cos x)dx$,
(m) $\int x\sin(\sqrt{x})dx$,
(n) $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx$,
(o) $\int x\ln(1+x^2)dx$,
(p) $\int \cos(\ln(x))dx$.

8. Dan je nastavek

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{a+bx+x^2}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{a+bx+x^2} + A\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}},$$

kjer sta $P_n(x)$ oziroma $Q_{n-1}(x)$ polinoma stopnje n oziroma $n-1$ in A, a ter b realne konstante.

(a) Poišči realni konstanti A in B, da bo veljalo

$$\int \frac{5x-11}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx = A\sqrt{5-2x-x^2} + B\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-x^2}},$$

ter izračunaj nedoločeni integral $\int \frac{5x-11}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$.

(b) Izračunaj nedoločeni integral $\int \frac{x^3+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

9. Dokaži, da ne obstaja nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

8 Integral - Določeni integral

1. Direktno preko definicije Riemannovega oziroma Darbouxjevega integrala (t. j. z Riemannovimi oziroma Darbouxjevimi vsotami) pokaži, da sta konstantna funkcija $f(x) = C$ in linearna funkcija $g(x) = x$ integrabilni na poljubnem intervalu $[a, b]$, ter izračunaj njuna določena integrala $\int_a^b C dx$ in $\int_a^b x dx$.

2. Dana je funkcija $f(x) = x^3$.

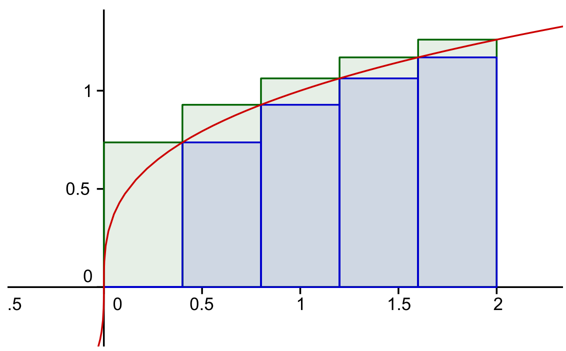
   (a) Naj bo $\mathcal{D}$: $0 < \frac{1}{2} < 1 < \frac{5}{4} < \frac{8}{5} < 2$ delitev intervala $[0, 2]$. Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f za dano delitev $\mathcal{D}$, ter ju izračunaj. Kaj geometrijsko predstavljata vsoti?

   (b) Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{D}_n$: $0 < \frac{2}{n} < \frac{4}{n} < \ldots < \frac{2n-2}{n} < 2$ delitev intervala $[0, 2]$. Zapiši zgornjo Darbouxjevo vsoto $S(\mathcal{D}_n)$ in spodnjo Darbouxjevo vsoto $s(\mathcal{D}_n)$ funkcije f pri dani delitvi $\mathcal{D}_n$. Z indukcijo dokaži formulo $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, nato pa jo uporabi pri izračunu limit zaporedij $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{D}_n)$ in $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{D}_n)$. Koliko pa je $\int_0^2 x^3 dx$?

3. Dana je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

   (a) Naj bosta $\mathcal{D}$: $0 < \frac{1}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 3$ in $\mathcal{D}'$: $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1 < \frac{3}{2} < \frac{8}{3} < 3$ delitvi intervala $[0, 3]$. Zapiši zgornji in spodnji Darbouxjevi vsoti funkcije f za delitvi $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, ter jih primerjaj po velikosti.

   (b) Za poljubno število $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{D}_n$: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1$ delitev intervala $[0, 1]$. Zapiši zgornjo Darbouxjevo vsoto $S(\mathcal{D}_n)$ in spodnjo Darbouxjevo vsoto $s(\mathcal{D}_n)$ funkcije f za dano delitev $\mathcal{D}_n$. Razmisli, zakaj obstajata limiti zaporedij $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{D}_n)$ in $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{D}_n)$, ter ju poišči.



4. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{1+2x}$.

   (a) Izračunaj zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f za naslednjo delitev intervala $[1, 3]$: $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < \frac{15}{8} < 2 < \frac{8}{3} < 3$. Kaj geometrijsko predstavljata dobljeni vsoti? Vsoti po velikosti primerjaj še z $\int_1^3 f(x)dx$.

   (b) Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{D}_n$: $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1$ delitev intervala $[0, 1]$. Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f pri dani delitvi $\mathcal{D}_n$. Razmisli, zakaj obstajata limiti zaporedij $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{D}_n)$ in $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{D}_n)$, ter ju izračunaj?

   (c) Za $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\mathcal{D}'_n$: $0 < 1 < 2 < \ldots < n-1 < n$ delitev intervala $[0, n]$. Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f pri dani delitvi $\mathcal{D}'_n$. Dobljeni vsoti nato po velikosti primerjaj z določenim integralom $\int_0^n f(x)dx$, ter s pomočjo ugotovljenega pokaži neenakost:

$$1+\frac{1}{2}\ln(2n+1) \geq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2}\ln(2n+3), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

5. Dana je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Naj bo $\mathcal{D}$: $-1 < -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < 1 < 2$ delitev intervala $[-1, 2]$. Izračunaj zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije g za dano delitev $\mathcal{D}$.

   (b) Direktno po definiciji pokaži (t.j. z Darbouxjevimi vsotami), da je funkcija g integrabilna na intervalu $[1-, 2]$, ter $\int_{-1}^2 g(x)dx = 3$.

6. Dana je funkcija

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}.$$

   (a) Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f za delitev intervala $[0, 2]$: $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < 1 < \frac{3}{2} < 2$.

   (b) Direktno po definiciji pokaži (t.j. z Darbouxjevimi vsotami), da naslednja funkcija ni integrabilna na nobenem zaprtem intervalu. (Nasvet: Upoštevaj, da lahko na vsakem intervalu najdemo tako racionalno kot iracionalno število.)

7. Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

   (a) Zapiši zgornjo in spodnjo Darbouxjevo vsoto funkcije f za delitev intervala $[-1, 2]$: $-1 < -\frac{1}{3} < -\frac{2}{3} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2$.

   (b) Direktno po definiciji (t.j. z Darbouxjevimi vsotami) pokaži, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[-1, 2]$ in velja $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$.

8. S pomočjo določenega integrala izračunaj naslednjo limito:

   (a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n})$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$,

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$.

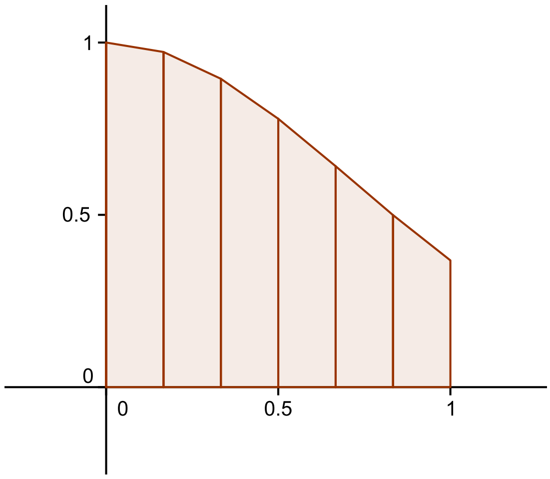
   (Nasvet: Izraz pod limito predstavi kot Riemannovo oziroma Darbouxjevo vsoto ustrezne funkcije pri ustrezni delitvi.)

9. Dana je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ in delitev $\mathcal{D}\colon a = x_0 < \ldots < x_n = b$.

   (a) Za dano delitev intervala $\mathcal{D}$ in funkcijo f definiramo izraz
   $$T(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$
   Kaj geometrijsko predstavlja zgornja vsota?

   (b) Pokaži, da v posebnem primeru, ko so podintervali dane delitve enako veliki (t.j $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$) velja *trapezna formula* :
   $$T(\mathcal{D}, f) = \frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

   (c) Izračunaj $T(\mathcal{D}, f)$ za funkcijo $f(x) = e^{-x^2}$ in delitev intervala $[0, 1]$ na šest enakih podintervalov, $\mathcal{D}\colon 0 < \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6} < \frac{5}{6} < 1$.



10. Dokaži, da so naslednje funkcije odvedljive in izračunaj njihove odvode:

    (a) $F(x) = \int_x^0 e^{-t^3} dt, \quad x \in [0, 1,],$

    (b) $F(x) = \int_2^{-2x} e^{-t^3} dt, \quad x \in [2, 4],$

    (c) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(t^2) dt,$

    (d) $F(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$, kjer je f zvezna funkcija na $[0, 1]$.

    (Nasvet: Spomni se, da je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ odvedljiva, ter velja $F'(x) = f(x)$, če je f zvezna. Vpelji še ustrezno novo spremenljivko ali zapiši F kot ustrezni kompozitum funkcij $F(x) = (G \circ g)(x)$, ter odvajaj po verižnem pravilu.)

11. Izračunaj določeni integral $\int_0^2 f(x)dx$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x^2}, & x \leq 1 \\ \sin(\frac{\pi x}{2}), & x > 1 \end{cases}.$$

9 Integral - Posplošeni integral

1. Utemelji, zakaj so naslednji integrali posplošeni in jih izračunaj, če lahko:

   (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$,

   (b) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x-1}$,

   (c) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ \ln(x)}$,

   (d) $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x}}$,

   (e) $\int_0^\infty \frac{dx}{4+x^2}$,

   (f) $\int_{-\infty}^0 e^{2x}(x^2-2x)dx$,

   (g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(3-\ln x)}$,

   (h) $\int_0^1 \frac{dx}{x(3-\ln x)^2}$,

   (i) $\int_1^\infty \frac{2dx}{x^2-4x+5}dx$,

   (j) $\int_0^\infty \frac{2x+5}{x^3-4x^2+5x}dx$.

2. Razišči konvergenco oziroma obstoj naslednjih posplošenih integralov:

   (a) $\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$,

   (b) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{(x-1)^2}$

   (c) $\int_0^\infty \sin(x)dx$,

   (d) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$,

   (e) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2}dx$,

   (f) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}(x)}{(x+2)^3}dx$,

   (g) $\int_{-\infty}^1 \frac{e^x dx}{(x-1)^2}$.

10 Integral - Uporaba integrala

1. Hitrost avta v odvisnosti od časa $t \in [1, 20]$ (v s) opišemo s funkcijo $v(t) = 6\sqrt{t+1}$ (v m/s). Kako se v odvisnosti od časa spreminjata pot avtomobila? Kolikšno pot prevozi avto med tretjo in osmo sekundo? Kolikšna je povprečna hitrost v tem času?

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo naslednje krivulje:

   (a) $y = e^{-x}$, $x = -1$ in $y = 1$,

   (b) $y = x^2 - 4$ in $y = -x^2 + 2x$

   (c) $y = xe^{x-1}$, $y = 0$ in $x = 1$,

   (d) $y = \sqrt[3]{x}$ in $y = x^2$,

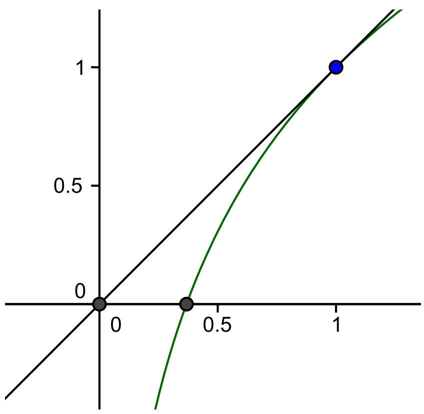
   (e) $y = \frac{1}{1+x^2}$ in $y = \frac{x^2}{2}$.

   (f) $y = \sqrt{3x}$, $y = -x + 6$ in $y = 0$,

   (g) $y = x\ln(x)$, $x = 1$, $x = e$ in $y = 0$.

   (h) $f(x) = \sqrt{x^3}$, tangenta na graf funkcije f v točki $(4, 8)$, ter x-os,

   (i) $f(x) = \ln(x) + 1$, tangenta na graf funkcije f v točki $(1, 1)$ in x-os.



   (j) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ in tangenti na graf funkcije f v točkah $(0, 0)$ in $(2, 0)$.

