Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Marko Slapar

Funkcije več spremenljivk

Ljubljana, December 2017

Kazalo

POGLAVJE 1

Evklidski prostor $\mathbb{R}^n$

1.1. Topologija $\mathbb{R}^n$

Prostor $\mathbb{R}^n$ sestavljajo urejene n-terice realnih števil $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Dve taki n-terici $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ lahko med seboj seštejemo

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n),$$

definirano pa imamo tudi množenje z realnim skalarjem

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

S tako definiranima operacijama postane $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor, z ničelnim elementom $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Za bazo prostora $\mathbb{R}^n$ običajno vzamemo kar standardno bazo

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Prostor $\mathbb{R}^n$ lahko opremimo tudi s *standardnim skalarnim produktom*

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \cdots x_n y_n,$$

in inducirano *standardno normo*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ta norma nam nadalje na $\mathbb{R}^n$ inducira *standardno metriko*

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

v kateri merimo razdaljo med točkami.

Definicija 1.1. Naj bo $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in $r > 0$. Množico

$$K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\, d(x, a) < r\}$$

imenujemo *odprta krogla* s središčem v a in radijem r, množico

$$\overline{K}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\, d(x, a) \leq r\}$$

pa *zaprta krogla* s središčem v a in radijem r.

Definicija 1.2. Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$. Točka $a \in A$ je *notranja točka* množice A, če obstaja $r > 0$, da je $K(a, r) \subset A$. Množico notranjih točk množice A

označimo z $\operatorname{Int} A$. Točka $c \in \mathbb{R}^n \backslash A$ je *zunanja točka* množice A, če obstaja $r > 0$, da je $K(c, r) \subset \mathbb{R}^n \backslash A$. Označimo jih z $\operatorname{Ext} A$. Točka $b \in \mathbb{R}^n$ je *robna točka* množice A, če za vsak $r > 0$ velja tako $K(b, r) \cap A \neq \emptyset$, kot tudi $K(b, r) \cap \mathbb{R}^n \backslash A \neq \emptyset$. Robne točke množice A označimo z ∂A.

Hitro vidimo, da so zunanje točke množice A ravno notranje točke $\mathbb{R}^n \backslash A$, in da je ∂A sestavljen ravno iz točk, ki niso niti zunanje, niti notranje točke množice A. Za vsako množico $A \subset \mathbb{R}^n$ Velja

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Int} A \cup \partial A \cup \operatorname{Ext} A,$$

kjer gre za disjunktno unijo.

DEFINICIJA 1.3. Množica $D \subset \mathbb{R}^n$ je *odprta množica*, če so vse točke iz D notranje točke, torej $D = \operatorname{Int} D$. Množica $Z \subset \mathbb{R}^n$ je zaprta, če vsebuje vse svoje robne točke, torej $\partial Z \subset Z$.

Množica D je torej odprta natanko tedaj, ko ne vsebuje nobene svoje robne točke, oziroma natanko tedaj, ko je $\mathbb{R}^n \backslash D$ zaprta množica. Podobno je Z je zaprta natanko tedaj, ko je $\mathbb{R}^n \backslash Z$ odprta.

IZREK 1.4. *Za družino vseh odprtih množic v $\mathbb{R}^n$ velja*

(1) $\emptyset$ in $\mathbb{R}^n$ sta odprti množici.
(2) Presek končno mnogo odprtih množic je odprta množica.
(3) Poljubna unija odprtih množic je odprta množica.

DOKAZ. Prva točka sledi direktno iz definicije. Naj bosta A in B odprti množici in $a \in A \cap B$. Ker je a notranja točka za A (A je odprta), obstaja $r_1 > 0$, da je $K(a, r_1) \subset A$, in ker je a notranja točka za B, obstaja $r_2 > 0$, da je $K(a, r_2) \subset B$. Naj bo $r = \min\{r_1, r_2\}$, potem je $K(a, r) \subset A$ in $K(a, r) \subset B$ in zato $K(a, r) \subset A \cap B$. Torej je vsaka točka iz $A \cap B$ notranja točka za $A \cap B$ in je zato $A \cap B$ odprta. Naj bo sedaj A_λ, $\lambda \in \Lambda$ poljubna družina odprtih množic in $a \in \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Potem obstaja $\lambda' \in \Lambda$, da je $a \in A_{\lambda'}$. Ker je $A_{\lambda'}$ odprta, obstaja $r > 0$, da je $K(a, r) \subset A_{\lambda'}$ in zato $K(a, r) \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Vsaka točka iz $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ je torej notranja točka. $\square$