3. Izračunaj dolžino krivulje oziroma obseg lika, določenega z

   (a) $y = x\sqrt{x}$ in $y = 2x$,

   (b) $y = \frac{2}{3}(2 - x)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [-1, 2]$,

   (c) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$, $x \in [1, e]$

(d) $y = \mathrm{ch}x, \quad x \in [-1, 1]$.

(e) $y = \sqrt{3x}$, $y = -x + 6$ in $y = 0$,

4. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če okrog x-osi zavrtimo lik, ki ga omejujejo krivulje z enačbami:

   (a) $y = \frac{2}{x^2}$ za $x \in [1, 4]$,

   (b) $y = xe^{x-1}$, $y = 0$ in $x = 1$,

   (c) $y = \ln(x)$, $x = e$ in $y = 0$,

   (d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ in premica $y = 0$

   (e) $y = \sin(x)$ za $x \in [0, \pi]$ in $y = 0$,

   (f) $y = x\sqrt{x}$ in $y = 2x$

   (g) $y = \sqrt{3x}$, $y = -x + 6$ in $y = 0$,

   (h) $f(x) = x\ln(x)$, $x = e$ in $y = 0$,

5. Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo, če okrog x-osi zavrtimo lik, ki ga omejujejo krivulje z enačbami:

   (a) $y = \sqrt{2 - x^2}$ in $y = 1$,

   (b) $y = \sqrt{2x}$, $x = 2$ in $y = 0$,

   (c) $y = \sqrt{3x}$, $y = -x + 6$ in $y = 0$,

   (d) $y = \mathrm{ch}(x)$, $x \in [-1, 1]$.

6. S pomočjo integralnega računa izpelji formulo za prostornino in površino piramide, stožca oziroma krogelnega odseka.

7. Izračunaj ploščino ali obseg lika, ki ga omejuje krivulja, podane v parametrični obliki ali v polarnih koordinatah:

   (a) $r = \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$, (*Arhimedova spirala*)

   (b) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, (*asteroida*)

   (c) $r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$, (*lemniskata*)

   (d) $r = a(1 + \cos(\varphi)),\ a > 0$, (*kardioida*)

11 Funkcijska zaporedja in vrste

1. Dana so naslednja funkcijska zaporedja:

   (a) $f_n(x) = x(1 + \frac{1}{n})$,

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$, $x \in [0, 1]$,

   (c) $f_n(x) = \arctan(nx)$,

   (d) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$,

   (e) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$,

   (f) $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$, $x \in [0, \infty)$,

   (g) $f_n(x) = xe^{-nx}$,

   (h) $h(x) = 2xn^2e^{-n^2x^2}$,

   (i) $h(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$,

   (j) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$.

   - Ugotovi, ali dano zaporedje funkcij konvergira po točkah oziroma enakomerno, ter izračunaj limito $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, če obstaja.
   - Ali zaporedje odvodov $f_n'(x)$, če obstajajo, konvergira po točkah oziroma enakomerno? Če je odgovor pritrdilen, poišči tudi limito. Ali je enaka odvodu limitne funkcije zaporedja f_n?
   - Ali konvergira zaporedje integralov $\int_0^1 f_n(x)dx$, t.j. ali obstaja limita $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$; je morda enaka $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$?

2. Določi konvergenčne polmere oziroma območja konvergence naslednjih potenčnih vrst oziroma funkcijskih vrst (razišči tudi konvergenco na robu območij):

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$,

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x - 2)^n$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

   Razišči tudi enakomerno konvergenco danih funkcijskih vrst, ter poskusi določiti vsoto katere od vrst.

3. Naslednje funkcije razvij v Taylorjeve vrste okoli točke $x = a$, določi območja konvergence dobljenih vrst in izračunaj $f^{(2014)}(a)$ in $f^{(2015)}(a)$:

   (a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ okoli točke $a = 1$,

   (b) $f(x) = 1 - \cos(2x)$ okoli točke $a = 0$,

   (c) $f(x) = xe^{-x}$ okoli točke $a = 0$,

   (d) $h(x) = x^2 \cos(2x)$ okoli točke $a = 0$,

   (e) $f(x) = e^{2x}$ okoli točke $a = 2$,

(f) $f(x) = \ln(x)$ okoli točk $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$,

(g) $f(x) = \ln(2 + x)$ okrog točke $a = -1$,

(h) $f(x) = x(e^{-x} - 1)$ okoli točke $a_1 = 0$,

(i) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ okoli točk $a_1 = 0$ in $a_2 = 1$,

(j) $h(x) = \frac{1}{3-x}$ okoli točk $a_1 = 0$ in $a_2 = 2$,

(k) $g(x) = \frac{1}{4+x^2}$ okoli točke $a = 0$,

(l) $r(x) = \frac{1}{x^2-x}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = -1$

(m) $s(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ okoli $a = 0$, (Zapiši do členov četrtega reda.)

(n) $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ okrog točke $a = 0$.

4. S pomočjo Taylorjeve formule oceni napako naslednjih približkov:

   (a) $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x, \quad |x| < 0.01$,

   (b) $\sin(x) \approx x, \quad |x| < 0.01$,

   (c) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad |x| < \frac{1}{2}$.

5. Z uporabo Taylorjeve vrste do členov tretjega reda izračunaj približne vrednosti:

   (a) $0,99^{12}$,

   (b) $\sqrt{1,01}$,

   (c) $\sin(59^o)$,

   (d) $\arcsin(0,04 + \ln(1,02))$.

6. S pomočjo Taylorjeve formule oziroma razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$,

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{5\sin(x) - \sin(5x)}{x^2 \sin x}$,

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{1-\cos(2x)}$,

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^{-x}-1)}{1-\cos(3x)}$,

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(2x)}$,

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin(3x)}{e^{2x}-e^{-2x}}$,

   (g) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \frac{2x-2}{x+1}}{\sin^3(\pi x)}$,

   (h) $\lim_{x\to 0} x^{-4} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

12 Rešitve

12.1 Odvod - Osnovne lastnosti

1. Vse odvode v primerih (a), (b) in (c) izračunamo na enak način. Izračuajmo zato le odvod v primeru (a), ko je $f(x) = x^3$ in $a = 1$. Po definiciji je

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = 3.$$

   V primeru (d) pa moramo posebej določiti levi odvod, ki je jasno $f'_L(0) = 0$, ter desnega $f'_D(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h}} - 0}{h} = \lim_{k\to\infty}(ke^{-k}) = 0$.

2. (a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$.

   (b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)} - \sqrt{2x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2(x+h)} - \sqrt{2x})(\sqrt{2(x+h)} + \sqrt{2x})}{h(\sqrt{2(x+h)} + \sqrt{2x})} =$
   $= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h(\sqrt{2(x+h)} + \sqrt{2x})} = \frac{2}{2\sqrt{2x}}$.

   (c) Izračunamo na podoben način kot (b).

   (d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3(x+h)) - \sin(3x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{3h}{2})\cos(\frac{6x+3x}{2})}{h} =$
   $= \lim_{h\to 0} 3\cos(3x + \frac{3h}{2}) = 3\cos(3x)$.

3. Vse funkcije lahko enostavno odvajamo z neposredno uporabo pravil za odvajanje vsote, produkta, kvocienta in kompozituma funkcij.

4. (a) Funkcija sh je vsota naraščajočih funkcij $\frac{1}{e}e^x$ in $-\frac{1}{2}e^{-x}$ in je zato naraščajoča oziroma injektivna. Injektivnost zožitve ch na $[0, \infty)$ in th pa pokažemo po definiciji. Vzemimo torej $x, y \in [0, \infty)$ in opazujmo $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$. Ko enačbo pomnožimo z $2e^{x+y}$ in preuredimo, dobimo $e^{x+y}(e^x - e^y) = e^x - e^y$, kar pomeni lahko le $x = y$. Podobno se lotimo funkcije th.

      Pri iskanju zaloge funkcij vrednosti upoštevaj, da so funkcije sh, $\mathrm{ch}|_{[0,\infty)}$ in th injektivne, zvezne in definirane povsod, ter velja $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.

   (b) Upoštevaj definicije funkcij ch, sh in th, ter poračunaj.

   (c) Vse inverzne funkcije poiščemo na enak način, zato poiščimo le inverz funkcije sh. Vzemimo torej $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$. Enačbo pomnožimo z $2e^x$, malo preuredimo in dobimo $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$. Smiselna rešitev te kvadratne enačbe je potem $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(d) Zlahka se izračuna odvode funkcij ch, sh in th, odvode njihovih inverznih funkcij pa lahko izračunamo preko izražave z elementarnimi funkcija iz (c), ali pa z odvajanjem osnovne zveze med funkcijo in njenim inverzom.

Oglejmo si naprimer izračun $(\mathrm{Arch}x)'$ z odvajanjem zveze $\mathrm{ch}(\mathrm{Arch}x) = x$:

$$(\mathrm{Arch}x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Arch}x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{Arch}x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

5. (a) Tangenta: $y = 16x - 47$; normale: $y = -\frac{1}{16}x + \frac{19}{16}$.

   (b) Tangenti s koeficientom -8: $y = -8x + 5$, $y = -8x + 25$; grafa f se dotikata v točkah $(1, -3)$ oziroma $(-1, 17)$. Tangenti, ki sekata x-os pod kotom $\frac{\pi}{4}$: $y = x - 9$, $y = x + 23$; grafa f se dotikata v točkah $(2, -7)$ oziroma $(-2, 21)$.

6. (a) Enačba tangente je $y = 9x + 18$, enačba normale pa $y = -\frac{1}{9}x - \frac{28}{3}$.

   (b) Tangenti, vzporedni $y = 4x - 2$: $y = 4x - \frac{16}{3}$, $y = 4x + \frac{16}{3}$; grafa g se dotikata v točkah $(2, \frac{8}{3})$ oziroma $(-2, -\frac{8}{3})$. Tangenti, ki sekata x-os pod kotom $\frac{\pi}{4}$: $y = x - \frac{2}{3}$, $y = x + \frac{2}{3}$; grafa g se dotikata v točkah $(1, \frac{1}{3})$ oziroma $(-1, -\frac{1}{3})$.

   (c) Premica $y = -9x - 18$ je tangentna na graf g v točki $(3, 9)$.

7. Opazi, da se krivulji sekata v točkah $T_1(-1, -2)$ in $T_2(4, 26)$. Koeficienta tangent na krivulji v teh dveh točkah sta potem $k_1 = 1$, $k_2 = 11$ oziroma $l_1 = -4$, $l_2 = 14$. Za vsako točko posebej nato poišči kot med tangentama na dani krivulji, kjer upoštevaj, da je kot φ med tangentama s koeficientoma k in l enak $\varphi = \arctan|\frac{k-l}{1+kl}|$.

8. (a) Tangenta v točki $(1, e^2)$ je $y = 2x - 2 + e^2$, tangenta s koeficientom 2 se dotika krivulje v točki $(0, 1)$.

   (b) Tangenta v točki $(1, \sqrt{2})$ je $y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$, koeficint 2 pa imata tangenti v točkah $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ in $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

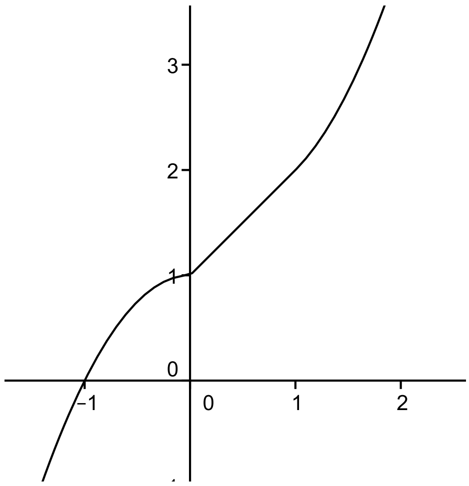
   (c) Z odvajanjem enačbe krivulje dobimo $y'(2 - 3xy^2) = 1$, od koder brez težav izračunamo koeficiente oziroma poiščemo enačbe tangent v točkah $(1, 1)$, $(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ in $(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$. Če upoštevamo še enačbo krivulje, potem se tangenta s koeficientom 2 dotika krivulje v točki $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$.