Ker so zaprte množice komplementi odprtih množic, sta torej $\emptyset$ in $\mathbb{R}^n$ zaprti množici, končna unija zaprtih množic zaprta, ter poljuben presek zaprtih množic zaprta množica. Primer odprtih množic so odprte krogle, medtem ko so zaprte krogle zaprte množice. Seveda so množice lahko niti odprte, niti zaprte.

DEFINICIJA 1.5. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$. Množica $U \subset D$ je *relativno odprta* v D, če obstaja taka odprta množica $V \subset \mathbb{R}^n$, da je $U = V \cap D$. Množica

$Z \subset D$ je *relativno zaprta* v D, če obstaja taka zaprta množica $W \subset \mathbb{R}^n$, da je $Z = W \cap D$.

Poglejmo si še definicijo omejenosti množice in definicijo povezanosti.

DEFINICIJA 1.6. Množica $A \in \mathbb{R}^n$ je *omejena*, če obstaja tako število M, da je $|a| \leq M$ za vsak $a \in A$.

DEFINICIJA 1.7. Množica $A \subset \mathbb{R}^n$ je *povezana*, če ne obstajata disjunktni relativno odprti neprazni množici $U, V \subset A$, da velja $A = U \cup V$.

Neprazno povezano odprto množico v $\mathbb{R}^n$ bomo imenovali *območje*.

1.2. Zaporedja in kompaktnost v $\mathbb{R}^n$

DEFINICIJA 1.8. Naj bo $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \ldots$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, pri čemer je $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$.

- Točka $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je limita zaporedja $\{a^{(k)}\}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja N, da je $d(a^{(k)}, a) < \epsilon$, čim je $k \geq N$. Pišemo
$$\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a$$
in rečemo, da zaporedje konvergira proti a.
- Točka $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je stekališče zaporedja $\{a^{(k)}\}$, če za vsak $\epsilon > 0$ velja $d(a^{(k)}, a) < \epsilon$ za neskončno mnogo indeksov k.

TRDITEV 1.9. *Naj bo $\{a^{(k)}\}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$ in $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Potem velja*
$$\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a$$
natanko tedaj, ko za vsak $1 \leq j \leq n$ velja
$$\lim_{k\to\infty} a_j^{(k)} = a_j.$$

DOKAZ. Predpostavimo, da je $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = a$ in naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja N, da je $d(a^{(k)}, a) < \epsilon$, čim je $k \geq N$. Naj bo $1 \leq j \leq n$. Ker je
$$|a_j^{(k)} - a_j| \leq \sqrt{(a_1^{(k)} - a_1)^2 + \cdots + (a_n^{(k)} - a_n)^2} = d(a^{(k)}, a),$$
je tudi $|a_j^{(k)} - a_j| < \epsilon$, čim je $k \geq N$. Torej je $\lim_{k\to\infty} a_j^{(k)} = a_j$.

Poglejmo si še obrat. Naj bo $\lim_{k\to\infty} a_j^{(k)} = a_j$ za vsak $j \leq n$ in naj bo $\epsilon > 0$. Za vsaj j obstaja N_j, da je $|a_j^{(k)} - a_j| < \epsilon/\sqrt{n}$, če je le $k \geq N_j$. Naj bo $N = \max\{N_1, N_2, \ldots N_n\}$. Potem je za $k \geq N$
$$\begin{aligned} d(a^{(k)}, a) &= \sqrt{(a_1^{(k)} - a_1)^2 + \cdots (a_n^{(k)} - a_n)^2} \\ &< \sqrt{\epsilon^2/n + \epsilon^2/n + \cdots + \epsilon^2/n} = \epsilon. \end{aligned}$$

S tem je dokaz končan. $\square$

Zaporedje v $\mathbb{R}^n$ torej konvergira natanko tedaj, ko konvergira vsaka komponenta tega zaporedja. Iz analognega izreka v eni spremenljivki torej takoj dobimo, da vsota dveh konvergentnih zaporedij konvergira proti vsoti limit teh dveh zaporedij. Podobno produkt konvergentnega zaporedja s skalarjem konvergira proti produktu tega skalarja z limito zaporedja.