9. Odvajamo enačbi krivulj in izrazimo odvoda $y' = \frac{x}{y}$ in $y' = -\frac{y}{x}$. Produkt odvodov oziroma koeficientov tangent v presečni točki je potem enak -1, kar pomeni pravokotnost.

10. (a) $v(t) = (t-2)(3t-2)$, $a(t) = 6t - 8$.

    (b) Avto vozi naprej, ko je $v(t) > 0$, torej za $t \in [0, \frac{2}{3}) \cup (2, \infty)$, ter vzvratno za $v(t) < 0$ oziroma $t \in (\frac{2}{3}, 2)$; vmes se dvakrat ustavi pri $t = \frac{2}{3}$ in $t = 2$. Pospešuje, ko je $a(t) > 0$, torej za $t \in (\frac{8}{6}, \infty)$, ter zavira pri $a(t) < 0$ oziroma $t \in [0, \frac{8}{6})$.

11. Funkcija f je zvezna za $a = 1$ in $b = \frac{1}{2}$. V tem primeru lahko izračunamo ustrezne leve in desne odvode $f'_L(0) = 0$, $f'_D(0) = 1$, $f'_L(1) = 1$ in $f'_D(1) = 1$, kar pomeni, da je f zvezno odvedljiva v točki $x = 1$, v točki $x = 0$ pa ne.



12. Funkcija f je zvezno odvedljiva za $a = e$, $b = 1$, $c = d = 2$. Tedaj je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+4x^2}, & x \leq 0 \\ -2bxe^{1-x^2} + c, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi x}{2}), & x > 1 \end{cases}.$$

13. Funkcija f je zvezno odvedljiva za $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2e^2}$ in $d = \frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \in [1, e] \\ \frac{x}{e^2}, & x > 1 \end{cases}.$$

14. (a) Po definiciji je $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$, ta limita pa ne obstaja.

(b) Odvod v $x \neq 0$ računamo po pravilih za odvajanje, odvod v $x = 0$ pa po definiciji: $g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$. Sledi

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

ki pa ni zvezna funkcija, saj ne obstaja $\lim_{x\to 0} g'(x)$.

15. Desna odvoda funkcije f računamo podobno kot v nalogi 14. Dobimo

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{1-x^2}, & x \leq 0 \\ 3x^2\sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases},$$

ki je zvezna funkcija, ni pa ponovno odvedljiva v točki $x = 0$.

16. Opazi, da je $(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}) = (x+x^2+\ldots+x^n)' = (\frac{x-x^n}{1-x})'$ in odvajaj po pravilih za odvajanje.

17. Na podlagi izračunov prvih nekaj odvodov opazi formule za n-te odvode, ki jih z indukcijo tudi zares dokaži. V indukcijskem koraku upoštevaj, da je $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

    (a) $f^{(n)}(x) = 2^{nx}$,

    (b) $f^{(n)}(x) = \frac{(-2)^n\, n!}{(2x+1)^{n+1}}$,

    (c) $f(x) = (-1)^n\, n!(x^{-n-1} - (x-1)^{-n-1})$.

18. (a) $f(x) = x^{12}$, $a = 1$, $h = -0.01$, $\quad 0,99^{12} \approx 0.88$,

    (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $h = 0.01$, $\quad \sqrt{1,01} \approx 1.005$,

    (c) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$, $h = \frac{\pi}{180}$ $\quad \sin(59^o) \approx 0.857$,

    (d) $f(x) = \arcsin(2x + \ln(1+x))$, $a = 0$, $h = 0.02$, $\arcsin(0,04 + \ln(1,02)) \approx 0.06$.

12.2 Odvod - Rolleov in Lagrangeov izrek

1. Ker je $f(1) = f(-1) = 2$, po Rolleovem izreku obstaja taka točka $\xi \in (-1, 1)$, da je $f'(\xi) = 7\xi^6 - 4\xi - 1 = 0$.

2 Naj za točke $x_1, x_2, \ldots, x_7$ velja $f(x_1) = \ldots = f(x_7)$. Po Rolleovem izreku potem za vsak $j \in \{1, \ldots, 6\}$ obstaja točka $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$, da je $f'(\xi_j) = 0$.

3. (a) Po Lagrangeovem izreku za funkcijo $f(x) = (1+x)^\alpha$ obstaja taka točka $\xi \in (0, z)$, da je $\frac{(1+z)^\alpha - 1}{z} = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}$.

   (b) Po preoblikovanju zgoraj zapisane trditve dobimo:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha(1+\xi)^{\alpha-1} z \geq 1 + \alpha z.$$

4. (a) Po Lagrangeovem izreku za funkcijo $f(x) = \ln(x)$ obstaja taka točka $\xi \in (a, a+1)$, $a > 0$, da je $\frac{1}{\xi} = \frac{\ln(a+1) - \ln(a)}{(a+1) - a} = \ln(1 + \frac{1}{a})$. Če upoštevamo še, da za $\xi \in (a, a+1)$ velja $\frac{1}{a} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{a+1}$, dobimo:

$$\frac{1}{a} > \ln \frac{a+1}{a} > \frac{1}{a+1}.$$

   (b) Neenakost se dokaže z indukcijo. Indukcijski korak pa gre takole. Če privzamemo, da za nek n neenakost velja, potem lahko s pomočjo zgoraj zapisanega izpeljemo:

$$\ln(n) + 1 + \ln \frac{n+1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} > \ln(n+1) + \ln \frac{n+2}{n+1},$$

$$\ln(n+1) + 1 \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} > \ln(n+2).$$

5. Naj bosta α, β fiksni točki, t.j. $f(\alpha) = \alpha$ in $f(\beta) = \beta$. Po Lagrangeovem izreku obstaja $\xi \in (\alpha, \beta)$, da je

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1.$$

6. Kratek račun pokaže, da sta para odvodov funkcij, ki sestavljata dani enakosti, enaka. To pomeni, da se funkciji razlikujeta le za konstanto. Ker pa je $\arctan 0 = \arcsin 0 = 0$ oziroma $\mathrm{Arsh}(0) = \ln 1 = 0$, sta para funkcij celo enaka.

7. Opazi, da sta odvoda funkcij f in g enaka, od koder sklepaj, da se funkciji na vsakem od intervalov razlikujeta le za konstanto. Pri določanju konstant si pomagaj z vrednostima funkcij v točki $x = 0$, ter limitama, ko gre x proti ∞ oziroma $-\infty$:

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arctan x, & x > 1 \\ \arctan x, & 1 > x > -1 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan x, & x < -1 \end{cases},$$

8. Vse neenakosti dokažemos z uporabo Lagrangeovega izreka:

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y), \qquad x < \xi < y.$$

Nato v primerih (a) in (b) upoštevamo, da je $|(\arctan\xi)'| = |\frac{1}{1+\xi^2}| \leq 1$ in $|(\sin\xi)'| = |\cos\xi| \leq 1$, pri primeru (c) pa $|f'(\xi)| \leq C$ za neko konstanto $C > 0$.

12.3 Odvod - L'Hopitalovo pravilo

1. (a) 0
   (b) 1
   (c) 0
   (d) 0
   (e) 0
   (f) 0
   (g) $\frac{1}{3}$
   (h) $-\frac{1}{2}$
   (i) $-\frac{1}{2}$
   (j) $\frac{1}{3}$
   (k) $\frac{1}{2}$
   (l) $\frac{2}{3}$
   (m) 1
   (n) 0
   (o) $\frac{1}{2}$
   (p) $\frac{1}{3}$
   (q) 1
   (r) 1

2. Vse limite izračunamo s pomočjo L'Hopitalovega pravila; lahko ga uporabimo tudi večkrat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-1)}{2x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x-2} = 0, \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(2x-1)}{2x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x-2} = 1, \\
f'_D(1) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\ln(2x-1)}{2x-2} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2(2x-2)}{2x-1} - 2\ln(2x-1)}{(2x-2)^2} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{-4(2x-2)}{2x-1}}{4(2x-2)} = -1.
\end{aligned}$$

Odtod hitro vidimo, da je f zvezna v $x = 1$, ni odvedljiva v $x = 1$, saj je $f'_L(1) = 1$.

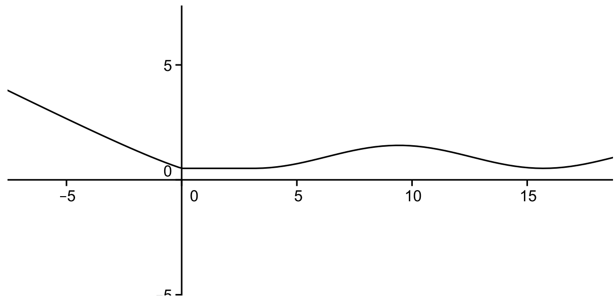
3. $a = -\frac{1}{8}, \quad b = 1, \quad c = -\frac{\pi}{4} - \frac{7}{8}.$

4. Za zvezno odvedljivost v točki π mora enostavno veljati $a+1 = b\pi^2 + c$ in $2b\pi = 0$, odkoder sledi $b = 0$ in $a = -\frac{1}{2}$.

Pri zvezni odvedljivosti v točki $x = 0$ pa si pomagamo L'Hopitalovim pravilom:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}, \\
f'_D(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{dx + \frac{e^x - x - 1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}(d + \frac{e^x - 1}{2x}) = d + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Sedaj hitro dobimo $c = \frac{1}{2}.d = -\frac{1}{2}$.



5. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$,
   $a = -\ln 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \ln 2$,
   $f'_l(1) = -2\ln 2 + \frac{1}{2}$,
   $f'_D(1) = \frac{1}{12}$, (izračunamo po definiciji, kot v nalogah 2 in 4)
   Funkcija pri dobljenih parametrih ni odvedljiva v točki $x = 1$.

6. (a) $a = -2e$, $\qquad \lim_{x\to 1} \frac{e^x + e^{-2x+3} - 2e}{\ln(x)} = -e$,

   (b) $a = -3e$, $\qquad \lim_{x\to 1} \frac{2e^x + e^{-2x+3} + -3e}{(\ln x)^2} = 3e$.

12.4 Odvod - Ekstremi funkcije

1. Vseh primerov se lotimo na enak način. Najprej poiščemo stacionarne točke. Maksimalno in minimalno vrednost funkcije na danem intervalu nato iščemo med vrednostmi, ki jih funkcija zavzame v robnih točkah intervala ali v stacionarnih točkah. Potem premislimo še, kakšen je predznak odvoda med stacionarnimi oziroma robnimi točkami, ter tako določimo intervale naraščanja in padanja oziroma lokalne ekstreme in prevoje.

   (a) Globalna min. $m = f(1) = 1$ in maks. $M = f(3) = 21$.
   Lokalna min. $m_L = f(1) = 1$ in maks $M_L = f(-1) = 5$.

(b) Globalna min. $m = f(-2) = -20$ in maks. $M = f(2) = 12$.
Lokalni min. $m_L = f(1) = 1$ in prevoj v $x_P = 1$.

(c) Globalna min. $m = f(0) = 0$ in maks. $M = f(1) = e$.
Lokalna min. $m_L = f(0) = 0$ in maks. $M_L = f(-2) = 4e^{-2}$.

(d) Globalna min. $m = f(0) = -1$ in maks. $M = f(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12}$.
Lok. min. $m_L = f(\frac{11\pi}{12}) = \frac{11\pi-6\sqrt{3}}{12}$, maks. $M_L = f(\frac{7\pi}{12}) = \frac{7\pi+6\sqrt{3}}{12}$.

2. Opazimo, da je $g'(0) = 2$ in $g'(-2) = -26$. Odtod sklepaj, da ima g' ničlo, t.j. g ima stacionarno točko, na interalu $[-2, 0]$. Z metodo bisekcije dobimo približek stacionarne točke $x_S \approx -0.677$.