Trditev 1.10 (Bolzano-Weierstrassov izrek). *Naj bo zaporedje $\{a^{(k)}\} \subset \mathbb{R}^n$ omejeno. Potem obstaja konvergentno podzaporedje zaporedja $\{a^{(k)}\}$.*

Dokaz. Ker je zaporedje $\{a^{(k)}\}$ omejeno, je v $\mathbb{R}$ omejeno zaporedje $\{a_1^{(k)}\}$. Zato obstaja konvergentno podzaporedje $\{a_1^{(k_{i_1})}\}$. Zaporedje $\{a^{(k_{i_1})}\}$ ima zato že konvergentno prvo komponento. Ker je tudi zaporedje $\{a_2^{(k_{i_1})}\}$ omejeno v $\mathbb{R}$, ima konvergentno podzaporedje $\{a_2^{(k_{i_{1_{i_2}}})}\}$. Podzaporedje $\{a^{(k_{i_{1_{i_2}}})}\}$ ima sedaj konvergentni že prvi dve komponenti. S postopkom nadaljujemo, da dobimo podzaporedje, ki ima konvergentne vse komponente. $\square$

Povsem analogno kot pri zaporedjih v $\mathbb{R}$ tudi v $\mathbb{R}^n$ velja, da lahko za vsako stekališče zaporedja najdemo podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira, in da, v primeru, ko ima zaporedje limito, vsako njegovo podzaporedje konvergira proti tej isti limiti. Bolzano-Weierstrassov izrek lahko torej ekvivalentno zapišemo kot: Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima stekališče.

Naj bo sedaj $\{a^{(k)}\}$ zaporedje v $\mathbb{R}^n$, ki je vsebovano v množici A, torej $\{a^{(k)}\} \subset A$. Naj bo a limita tega zaporedja. Točka a ne more biti zunanja točka množice A, saj bi v tem primeru obstajal $r > 0$, da bi bilo celo zaporedje vsebovano v komplementu krogle $K(a,r)$, kar je v protislovju z definicijo limite. Torej je a lahko le robna ali notranja točka množice A. Če je dodatno množica A zaprta, je $a \subset A$, saj je $\partial A \subset A$.

Definicija 1.11. Množica $K \subset \mathbb{R}^n$ je *kompaktna*, če ima vsako zaporedje v K podzaporedje, ki je v K konvergentno (to pomeni, da ima podzaporedje limito, ki je vsebovana v K).

Izrek 1.12. *Množica $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je K zaprta in omejena množica. Naj bo $\{a^{(k)}\}$ zaporedje, ki je vsebovano v K. Ker je K omejena, je zaporedje omejeno, in ima zato konvergentno podzaporedje. Ker je K zaprta množica, je limita tega podzaporedja vsebovana v K

Pokažimo še obrat. Predpostavimo najprej, da K ni omejena. Potem za vsak k obstaja točka $a^{(k)} \in K$, da je $|a^{(k)}| > k$. Zaporedje $\{a^{(k)}\}$ nima nobenega omejenega podzaporedja, zato tudi nima nobenega konvergentnega podzaporedja. Vsaka kompaktna množica je torej omejena. Predpostavimo sedaj, da K ni zaprta. Torej obstaja $a \in \partial K$, $a \notin K$. Za vsak k je presek $K(a, 1/k) \cap K$ neprazen. Za vsak k si zato lahko izberemo točko $a^{(k)} \in K \cap K(a, 1/k)$. Zaporedje $\{a^{(k)}\}$ je konvergentno z limito $a \notin K$, torej nima podzaporedja, ki bi konvergiralo v K. Vsaka kompaktna množica mora torej biti tudi zaprta. □

1.3. Zvezne preslikave

DEFINICIJA 1.13. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$. Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^m$ je *zvezna v točki* $a \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$, za katerega velja $d(x, a) < \delta$, sledi $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Preslikava je *zvezna na* D, če je zvezna v vsaki točki iz D.

Poglejmo si še dve ekvivalentni karakterizaciji zveznosti.

IZREK 1.14. *Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, je zvezna natanko tedaj, ko je za vsako odprto množico $V \subset \mathbb{R}^m$, praslika $f^{-1}(V)$ relativno odprta v D.*

DOKAZ. Naj bo f zvezna in $V \subset \mathbb{R}^m$ odprta. Definirajmo $U = f^{-1}(V)$ in naj bo $a \in U$ poljubna točka. Naj bo ϵ_a tak, da je $K(f(a), \epsilon_a) \subset V$ (tak ϵ_a obstaja, saj je V odprta). Ker je f zvezna v a, obstaja tak δ_a, da je $d(f(x), f(a)) < \epsilon_a$, če je le $x \in D$ in $d(x, a) < \delta_a$. Definirajmo $U' = \cup_{a \in U} K(a, \delta_a)$. Množica U' je odprta v $\mathbb{R}^n$ in $U = D \cap U'$. Torej je U relativno odprta v D.

Pokažimo še obrat. Naj bo $a \in D$ poljubna in $\epsilon > 0$. Ker je $K(f(a), \epsilon)$ odprta v $\mathbb{R}^m$, je $f^{-1}(K(f(a), \epsilon))$ relativno odprta v D, torej obstaja $U' \subset \mathbb{R}^n$ odprta, da je $f^{-1}(K(f(a), \epsilon)) = U' \cap D$. Ker je U' odprta, obstaja $\delta > 0$, da je $K(a, \delta) \subset U'$. Zato je $K(a, \delta) \cap D \subset f^{-1}(K(f(a), \epsilon))$, kar pomeni, da za vsak $x \in D$, $d(a, x) < \delta$ velja, da je $d(f(a), f(x)) < \epsilon$. Preslikava f je zato zvezna v a. Ker je a poljuben, je zvezna na D. □

IZREK 1.15. *Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{a^{(k)}\} \subset D$, ki konvergira proti a, zaporedje $\{f(a^{(k)})\}$ konvergira proti $f(a)$.*

DOKAZ. Naj bo f zvezna v a in $\{a^{(k)}\} \subset D$, ki konvergira proti a. Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$, $x \in D$, sledi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Naj bo N tak, da za vsak $k \geq N$ velja $|a^{(k)} - a| < \delta$. Potem za $k \geq N$ velja

$|f(a^{(k)}) - f(a)| < \epsilon$. Pokažimo še obrat. Predpostavimo, da f ni zvezna v a. Potem obstaja $\epsilon > 0$, tako da za vsak k obstaja taka točka $a^{(k)} \in D$, da je $|a^{(k)} - a| < 1/k$ in hkrati $|f(a^{(k)}) - f(a)| \geq \epsilon$. Zaporedje $\{a^{(k)}\}$ torej konvergira proti a, medtem ko $\{f(a^{(k)})\}$ ne konvergira proti $f(a)$. □

Definicija 1.16. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ in $K \subset D$. Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^m$ je *enakomerno zvezna* na K, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak par točk $x, y \in K$, za katerega velja $d(x, y) < \delta$, sledi $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Z uporabo izreka 1.15, podobno, kot pri funkcijah ene spremenljivke, tudi v več spremenljivkah dokažemo, da je vsota dveh zveznih preslikav zvezna preslikava, da je produkt zvezne preslikave s skalarjem zvezna preslikav, in da je kompozitum primerno definiranih zveznih preslikav zvezna preslikava.