3. Naj bosta a in b nenegativni števili z vsoto $a + b = 2015$. Produkt števil v odvisnosti od a je potem $P = a(2015 - a)$, $a \in (0, 2015)$; ta pa doseže maksimum pri $a = \frac{2015}{2}$. Odtod enostavno dobimo še $b = \frac{2015}{2}$.

4. Označimo z r radij osnovne ploskve včrtanega stožca, z v njegovo višino, ter opazimo zvezo $R^2 = (v - R)^2 + r^2$. Volumen včrtanega stožca je potem enak

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi(2Rv^2 - v^3), \qquad v \in (0, 2R).$$

Naprej, z reševanjem enačbe $V' = \frac{1}{3}(4vR - 3v^2) = 0$ dobimo stacionarno točko $v = \frac{4}{3}R$. Ko preverimo še obnašanje funkcije $V(v)$ na robu intervala $(0, 2R)$, lahko zaključimo, da bo volumen stožca največji za $v = \frac{4}{3}R$ oziroma $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

5. Opazi, da velja $R^2 = r^2 + \frac{v^2}{4}$, kjer je r radij osnovne ploskve valja, v pa njegova višina. Nato izpelji, da je volumen včrtanega valja enak

$$V = \pi r^2 v = \pi(R^2 - \frac{v^2}{4})v, \qquad v \in (0, 2R).$$

S pomočjo odvoda nato pokaži, kot v nalogi 4, da bo volumen stožca največji za $v = \sqrt{\frac{4}{3}}R$ oziroma $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

6. Naj bo vrt dimenzij a in b. Količino ograje, ki jo potrebujemo za vrt s površino $ab = 10$ opišemo s funkcijo $l = 2a + b = 2a + \frac{10}{a}$, kjer je $a \in (0, \infty)$. Opazimo, da ima odvod $l' = 2 - \frac{10}{a^2}$ eno samo ničlo (t.j. stacionarna točka za l) v $a = \sqrt{5}$, ter da gre l priti neskončno, ko gre a proti robu intervala $a \in (0, \infty)$. Odtod sklepamo, da potrebujemo najmanj ograje pri $a = \sqrt{5}$ oziroma $b = 2\sqrt{5}$.

7. Naj bo vrt dimenzij a in b. Površino vrta, ki je ograjen z $2a + b = 10$ metri ograje, opišemo s funkcijo $P = a(10 - 2a)$, $a \in (0, 10)$. Odtod pa hitro sledi, da bo površina vrta maksimalna pri $a = \frac{5}{2}$ oziroma $b = 5$.

8. Ploščina včrtanega pravokotnika v odvisnosti od koordinate x je enaka $P = 6x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, $x \in (0, 2)$. Po odvajanju dobimo $P' = 6\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, od koder hitro sledi, da ima funkcija P stacionarno točko $x = \sqrt{2}$. Če gre x proti robu intervala $(0, 2)$, gre ploščina pravokotnika proti nič, zato bo ploščina največja pri $x = \sqrt{2}$.

9. Opazi, da je ploščina včrtanega trikotnika v odvisnosti od koordinate x enaka $P = x(3 - x^2)$, $x \in (0, \sqrt{3})$. S pomočjo odvoda potem, tako kot v nalogi 8, ugotovimo, da nastopi maksimum funkcije P na intervalu $(0, \sqrt{3})$ v $x = 1$.

10. Enakovredno je poiskati minimum kvadrata oddaljenosti točk na paraboli $(x, y) = (x, \sqrt{2x})$ do točke $(2, 0)$, torej

$$D = (x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (x - 2)^2 + 2x, \qquad x \in [0, \infty).$$

Hitro vidimo, da ima D minimum v $x = 1$.

11. Naj bo a stranica osnovne ploskve posode, v pa njena višina. Stroške materiala za posodo z volumnom $a^2v = 1$ v tem primeru opišemo s funkcijo

$$C = 2(a^2 + 4av) + a^2 = 2(a^2 + \frac{4}{a}) + a^2, \qquad a \in (0, \infty).$$

Z reševanjem enačbe $C' = 0$ dobimo stacionarno točko $a_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ za funkcijo C. Ker gre C proti neskončno, če gre a proti robu intervala $(0, \infty)$, je v a_0 dosežen minimum funkcije C na intervalu $(0, \infty)$. Odtod pa zlahka dobimo minimalne stroške izdelave.

12. Naj bo r radij osnovne ploskve lonca, v pa njegova višina. Stroške materiala za posodo z volumnom $\pi r^2 v = 10$ opišemo s funkcijo

$$P = \pi r^2 + 2\pi r v = \pi(\frac{20}{r} + r^2), \qquad r \in (0, \infty).$$

S pomočjo odvoda $P' = 2r - \frac{20}{a^2}$ hitro ugotovimo, da je na intervalu $(0, \infty)$ edina stacionarna točka $a_0 = \sqrt[3]{10}$, kjer je dosežen lokalni minimum funkcije C, saj je $P''(a_0) > 0$. Ker je to tudi edina stacionarna točka, je tu tudi globalni minimum funkcije. Od tod zlahka dobimo minimalno porabo materiala.

13. Stroške izgradnje silosa z radijem kupole r, višino v in volumnom $1000 = \pi r^2 v + \frac{2\pi}{3} r^3$ opišemo s funkcijo

$$C = 2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi r v = \frac{8}{3} r^2 + \frac{2000}{r}, \qquad r \in (0, \infty).$$

S pomočjo odvoda potem podobno kot v nalogi 11 dobimo, da je minimum funkcije dosežen v točki $r_0 = 5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$. Zlahka izračunamo še minimalne stroške izdelave silosa.

14. Naj bo a stranica osnovne ploskve prizme, v pa njena višina. Porabo žice za prizmo z volumnom $\frac{va^2\sqrt{3}}{4} = 2$ opišemo s funkcijo $l = 6a + 3v = 6a + \frac{24}{\sqrt{3}a^2}$, $a \in (0, \infty)$. S pomočjo odvoda, t.j z reševanjem $l' = 6 - \frac{16\sqrt{3}}{a^3} = 0$, dobimo stacionarno točko $a_0 = \frac{2}{\sqrt[6]{3}}$ za l. Ni težko premisliti, da je v a_0 dosežen minimum funkcije l, od tod pa zlahka dobimo minimalno porabo žice. (Glej tudi naloge 11, 12 in 13.)

15. Naj bo a stranica osnovne ploskve piramide, s pa njen stranski rob. Kratek račun pokaže, da lahko volumen piramide, narejene iz $4a + 4s = 4$ metrov žice, opišemo s funkcijo

$$V = \frac{a^2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{2} - 2a + 1}, \qquad a \in (0, \frac{2}{1+\sqrt{2}}).$$

Odvod funkcije V je potem enak $V' = \frac{\frac{3}{2}a^2 - 5a + 2}{3\sqrt{\frac{a^2}{2} - 2a + 1}}$, od koder z reševanjem enačbe $V' = 0$ dobimo rob osnovne ploskve $a_0 = \frac{5-\sqrt{13}}{3}$, pri katerem je volumen piramide največji. (Glej tudi nalogi 7 in 14.)

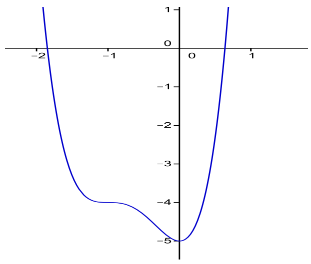
16. Zorni kot v odvisnosti od oddaljenosti mravljice od stene, označimo z x, opišemo s funkcijo $\varphi(x) = \arcsin(x/\sqrt{(x^2+4)(x^2+9)})$, $x \in (0, \infty)$. S pomočjo odvoda

$$\varphi'(x) = \frac{-x^4 + 36}{(x^2+4)(x^2+9)\sqrt{(x^2+4)(x^2+9) - x^2}}$$

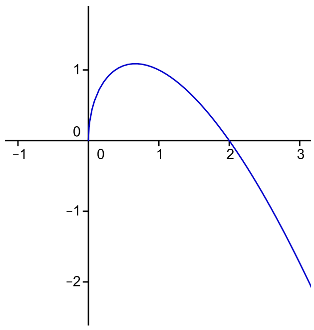
nato dobimo stacionarno točko $x_0 = \sqrt{6}$. Ker se zorni kot manjša, ko se mravljica močno približuje steni ali zelo oddaljuje od stene, mora biti na oddaljenosti x_0 zorni kot res največji.

12.5 Odvod - Grafi funkcij

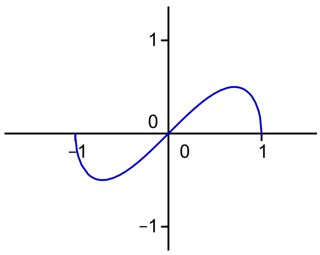
1. (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ekstrem: $x_1 = 1$, prevoja: $x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{3}$



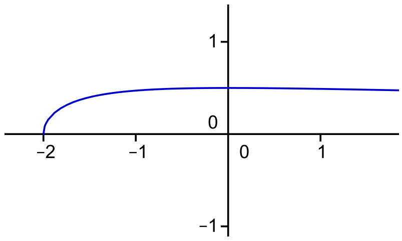
(b) $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$, ekstrem: $x_1 = \frac{2}{3}$



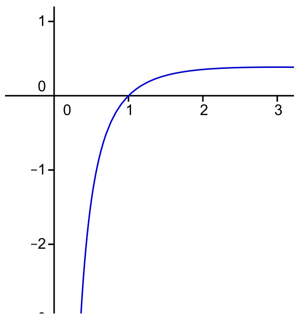
(c) $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$, ekstrema: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, prevoji: $x_3 = 0$, $x_{4,5} = \pm\sqrt{2}3$



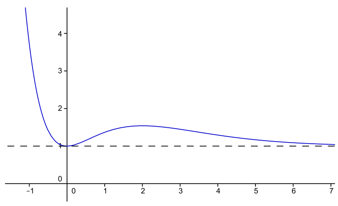
(d) $\mathcal{D}_f = [-2, \infty)$, ekstrem: $x_1 = 0$, prevoj:$x_2 = \frac{4}{3}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$



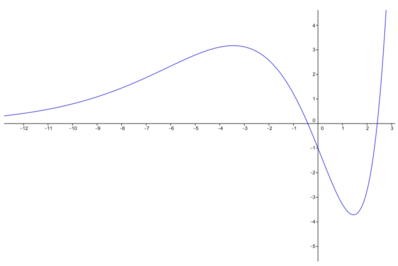
(e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$,



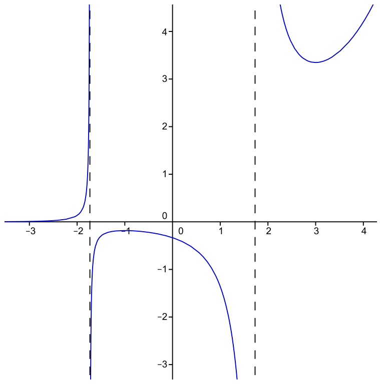
(f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ekstrema: $x_1 = 0, x_2 = 2$, prevoja: $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$



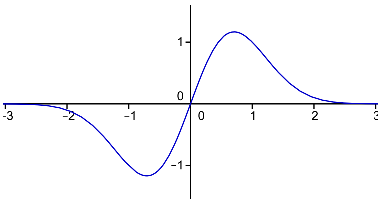
(g) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ekstrema$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$, prevoja: $x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{10}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



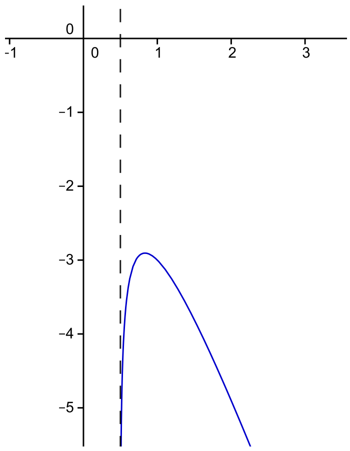
(h) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt[2]{3}\}$, ekstrema: $x_1 = -1, x_2 = 3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



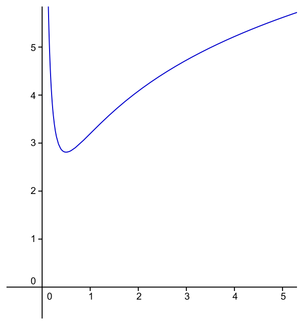
(i) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ekstrema: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, prevoji: $x_{3,4} = \pm\frac{3}{2}$, $x_5 = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$



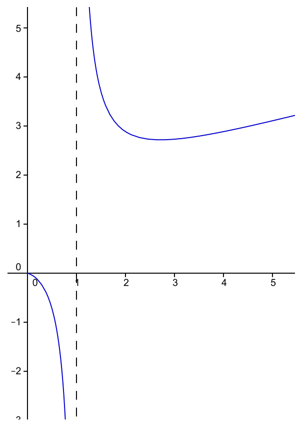
(j) $\mathcal{D}_f = (\frac{1}{2}, \infty)$, ekstrem: $\frac{5}{6}$



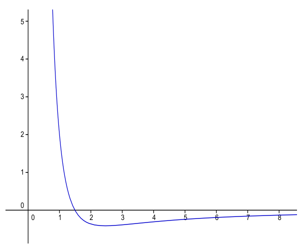
(k) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, ekstrem: $x_1 = \frac{1}{2}$, prevoj: $x_2 = 1$



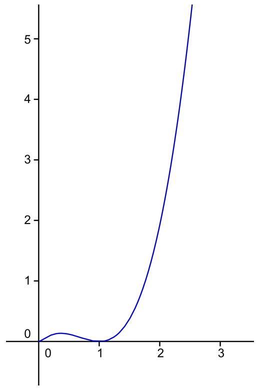
(l) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ \setminus 1$, ekstrem: $x_1 = e$, prevoj: $x_2 = e^{\frac{3}{2}}$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$



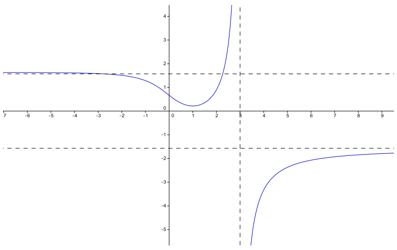
(m) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, ekstrem: $x_1 = e^{\frac{9}{10}}$, prevoj: $e^{\frac{37}{30}}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$



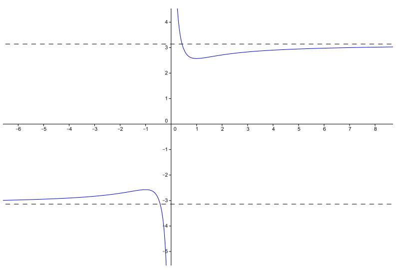
(n) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$, ekstrema: $x_1 = 1$, $x_2 = e^{-1}$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$



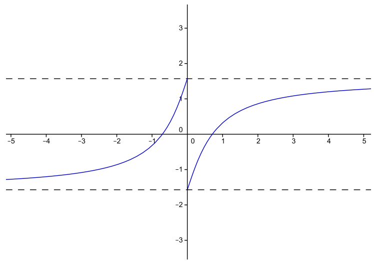
(o) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, ekstrema: $x_1 = 1$, $x_2 = -7$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$



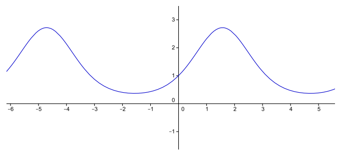
(p) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ekstrema: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, prevoja: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi$



(q) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$



(r) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ekstremi: $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$



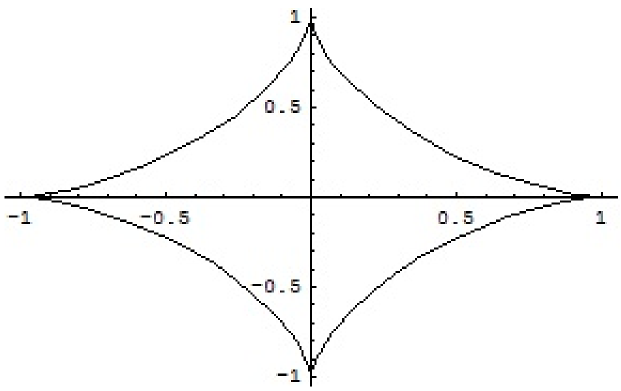
12.6 Odvod - Krivulje v polarni in parametrični obliki

1. Risanja vseh krivulj se lotimo na enak način. Skiciramo grafa koordinat $x(t)$ in $y(t)$ glede na parameter t, t.j. s pomočjo $\dot{x}$ in $\dot{y}$ poiščemo ekstremne točke in intervale naraščanja in padanja; raziščemo obnašanje ob robu definicijskega območja. Koeficient tangente dobimo z $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

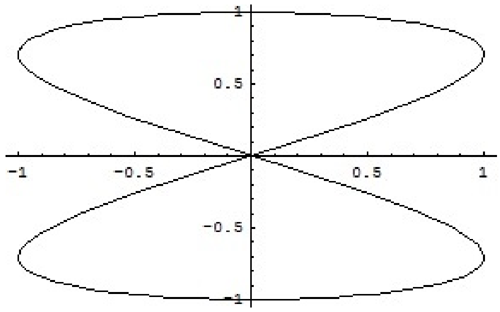
   (a) Opazi, da je dana krivulja elipsa z enačbo $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tangenta v točki $(x(0), y(0)) = (4, 0)$ je $x = 4$.

   (b) Opazi, da je dana krivulja hiperbola z enačbo $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tangenta v točki $(x(0), y(0)) = (\pm 4, 0)$ je $x = \pm 4$.

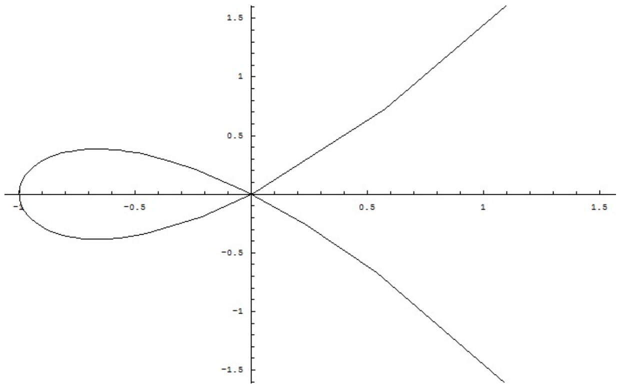
   (c) asteroida



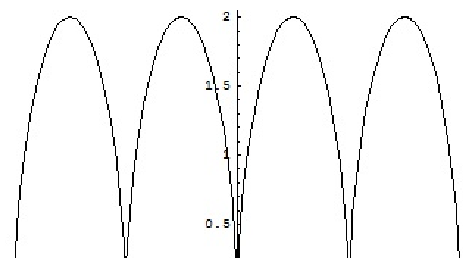
(d) ekstremne točke: $(1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0, \pm 1)$, dvojna točka: $(0,0)$
tangente v točkah $(0,0)$: $y = \frac{x}{2}$ za $t = 0$, ter $y = \frac{x}{2}$ za $t = 2\pi$.



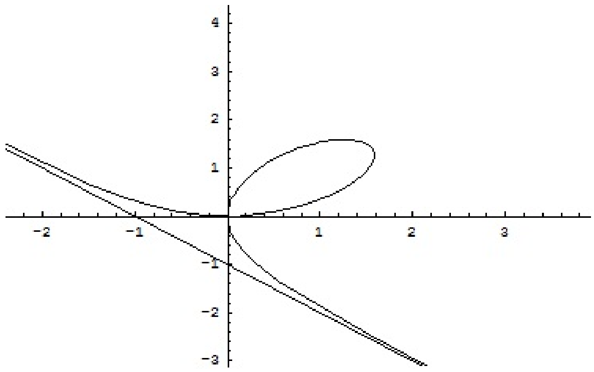
(e) ekstremne točke: $(-1, 0)$ pri $t = 0$, $(-\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{3\sqrt{3}})$ pri $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, dvojna točka: $(0,0)$
tangente v točkah $(-1,0)$: $x = -1$ za $t = 0$; $(0,0)$: $y = \pm x$ za $t = \pm 1$.



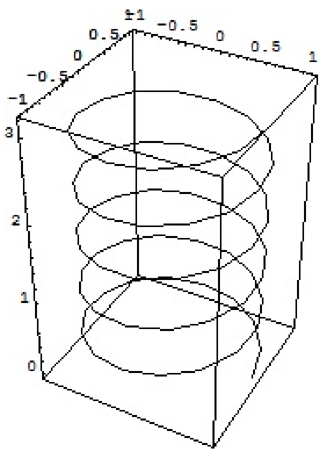
(f) ekstremne točke: $(a(2n+1)\pi, 2a)$, $n \in \mathbb{Z}$,
tangenta v točki $(a\pi, 2a)$: y=2a.
cikloida za $a = 1$:



(g) Če vpeljemo parameter $t = \frac{x}{y}$, dobimo $x = \frac{3at}{1+t^3}$ in $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.
Ekstremni točki: $(\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a)$ pri $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $(\frac{2a}{3}, \frac{4a}{3})$ pri $t = 2$,
dvojna točka: $(0,0)$,
tangenti v $(0,0)$: $x = 0$ in $y = 0$. Descartov list za $a = 1$:

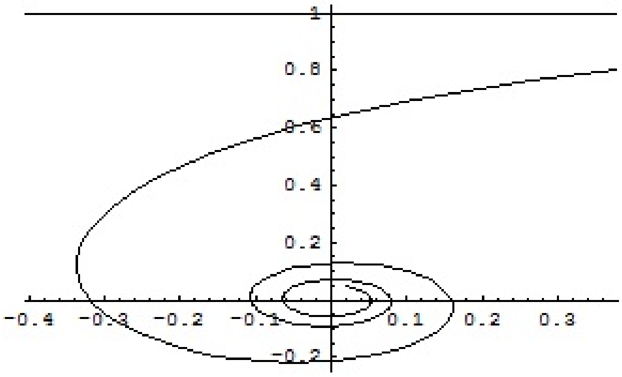


(h) vijačnica za $a = 5$ in $b = \frac{1}{2}$

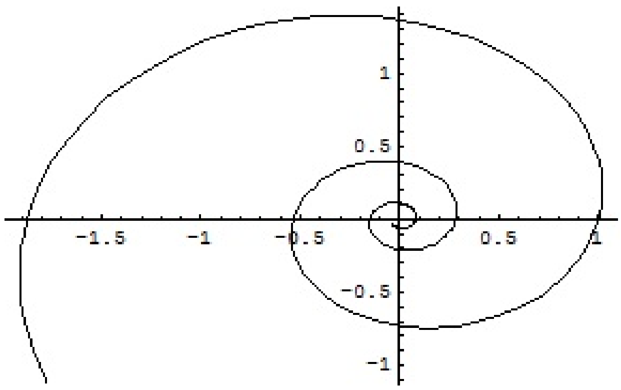


2. Risanja vseh krivulj v polarnih koordinatah se lotimo enako. Skiciramo grafa koordinat $x(\varphi)$ in $y(\varphi)$, ter graf oddaljenosti $r(\varphi)$ glede na polarni kot φ, t.j. s pomočjo odvodov $\dot{x}$, $\dot{y}$ in $\dot{r}$ poiščemo ekstremne točke in intervale naraščanja in padanja; raziščemo obnašanje ob robu definicijskega območja parametra φ. Koeficient tangente na krivuljo pa dobimo s pomočjo $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

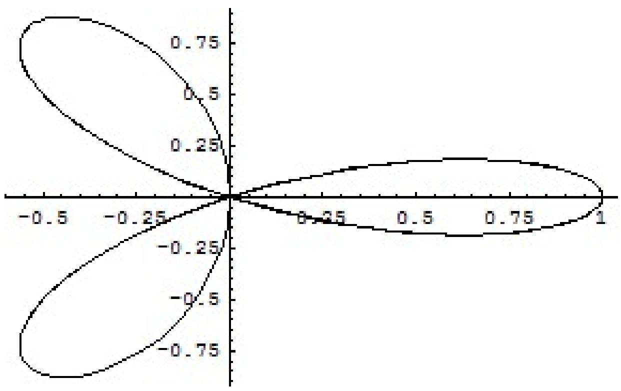
(a) $\lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = 0$, $\lim_{\varphi \to 0} y(\varphi) = a$, $\lim_{\varphi \to 0} x(\varphi) = \infty$.