Izrek 1.17. *Naj bo $f : K \to \mathbb{R}^m$ zvezna, kjer je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna množica. Potem je $f(K)$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Naj bo $\{b^{(n)}\}$ poljubno zaporedje v $f(K)$. Za vsak k izberimo $a^{(k)} \in K$, da je $f(a^{(k)}) = b^{(k)}$. Ker je K kompaktna množica, obstaja podzaporedje $\{a^{(k_j)}\}$, ki v K konvergira proti neki točki a. Potem podzaporedje $\{b^{(k_j)}\}$ konvergira proti $f(a)$, ker je f zvezna. □

Izrek 1.18. *Naj bo $f : K \to \mathbb{R}^m$ zvezna, kjer je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna množica. Potem je f na K enakomerno zvezna.*

Dokaz. Recimo, da f ni enakomerno zvezna na K. Potem obstaja $\epsilon > 0$, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstajata točki $x^{(k)}$ in $y^{(k)}$, da velja $|x^{(k)} - y^{(k)}| < 1/k$ in hkrati $|f(x^{(k)}) - f(x^{(k)})| \geq \epsilon$. Ker je K kompaktna, obstaja konvergentno podzaporedje $\{x^{(k_i)}\}$, z limito $x \in K$. Nadalje obstaja konvergentno podzaporedje $\{y^{(k_{i_j})}\}$ zaporedja $\{y^{(k_i)}\}$, ki konvergira proti $y \in K$. Ker velja $|y^{(k_{i_j})} - x^{(k_{i_j})}| \to 0$, je $x = y$. Hkrati pa zaradi zveznosti preslikave f velja $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$, kar je protislovje. □

Izrek 1.19. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}^m$ zvezna, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$ povezana množica. Potem je $f(D)$ povezana množica v $\mathbb{R}^m$.*

Dokaz. Recimo, da $f(D) \subset \mathbb{R}^m$ ni povezana. Torej obstajata odprti množice U' in V' v $\mathbb{R}^m$, da je $f(D) = (U' \cap (f(D))) \cup (V' \cap (f(D)))$, pri čemer gre za disjunktno unijo nepraznih množic. Ker je f zvezna, sta $U = f^{-1}(U')$ in $V = f^{-1}(V')$ relativno odprti, disjunktni neprazni podmnožici v D, da velja $D = U \cup V$. Tako je D nepovezana. □

Vektorske funkcije. V primeru, ko je $D \subset \mathbb{R}$ imenujemo preslikavo $f : D \to \mathbb{R}^n$ *vektorska funkcija.* Za vsak $t \in D$ je $f(t)$ n-terica, ki jo zapišemo v obliki

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)).$$

Zato vsako vektorsko funkcijo lahko zapišemo kot

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n,$$

kjer so $f_1, f_2, \dots, f_n$ običajne funkcije ene spremenljivke, definirane na D. Iz trditev 1.15 in 1.9 takoj vidimo, da je f zvezna natanko tedaj, ko so vse funkcije $f_1, f_2, \dots, f_n$ zvezne.

Primer 1.20. Preslikava $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, definirana kot

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

je zvezna, ker so komponente funkcije $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$ in $f_3(t) = t$ vse zvezne. □

Definicija 1.21. Množica $D \subset \mathbb{R}^n$ je *povezana s potmi*, če za vsaki dve točki $a, b \in D$ obstaja zvezna vektorska funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, tako da je $f([0, 1]) \subset D$ ter $f(0) = a$ in $f(1) = b$.

Izkaže se, da je vsaka množica, ki je povezana s potmi, tudi povezana. Prav tako bi lahko pokazali, da sta za odprte množice povezanost in povezanost s potmi ekvivalentni lastnosti. Za splošne množice pa to ne velja.

Definicija 1.22. Množica $D \subset \mathbb{R}^n$ je *enostavno povezana*, če je povezana s potmi, in če za vsaki dve točki $a, b \in D$ in poljubni dve zvezni vektorski funkciji $f, g : [0, 1] \to D$, $f(0) = a$ in $f(1) = b$ ter $g(0) = a$ in $g(1) = b$ velja, da obstaja zvezna preslikava $F : [0, 1] \times [0, 1] \to D$, da za vsak $t \in [0, 1]$ velja $F(t, 0) = f(t)$ in $F(t, 1) = g(t)$ ter za vsak $s \in [0, 1]$ velja $F(0, s) = a$ in $F(1, s) = b$.