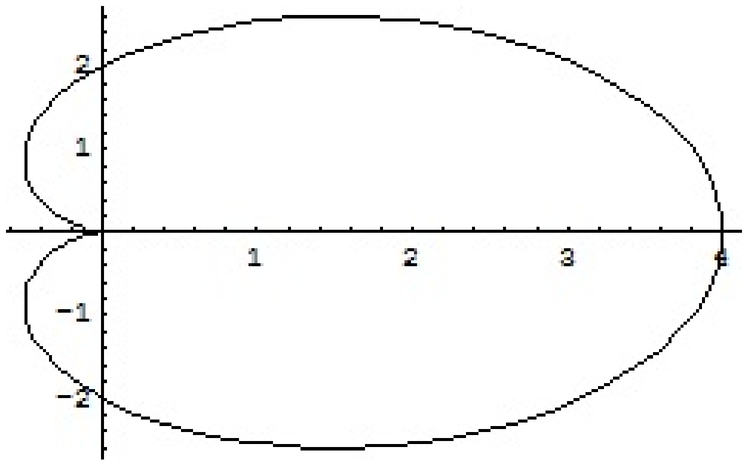
(b) logaritmična spirala



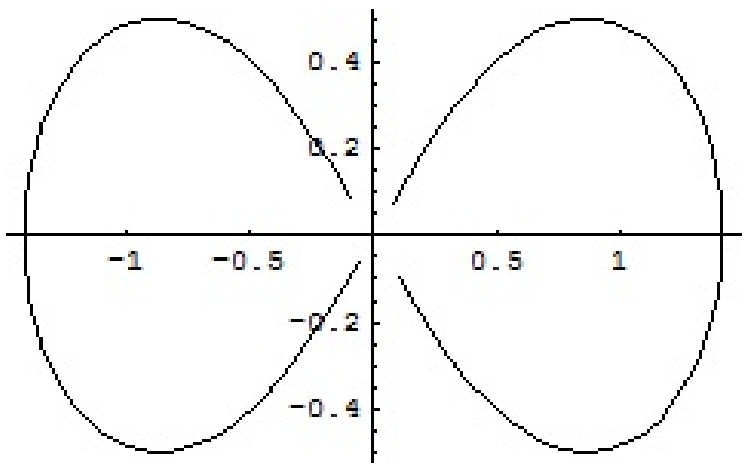
(c) od izhodišča najbolj oddaljene točke: $(1,0)$ pri $\varphi = 0$, $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ pri $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ pri $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.



(d) ekstremne točke: $(2a, 0)$ pri $\varphi = 0$, $(\frac{3a}{4}, \pm\frac{3\sqrt{3}a}{4})$ pri $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$, $(\frac{a}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}a}{4})$ pri $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$,
tangenta v $(2a, 0)$: $x = 2a$ za $\varphi = 0$.



(e) Če vpeljemo polarne koordinate in preuredimo, dobimo enačbo lemniskate v obliki $r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}]$.
ekstremne točke: $(\pm\sqrt{2}a, 0)$ pri $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pm\frac{\pi}{2}$, $(\frac{\sqrt{6}a}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}a}{4})$ za $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$ in $(-\frac{\sqrt{6}a}{4}, \pm\frac{\sqrt{2}a}{4})$ za $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$,
tangenta v točki $(\sqrt{2}a, 0)$: $x = \sqrt{2}a$ pri $\varphi = 0$.
lemniskata za $a = 1$:



12.7 Integral - Nedoločeni integral

1. Vemo, da je F nedoločeni integral za f natanko tedaj, ko je $F' = f$.

   (a) $f(x) = \frac{1}{3}(1 + \cos(\ln))^{-\frac{2}{3}} \sin(\ln x)\frac{1}{x}$,

   (b) $f(x) = 2xe^{x^2} \arctan(x) + \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$.

2. (a) $\frac{\ln(x)\ x^2+\frac{2}{5}\ x^7+\frac{1}{2}\ x^4+2\ x^3-1}{x^2} + c$

   (b) $\frac{-\frac{9}{2}\ \sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{3}\ \sqrt{x^5}-3\ \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)\ x-3}{x} + c$

   (c) $-e^{x+1} + \frac{1}{2}\ e^{2\ x} + c$

   (d) $\frac{1}{7}\ \sin\left(7\ x + \frac{1}{8}\ \pi\right) + c$

3. (a) $\frac{1}{40}\left(2x+1\right)^{20} + c$

   (b) $\frac{3}{2}\ \sin\left(x^2\right) + c$

   (c) $-\frac{\frac{1}{2}\ e}{e^{(x^2)}} + c$

   (d) $\frac{1}{20}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}(2x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

   (e) $\frac{3}{4}(3x^2+2)^{\frac{2}{3}} + c$

   (f) $\frac{1}{3}(2+x^2)^{\frac{3}{2}} - 2(2+x^2)^{(\frac{1}{2})} + c$

   (g) $\frac{\frac{3}{5}\ \ln(x)^2+\frac{3}{2}\ \ln(x)}{\sqrt[3]{\ln(x)}} + c$

   (h) $\frac{2}{15}\sqrt{1+e^x}(3e^{2x} - 4e^x - 22) + c$

   (i) $\arcsin(e^x) + c$

   (j) $-\frac{1}{2}\ \cos^2\left(x\right) + 2\ \cos\left(x\right) - 4\ \ln\left(\cos\left(x\right)+2\right) + c$

   (k) $\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}\sin^{\frac{8}{3}} + c$

   (l) $-\frac{3}{2}\cos^{\frac{2}{3}}(x) + \frac{3}{8}\cos^{(\frac{8}{3})} - \frac{3}{14}\cos^{\frac{14}{3}} + c$

   (m) $\frac{1}{8}(\cos(2x) + 5\ln(3+2\sin(x)) + 6\sin(x)) + c$

   (n) $\frac{1}{2}\ \cos\left(x\right)\ \sin\left(x\right) + \frac{1}{2}\ x + c$

   (o) $\frac{1}{2}(x + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)) + c$

   (p) $\arcsin(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c$

   (q) $\arcsin(\frac{x-1}{2}) + c$

(r) $\frac{1}{2}\ \sqrt{x^2+1}\ x+\frac{1}{2}\ \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+c$

(s) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\ln(x+\sqrt{x^2-4})+c$

(t) $\frac{1}{2}\ \sqrt{x^2+1}\ x-\frac{1}{2}\ \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+c$

4. (a) $e^x\ x-e^x+c$

(b) $-\frac{2}{3}\ \cos(6\ x)\ \ x+\frac{1}{6}\ \cos(6\ x)+\frac{1}{9}\ \sin(6\ x)+c$

(c) $\frac{1}{2}\ \cos(x)\ \sin(x)\ \ x-\frac{1}{4}\ \sin^2(x)+\frac{1}{4}\ x^2+\frac{1}{2}+c$

(d) $x\ln(x)-x+c$,

(e) $\ln(x+1)\ \ x^2-3\ \ln(x+1)\ \ x-4\ \ln(x+1)-\frac{1}{2}\ x^2+4\ x+c$

(f) $\frac{2}{3}\ \sqrt{x^3}\ \ln(2\ x)-\frac{4}{9}\ \sqrt{x^3}+\frac{1}{3}\ \ln(2\ x)\ \ x^3-\frac{1}{9}\ x^3+c$

(g) $(-\frac{2}{3}x^2+x-\frac{5}{27})\ \cos(3\ x)+(\frac{4}{9}x\ -\frac{1}{3})\ \sin(3\ x)+c$

(h) $\frac{-\frac{1}{2}\ x^2+x}{e^{2\ x}}+c$

(i) $\frac{-\frac{2}{3}\ x^2+\frac{5}{9}\ x-\frac{4}{27}}{e^{3\ x}}+c$

(j) Označi $I_n(x)=\int x^n e^{-x}dx$, $n\in\mathbb{N}$ in s pomočjo integracije 'per partes' pokaži zvezo $I_{n+1}(x)=(n+1)x^n e^{-x}+(n+1)I_n(x)$.

(k) $\frac{1}{4}\ \ln(x)^2\ \ x^4-\frac{1}{8}\ \ln(x)\ \ x^4+\frac{1}{32}\ x^4+c$

(l) $-\frac{1}{5}\ e^{2\ x}\ \ \cos(x)+\frac{2}{5}\ e^{2\ x}\ \ \sin(x)+c$

5. (a) $2\ \ln(x+1)+x+c$

(b) $6\ \ln(x+1)+\frac{1}{2}\ x^2-4\ x+c$

(c) $\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ x^3-\frac{1}{2}\ x^2-x+c$

(d) $3\ \arctan(x)+\frac{1}{3}\ x^3+c$

(e) $3\ \ln(x-2)-2\ \ln(x+1)+c$

(f) $4\ \ln(x-1)-\ln(x+1)+x+c$

(g) $\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+c$

(h) $\ln(x-2)-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+c$

(i) $\frac{1}{4}\ \arctan(2\ x)+c$

(j) $2\arctan(x+1)+c$

(k) $2\ \ln(x^2+1)+c$

(l) $\ln(x^2+2\ x+2)+c$

(m) $-\arctan(x+1)+2\ \ln(x^2+2\,x+2)+c$

(n) $\ln(x^2+2\,x+3)-\ln(x+1)+c$

(o) $\ln(x^2+2\,x+3)-\frac{1}{2}\ \ln(2\,x+1)+c$

(p) $\frac{3}{2}\ \arctan\left(\frac{1}{2}\,x\right)+\ln(x^2+4)-2\ \ln(x-1)+c$

(q) $-\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\ \arctan\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{2}\ \ln(x^2-x+1)-\ln(x+3)+c$

(r) $-\frac{11}{5}\ \arctan(x+2)+\frac{1}{5}\ \ln(x^2+4\,x+5)+\frac{8}{5}\ \ln(x)+c$

(s) $\frac{2}{3}\,\sqrt{3}\ \arctan\left(\frac{2\,x-1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}\ \ln(x^2-x+1)+\frac{2}{3}\ \ln(x+1)+c$

(t) Označi $I_n(x)=\int\frac{1}{(1+x^2)^n}dx$, $n\in\mathbb{N}$, ter s pomočjo integracije 'per partes' pokaži zvezo $I_{n+1}(x)=\frac{1}{2n}((2n-1)I_n(x)+\frac{x}{(1+x^2)^n})$.

6. (a) $\frac{3}{2\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{5}}\right)+c$

(b) $-\frac{1}{2}\ \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)-2\right)+\frac{1}{2}\ \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)+2\right)+c$

(c) $-\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)-5\right)+\ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)+1\right)+c$

(d) $2\ \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)+1\right)+c$

7. (a) $5\ \ln(e^x+2)-4\ \ln(e^x+1)+c$

(b) $e^x+\ln(e^x+1)-2\,x+c$

(c) $-\arctan(\ln(x))+\ln(x)+c$

(d) $\frac{1}{4}\ \ln(\sin(x)-2)-\frac{1}{4}\ \ln(\sin(x)+2)+c$

(e) $\frac{1}{2}\ \ln(x+1)\ x^2-3\ \ln(x+1)\ x-\frac{7}{2}\ \ln(x+1)-\frac{1}{4}\,x^2+\frac{7}{2}\,x+c$

(f) $\frac{1}{2}\ \arctan(2\,x)\ x^2+\frac{1}{8}\ \arctan(2\,x)-\frac{1}{4}\,x+c$

(g) $(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6})\ \arctan(3\,x+2)+\frac{1}{9}\ \ln(9\,x^2+12\,x+5)-\frac{1}{6}\,x+c$

(h) $\frac{1}{3}\ \arctan(2\,x)\ x^3+\frac{1}{48}\ \ln(4\,x^2+1)-\frac{1}{12}\,x^2+c$

(i) $-\frac{3}{4}\ \sqrt[3]{x^4}\ \ln(2\,x)+\frac{9}{16}\ \sqrt[3]{x^4}+\frac{1}{4}\ \ln(2\,x)\ x^4-\frac{1}{16}\,x^4+c$

(j) $2\ \sqrt{x}\ e^{\sqrt{x}}-2\ e^{\sqrt{x}}+c$

(k) $\arcsin(x)^2\ x+2\ \sqrt{1-x^2}\ \arcsin(x)-2\,x+c$

(l) Uvedi novo spremenljivko $t=\cos x$.

(m) $-2\sqrt{x^3}\ \cos(\sqrt{x})+12\sqrt{x}\ \cos(\sqrt{x})+6\ \sin(\sqrt{x})\ x-12\ \sin(\sqrt{x})+c$

(n) $e^{\sqrt{x}}(2\ \sqrt{x^5}+40\ \sqrt{x^3}+240\ \sqrt{x}-10\,x^2-120\,x-240)+c$

(o) $\frac{1}{2}\ \ln\left(x^2+1\right)\ x^2+\frac{1}{2}\ \ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\ x^2+c$

(p) $\frac{1}{2}\ \cos\left(\ln\left(x\right)\right)\ x+\frac{1}{2}\ \sin\left(\ln\left(x\right)\right)\ x+c$

8. (a) $A=-5$, $B=-16$, $-5\sqrt{5-2x-x^2}-16\arcsin(\frac{x+1}{\sqrt{6}})$,

   (b) $\frac{1}{3}\sqrt{4+x^2}(-8+6x+x^2)-8\mathrm{Arsh}(\frac{x}{2})$.

9. Pa denimo nasprotno, da obstaja nedoločeni integral F za f, t.j. $F'=f$. To pomeni, da je $F'(x)$ negativen za negativne x (F pada) in pozitiven za pozitivne x (F narašča). Sledi, da ima F minimum v 0, ter $F'(0)=0$, kar pa ne drži.

12.8 Integral - Določeni integral

1. Opazi, da so vse Riemannove oziroma Darbouxjeve vsote konstantne funkcije $f(x)=C$ na intervalu $[a,b]$ enake $C(b-a)$, kar pomeni integrabilnost in $\int_a^b Cdx=C(b-a)$.

   Vzemimo sedaj poljubno delitev $a=x_0<\ldots<x_n=b$ in opazujmo razliko zgornje in spodnje Darbouxjeve vsote funkcije $g(x)=x$. Če je dolžina podintervalov delitve največ $\frac{\epsilon}{b-a}$, potem dobimo

$$\sum_{j=1}^n x_j(x_j-x_{j-1})-\sum_{j=1}^n x_{j-1}(x_j-x_{j-1})<\sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}(x_j-x_{j-1})=\epsilon.$$

   Konstanto ε lahko vzamemo poljubno majhno, kar pomeni, da je g integrabilna. Ker lahko med Darbouxjevi vsoti vrinemo izraz

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(x_{j-1}+x_j)(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(x_j^2-x_{j-1}^2)=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

   je integral funkcije $g(x)=x$ na $[a,b]$ enak $\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

2. (a) Zgornja in spodnja Darbouxjeva vsota za delitev $\mathcal{D}$:
   $S(\mathcal{D},f)=(\frac{1}{2})^3\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}+(\frac{5}{4})^3\cdot\frac{1}{4}+(\frac{8}{5})^3\cdot\frac{7}{20}+2^3\cdot\frac{2}{5}$,
   $s(\mathcal{D},f)=0\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{4}+(\frac{5}{4})^3\cdot\frac{7}{20}+(\frac{8}{5})^3\cdot\frac{2}{5}$.

(b) Zgornja in spodnja darbouxjeva vsota za delitev $\mathcal{D}_n$:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_n,f) &= (\tfrac{2}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}+(\tfrac{4}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}+\ldots+(\tfrac{2n-2}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}+(\tfrac{2n}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}\\ &= \tfrac{2^4}{n^4}\textstyle\sum_{j=1}^{n} j^3=\tfrac{4(n+1)^2}{n^2},\\ s(\mathcal{D}_n,f) &= 0+(\tfrac{2}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}+(\tfrac{4}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}+\ldots+(\tfrac{2n-2}{n})^3\cdot\tfrac{2}{n}^3\\ &= \tfrac{2^4}{n^4}\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} j^3=\tfrac{4(n-1)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Darbouxjeve vsote delitve $\mathcal{D}_n$ gredo proti 4, ko gre $n\to\infty$, torej imamo $\int_0^2 x^3dx=4$.

3. (a) Darbouxjevi vsoti za delitvi $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ izračunaj na enak način kot v nalogi 2. Velja pa $S(\mathcal{D},f)>S(\mathcal{D}',f)>s(\mathcal{D}',f)>S(\mathcal{D},f)$, saj je $\mathcal{D}'$ finejša od $\mathcal{D}$.

   (b) Zgornja in spodnja Darbouxjeva vsota za delitev $\mathcal{D}_n$ je enaka:
   $S(\mathcal{D}_n,f)=\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\sqrt[3]{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[3]{j}$,
   $s(\mathcal{D}_n,f)=\sqrt[3]{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\sum_{j=1}^{n-1}\sqrt[3]{j}$.
   Ko gre $n\to\infty$, gredo dolžine podintervalov delitve $\mathcal{D}_n$ proti nič, Darbouxjeve vsote pa zato proti integralu $\int_0^1\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}$.

4. (a) Darbouxjevi vsoti za delitev $\mathcal{D}$ izračunaj na enak način kot v nalogi 2.

   (b) Darbouxjevi vsoti za delitev $\mathcal{D}_n$ dobimo podobno kot v nalogi 3:
   $S(\mathcal{D}_n,f)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{3n}$,
   $s(\mathcal{D}_n,f)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{3n-2}$.
   Ko gre $n\to\infty$, gredo dolžine podintervalov delitve $\mathcal{D}_n$ proti nič, Darbouxjeve vsote pa zato proti integralu $\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx=\frac{1}{2}\ln 3$.

   (c) Darbouxjevi vsoti za delitev $\mathcal{D}_n$ izračunamo na podoben način kot v nalogi 3:
   $S(\mathcal{D}'_n,f)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$,
   $s(\mathcal{D}'_n,f)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$.
   Jasno velja $S(\mathcal{D}'_n,f)\geq\int_0^1\frac{dx}{1+2x}=\frac{1}{2}\ln(2n+1)\geq s(\mathcal{D}'_n,f)$, odtod pa zlahka izpeljemo željeno neenakost.

5. (a) Zgornja in spodnja Darbouxjeva vsota za delitev $\mathcal{D}$:
   $S(\mathcal{D},f)=1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{7}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1=3$,
   $s(\mathcal{D},f)=1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{7}{6}+1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1=\frac{11}{6}$.

   (b) Opazi, da so vse zgornje Darbouxjeve vsote funkcije g na intervalu $[-1,2]$ enake 3. Nato pa pokaži, da za tako delitev $\mathcal{D}_n$, katere dolžina podintervala s točko 0 je največ $\frac{1}{n}$, velja $s(\mathcal{D}_n,g)\geq 3-\frac{1}{n}$.

6. Ker lahko na vsakem intervalu najdemo tako racionalno kot iracionalno število, so vse zgornje Darbouxjeve na intervalu $[a, b]$ enake $b - a$, vse spodnje Darbouxove vsote pa so enake 0.

7. (a) Zgornja in spodnja Darbouxjeva vsota:
   $S(\mathcal{D}, f) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$,
   $s(\mathcal{D}, f) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

   (b) Naj bo $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ poljubna delitev intervala $[-1, 2]$. Upoštevaj, da je $\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$ natanko takrat, ko je $0 \geq x_{i-1}$, sicer pa je ta infimum enak 1. Podobno je $\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1$ natanko tedaj, ko je $0 < x_i$, sicer pa je ta supremum enak 0. Odtod izpelji, da so vse zgornje Darbouxjeve vsote večje od 2, nekatere pa celo enake 2, vse spodnje Darbouxjeve vsote pa so manjše od 2, vendar se lahko vsaka dovolj fina delitev poljubno približa 2.

8. Vseh limit se lotimo na podoben način; glej tudi naloge 2, 3 in 4. Opazimo, da je izraz pod limito zgornja oziroma spodnja Darbouxjeva vsota ustrezne funkcije f glede na delitev $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1$:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$,

   (b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$,

   (c) $f(x) = e^x$.

9. (a) Posamezen člen v vsoti predstavlja ploščino trapeza z osnovnicama dolžin $f(x_i)$ oziroma $f(x_{i-1})$ ter višino dolžine $(x_i - x_{i-1})$. Jasno je $S(\mathcal{D}, f \geq T(\mathcal{D}, f) \geq s(\mathcal{D}, f)$.

   (b) Kratek račun pokaže trapezno formulo.

   (c) $T(\mathcal{D}, f) = 0.7451$.

10. (a) $F'(x) = -e^{-x^3}$,

    (b) $F'(x) = -2e^{8x^3}$,

    (c) $F'(x) = 2x \sin(x^4)$,

    (d) $F'(x) = 2xf(x)$.

11. $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xe^{1-x^2}dx + \int_1^2 \sin(\frac{\pi x}{2})dx = -\frac{1}{2} + \frac{e}{2} + \frac{2}{\pi}$.

12.9 Integral - Posplošeni integral

1. Pri vseh primerih najprej razmislimo, da je integral res posplošen, nato izračunamo nedoločeni integral in končno izračunamo posplošeni integral, če je to mogoče.

   (a) Pol $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2.$

   (b) Neomejen interval, $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|\Big|_{-\infty}^0=\infty,$

   (c) Neomejen interval, $\int_e^\infty\frac{dx}{x\ln(x)}=-\frac{1}{(\ln x)^2}\Big|_e^\infty=1.$

   (d) Pol $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)\sqrt{1-x}}=\infty$, $\int_0^1\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x}}=2\arctan\sqrt{1-x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$

   (e) Neomejen interval, $\int_0^\infty\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$

   (f) Neomejen interval, $\int_{-\infty}^0 e^{2x}(x^2-2x)dx=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-6x+3)\Big|_{-\infty}^0=\frac{3}{4}$

   (g) Pol $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(3-\ln(x))}=\infty$, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x(3-\ln x)}=-\ln(3-\ln x)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\infty.$

   (h) Pol $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x(3-\ln(x)^2)}=\infty$, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x(3-\ln x)^2}=\frac{1}{3-\ln x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3+\ln 2}.$

   (i) Neomejen interval, $\int_1^\infty\frac{2dx}{x^2-4x+5}dx=2\arctan(x-2)\Big|_1^\infty=\frac{3\pi}{2}.$

   (j) Neomejen interval in pol $\lim_{x\to 0}\frac{2x+5}{x^3-4x^2+5x}=\infty$,
   $\int_1^\infty\frac{2x+5}{x^3-4x^2+5x}dx=4\arctan(x-2)+\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}\Big|_0^\infty=\infty$

2. (a) Ne konvergira; $\int_1^\infty\frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2}}>\int_1^\infty\frac{dx}{3x}=\infty.$

   (b) Ne konvergira; $\int_0^1\frac{e^x dx}{(x-1)^2}>\int_0^1\frac{e dx}{(x-1)^2}=\infty.$

   (c) Ne konvergira; $\int_0^{\pi+2n\pi}\sin(x)dx=2$, $\int_0^{2n\pi}\sin(x)dx=0$, $n\in\mathbb{N}$.