Funkcije več spremenljivk. Funkcije n-spremenljiv so preslikave oblike $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$.

V primeru dveh funkcij n-spremenljivk z istim definicijskim območjem, lahko poleg vsote dveh funkcij definiramo tudi njun produkt in kvocient. Kvocient seveda ni definiran v točkah, kjer delimo z 0. Če sta prvotni funkciji zvezni, sta tudi produkt in kvocient (kjer je seveda definiran) zvezni funkciji. Vse te trditve lahko enostavno dokažemo s pomočjo karakterizacije zveznosti z zaporedji.

Pogosto bomo obravnavali funkcije dveh ali treh spremenljivk. V prvem primeru je $D \subset \mathbb{R}^2$, v drugem pa $D \subset \mathbb{R}^3$. V tem primeru bomo točke iz D

pisali v obliki (x, y) oziroma (x, y, z). Primer funkcije dveh spremenljivk je na primer funkcija $f(x, y) = x^2 \cos(xy)$, primer funkcije treh spremenljivk pa na primer $g(x, y, z) = xe^{yz}$.

PRIMER 1.23. Poglejmo, da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirana kot

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

zvezna povsod.

Preveriti moramo le, da je zvezna v točki $(0, 0)$. Poglejmo si funkcijo v polarnih koordinatah $x = r \cot \phi$, $y = r \sin \phi$. Potem je

$$\frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2r^2 \cos \phi \sin \phi}{r} = r \cos 2\phi.$$

Funkcija je zvezna v $(0, 0)$, ker velja

$$\lim_{r \to 0} r \cos 2\phi = 0$$

□

PRIMER 1.24. Poglejmo si funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirano kot

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Za vse točke oblike $(x, 0)$ je vrednost funkcije f enaka 0. Prav tako za točke oblike $(0, y)$, medtem ko je $f(x, x) = 1/2$ za vsak $x \neq 0$. Funkcija je torej nezvezna v $(0, 0)$, čeprav je njena zožitev tako na horizontalno kot tudi vertikalno os skozi $(0, 0)$ zvezna funkcija. Seveda pa je funkcija zvezna v vseh ostalih točkah. □

Kot posledico izreka 1.17 imamo

IZREK 1.25. *Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna množica. Potem f na K doseže tako maksimalno kot tudi minimalno vrednost.*

DOKAZ. Pokazali smo že, da je $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompaktna. Torej je navzgor omejena in zato obstaja supremum množice $f(K)$. Ker je $f(K)$ tudi zaprta, je supremum vsebovan v K. Podobno pokažemo, da ima f minimum. □

Splošni primer preslikav. V splošnem lahko vsako preslikavo $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, zapišemo v obliki

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m,$$

kjer so $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funkcije n-spremenljivk, definirane na D. Preslikava je zvezna natanko tedaj, ko so vse funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_m$ zvezne.

Primer 1.26. Primer preslikave $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je na primer

$$f(x, y, z) = (y + z, x + z, y + x).$$

Ker so vse tri funkcije $f_1(x, y, z) = y+z$, $f_2(x, y, z) = x+z$, $f_3(x, y, z) = x+y$ zvezne, je preslikava zvezna. $\square$

Če sta $f : D \to \mathbb{R}^k$ in $g : D \to \mathbb{R}^m$ preslikaci, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$ in $D' \subset \mathbb{R}^k$ in velja $f(D) \subset D'$, potem lahko definiramo kompozitum $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$. Če sta obe preslikavi zvezni, bo tudi kompozitum zvezen. Trditev najlažje dokažemo s pomočjo karakterizacije zveznosti z zaporedji: Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje v D z limito a. Potem ima zaradi zveznosti f zaporedje $\{f(a_n)\}$ limito $f(a)$ in potem zaradi zveznosti g zaporedje $\{g(f(a_n))\}$ limito $g(f(a))$. Ker to velja za vsako konvergentno zaporedje v D, je $g \circ f$ zvezna.