   (d) Konvergira; $y=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ je omejena na $(0,1)$, saj $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

   (e) Ne konvergira; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ oziroma $\frac{\sin x}{x}>\frac{1}{2}$ za ϵ blizu 0; $\int_0^\epsilon\frac{\sin x}{x^2}dx>\frac{1}{2}\int_0^\epsilon\frac{1}{x}dx=\infty.$

   (f) Konvergira; $|\int_0^\infty\frac{\mathrm{arctg}(x)}{(x+2)^3}dx|<\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{1}{(x+2)^3}dx=\frac{\pi}{16}.$

12.10 Integral - Uporaba integrala

1. Pot je $s(t) = \int_1^t v(t')dt' = 4\sqrt{(t+1)^3} + C$. Med tretjo in osmo sekundo avto prevozi pot $s_{3,8} = \int_3^8 v(t')dt' = 4\sqrt{(t+1)^3}\Big|_3^8 = 76$, povprečna hitrost v tem času pa je $\overline{v}_{3,8} = \frac{76}{5}$.

2. (a) $P = \int_{-1}^1 (e^{-x} - 1)dx = e - 2$.
   (b) $P = \int_{-1}^2 ((-x^2 + 2x) - (x^2 - 4))dx = 9$.
   (c) $P = \int_0^1 xe^{x-1}dx = e^{-1}$.
   (d) $P = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2)dx = \frac{5}{12}$.
   (e) $P = \int_{-1}^1 (\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2})dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.
   (f) $P = \int_0^3 \sqrt{3x}dx + \int_{-1}^1 (-x+6)dx = 9\frac{1}{2}$.
   (g) $P = \int_1^e (x \ln x)dx = \frac{1+e^2}{4}$.
   (h) Tangenta na graf $f(x) = \sqrt{x^3}$ v točki $(4, 8)$ je $y = 3x - 4$.
   $P = \int_0^4 \sqrt{x^3}dx - \int_{\frac{4}{3}}^4 (3x - 4)dx = \frac{32}{15}$.
   (i) Tangenta na graf $f(x) = \ln(x) + 1$ v točki $(1, 1)$ je $y = x$.
   $P = \int_0^1 xdx - \int_{e^{-1}}^1 (\ln(x) + 1)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
   (j) Tangenti na graf $f(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ v točkah $(0, 0)$ in $(2, 0)$ sta zaporedoma $y = x$ in $y = -x + 2$.
   $P = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-x+2)dx - \int_0^2 (-\frac{x^2}{2} + x)dx = \frac{1}{3}$.

3. Dolžino grafa funkcije g nad intervalom $[a, b]$ izračunamo po formuli $L = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}dx$.

   (a) $L = 4\sqrt{5} + \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}dx = 4\sqrt{5} + \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.
   (b) $L = \int_{-1}^2 \sqrt{3 - x}dx = \frac{14}{3}$.
   (c) $L = \int_1^e (x + \frac{1}{x})dx = \frac{1+e^2}{4}$.
   (d) $L = \int_{-1}^1 \mathrm{ch}(x)dx = e - e^{-1}$.
   (e) $L = 6 + 3\sqrt{2} + \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{3}{4x}}dx = 6 + 3\sqrt{2} + \frac{3}{4}(2\sqrt{5} + \mathrm{Arsh}(2))$.

4. Volumen vrtenine grafa funkcije g nad intervalom $[a, b]$ izračunamo po formuli $L = \pi \int_a^b (g(x))^2 dx$.

   (a) $V = \pi \int_1^4 \frac{4}{x^4} dx = \frac{21\pi}{16}$.
   (b) $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x-2} dx = \frac{1-e^{-2}}{4}\pi$.
   (c) $V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = (e-2)\pi$.
   (d) $V = \pi \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{32}{3}\pi$.
   (e) $V = \pi \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{\pi^2}{2}$.
   (f) $V = \pi \int_0^4 (2x)^2 dx - \pi \int_0^4 (x\sqrt{x})^2 dx = \frac{64\pi}{3}$.
   (g) $V = \pi \int_0^3 3x dx + \pi \int_3^6 (-x+6)^2 dx = \frac{45\pi}{2}$.
   (h) $V = \pi \int_0^\pi (x \ln x)^2 dx = \pi \frac{\pi(5e^3-2)}{27}$.

5. Površino vrtenine grafa funkcije g nad intervalom $[a, b]$ izračunamo po formuli $L = 2\pi \int_a^b g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2} dx$.

   (a) $P = 4\pi + 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{2} dx = 4\pi + 4\sqrt{2}\pi$.
   (b) $P = 4\pi + 2\pi \int_0^2 \sqrt{2x+1} dx = 4\pi + \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$.
   (c) $P = 2\pi(\int_0^3 \frac{1}{2}\sqrt{12x+9} dx + \int_3^6 \sqrt{2}(-x+6)^2 dx) = \pi(\frac{15\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} + 9\sqrt{2})$.
   (d) $P = 2\pi \int_{-1}^1 (\mathrm{ch}x)^2 dx = \pi(2 + \mathrm{sh}2)$.

6. Izpeljavi formul za volumen oziroma površino stožca in krogelnega odseka sta podobni. Izpeljimo zato le formulo za površino stožca z radijem osnovne ploskve r, višino v in stranskim robom $s = \sqrt{r^2+v^2}$. Tak stožec dobimo kot vrtenino (okrog x-osi) premice $y = \frac{r}{v}x$ nad intervalom $[0, v]$:

$$P = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} x \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}} dx = \pi r s.$$

   Izpeljimo še formulo za volumen V piramide z višino v in ploščino osnovne ploskve O; višina piramide naj bo na x-osi z vrhom v 0. Vemo, da je razmerje ploščin osnovne ploskve in rezine na 'višini' x enako $\frac{x^2}{v^2}$. Za poljubno delitev intervala $[0, v]$: $0 = x_0 < x_1 \ldots < x_n = v$ zato dobimo

$$\sum_{j=1}^n O \frac{x_j^2}{v^2}(x_j - x_{j-1}) < V < \sum_{j=1}^n O \frac{x_j^2}{v^2}(x_j - x_{j-1}).$$

   Izraza zgoraj pa sta ravno Darbouxjevi vsoti funkcije $g(x) = \frac{Ox^2}{v^2}$. Sedaj ni več težko videti, da je potem $V = \int_0^v \frac{O}{v^2} x^2 = \frac{1}{3} O v$.

7. Ploščino izseka, ki ga določa krivulja, podana v polarnih koordinatah oziroma parametrično, izračunamo po formuli

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi, \qquad P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x})dt.$$

Za dolžino krivulje, podane v polarnih koordinatah oziroma parametrično, pa imamo

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}dt, \qquad l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + (\dot{r})^2}d\varphi.$$

(a) $o = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi = \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\mathrm{Arsh}(2\pi)$, $p = \frac{4}{3}\pi^3$.

(b) $o = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)d\varphi = 6$, $p = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)dt = \frac{3\pi}{8}$.

(c) $p = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos(2\varphi)d\varphi = 2a^2$.

(d) $o = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}d\varphi = 8a$, $p = a\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)^2\varphi = \frac{3}{2}a^2\pi$.

12.11 Funkcijska zaporedja in vrste

1. Spomni se, da funkcijsko zaporedje f_n konvergira enakomerno k f natanko tedaj, ko številsko zaporedje $M_n = \sup|f_n - f|$ konvergira k 0. Upoštevaj tudi, da zaporedje zveznih funkcij lahko konvergira enakomerno le v primeru, ko je limitna funkcija zvezna.

(a) konvergira po točkah (ne enakomerno) k $f(x) = x$,
odvodi konvergirajo enakomerno,
integrali konvergirajo

(b) konvergira po točkah (ne enakomerno) k $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$,
odvodi konvergirajo po točkah (ne enakomerno),
integrali konvergirajo.

(c) konvergira po točkah (ne enakomerno) k $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x \neq 0 \end{cases}$,
odvodi ne konvergirajo po točkah,
integrali konvergirajo

(d) konvergira enakomerno k $f(x) = 0$,
odvodi konvergirajo po točkah (ne enakomerno),
integrali konvergirajo.

(e) konvergira po točkah (ne enakomerno) k funkciji $f(x) = 0$,
odvodi ne konvergirajo po točkah,
integrali konvergirajo.

(f) konvergira enakomerno k $f(x) = 0$,
odvodi konvergirajo po točkah (ne enakomerno),
integrali konvergirajo.

(g) konvergira po točkah (ne enakomerno) k funkciji $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & x > 1 \end{cases}$,
odvodi konvergirajo po točkah (ne enakomerno),
integrali konvergirajo.

(h) konvergira po točkah (ne enakomerno) k $f(x) = 0$,
odvodi ne konvergirajo po točkah,
integrali konvergirajo

(i) konvergira po točkah (ne enakomerno) k $f(x) = 0$,
odvodi konvergirajo enakomerno,
integrali konvergirajo.

(j) konvergira enakomerno k $f(x) = 0$,
odvodi ne konvergirajo po točkah,
integrali konvergirajo.

2. (a) $[-1, 1)$,
(b) $(-1, 1)$,
(c) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$,
(d) $\mathbb{R}$,
(e) $(0, \infty)$,
(f) $(1, \infty)$.

3. Pri razvoju danih funkcij v Taylorjevo vrsto si pomagaj si z znanimi razvoji osnovnih elementarnih funkcij v Taylorjevo vrsto. Ko enkrat imaš Taylorjevo vrsto $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, lahko enostavno zapišemo n-ti odvod kot $f^{(n)}(a) = n! a_n$.

(a) $f(x) = 5 + 11\ (x-1) + 9\ (x-1)^2 + 2\ (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^4 (-1)^n \frac{2^n}{n!} (x-2)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

(f) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$, $|x-1| < 1$,
$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, 2^n} (x-2)^n$, $|x-2| < 2$.

(g) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^n$, $|x+1| < 1$.

(h) $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$,
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n$, $|x-1| < 2$.

(j) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$, $|x| < 3$,
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$, $|x-2| < 1$.

(k) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n}$, $|x| < 2$.

(l) Zapiši $\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$, ter vsak člen posebej razvij v vrsto okrog točke -1.

(m) $f(x) = 1 - \frac{1}{3}\, x^2 - \frac{1}{9}\, x^4$, $|x| < 1$.

(n) Najprej razvijemo $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ v Taylorjevo vrsto, ki jo členoma integriramo. Dobimo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

4. Ostanek geometrijske vrste lahko natančno izračunamo, sicer pa si pomagamo z dejstvom, da je ostanek Taylorjeve vrste funkcije $f(x)$ okrog a od vključno n-tega člena naprej enak $R(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$ za nek $\xi \in [a, x]$.

(a) $R = |\frac{x^2}{1-x}| < 1.02 \cdot 10^{-4}, \quad |x| < 0.01$,

(b) $R = \frac{1}{3!}|\sin'''(\xi)|x^3 < 1.6 \cdot 10^{-7}, \quad |\xi| \le |x| < 0.01$,

(c) $R = \frac{1}{4!}|\sin^{(4)}(\xi)|x^4 < 0.0026, \quad |\xi| \le |x| < 0.5$.

5. Izbrati moramo ustrezno funkcijo f in ustrezno točko a, ter upoštevati, da za majhne h velja

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h\frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3.$$

(a) $f(x) = x^{12}$, $a = 1$, $h = -0.01$, $\quad 0,99^{12} \approx 0.8864$,

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $h = 0.01$, $\quad \sqrt{1,01} \approx 1.00499$,

(c) $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$, $h = \frac{\pi}{180}$, $\quad \sin(59^o) \approx 0.8746$,

(d) $f(x) = \arcsin(2x + \ln(1+x))$, $a = 0$, $h = 0.02$,
$\arcsin(0,04 + \ln(1,02)) \approx 0.0598$.

6. (a) 2
(b) 20
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $-\frac{2}{9}$
(e) $\frac{1}{2}$
(f) 0
(g) $-\frac{1}{12\pi^3}$
(h) 0

Literatura

[1] Demidovič B. P.,...in drugi, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike: s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb 1989.

[2] Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, M., Rešene naloge iz analize I, DMFA, Ljubljana 1996.

[3] Mizori-Oblak, P., Matematika za študente tehnike in naravoslovja 1. del, FS UL, Ljubljana 1994.

[4] Starčič, T., Naloge iz osnov matematične analize z rešitvami: učno gradivo, PeF UL, Ljublana, 2015.

[5] Vidav, I., Višja matematika 1, DZS, Ljubljana 1976.