POGLAVJE 2

Odvod

2.1. Odvod vektorske funkcije

Naj bo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval. Če so funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ odvedljive v točki $a \in I$, potem je

$$f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_n'(a))$$

odvod funkcije f v točki a.

Fizikalni pomen. Če si predstavljamo, da $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ predstavlja gibanje delca v n-razsežnem prostoru, potem vektor $f'(t_0)$ predstavlja vektor hitrosti delca v točki t_0, dolžina tega vektorja, $|f'(t_0)|$ pa predstavlja skalarno hitrost (brzino) delca.

Primer 2.1. Če se delec v 3-razsežnem hitrosti giblje po poti $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, potem je hitrost delca pri $t_0 = \pi/2$ enaka $(-\sin \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1)$. Smer gibanja delca v tem trenutku je torej v smeri $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, brzina pa je $\sqrt{2}$. □

Geometrijski pomen. Če je $f : I \to \mathbb{R}^n$ odvedljiva na intervalu I, potem je premica

$$f(t_0) + sf'(t_0)$$

tangenta v točki $f(t_0)$ na krivuljo, podano z f.

2.2. Parcialni odvodi funkcije več spremenljivk

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija n-spremenljivk in $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Naj bo $1 \leq k \leq n$. Potem je za majhne t definirana funkcija

$$t \mapsto f(a_1, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Če obstaja odvod te funkcije v točki $t = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t}$$

rečemo, de je f *parcialno odvedljiva* v a po spremenljivki x_k in limito imenujemo *parcialni odvod* f po x_k v točki a. Včasih parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ označimo tudi z $f_{x_k}(a)$ ali $D_k f(a)$.

Primer 2.2. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to R$ podana z $f(x, y) = x^2 y + x^y$. Parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial x}$ v točki $(2, 3)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2xy + yx^{y-1}|_{(x,y)=(2,3)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2^2 = 24,$$

parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}$ v točki $(2, 3)$ pa

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = x^2 + x^y \log x|_{(x,y)=(2,3)} = 2^2 + 2^3 \log 2 = 4 + 8 \log 2.$$

□

Če je $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva po x_k v vsaki točki odprte množice $D \subset \mathbb{R}^n$, potem je $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ zopet funkcija n-spremenljivk, ki jo označimo kar z $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in ji rečemo parcialni odvod f po x_k. Če je $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ nadalje odvedljiva v točki a po neki spremenljivki x_j, $1 \leq j \leq n$, potem označimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k}}{\partial x_j}(a).$$

V primeru, ko je $k = j$, pišemo kar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a).$$

Podobno lahko definiramo iz zapišemo tudi parcialne odvode višjih redov.

Primer 2.3. Poglejmo si vse parcialne odvode drugega reda za funkcijo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 y \cos z + y^2 z e^x$.

Najprej si poglejmo parcialne odvode prvega reda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 y \cos z + y^2 z e^x, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^3 \cos z + 2yze^x, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -x^3 y \sin z + y^2 e^x.
\end{aligned}$$

Parcialni odvodi drugega reda so

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} &= 6xy\cos z + y^2 z e^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3x^2\cos z + 2yze^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= -3x^2 y \sin z + y^2 e^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3x^2\cos z + 2yze^x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} &= 2ze^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} &= -x^3 \sin z + 2yze^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= -3x^2 y \sin z + y^2 e^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= -x^3 \sin z + 2yze^x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} &= -x^3 y \cos z.
\end{aligned}$$

□

V zgornjem zgledu opazimo, da parcialni odvodi komutirajo, saj velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}.$$

Pokažimo, da to velja v splošnem, če predpostavimo določeno zveznost parcialnih odvodov.

IZREK 2.4 (Schwarzov izrek). *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a \in D$ notranja točka. Naj v okolici a obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in naj bosta tam zvezna. Nadalje naj v okolici a obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ in naj bosta zvezna v a. Potem velja*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)$$

DOKAZ. Predpostavimo lahko, da imamo opravka s funkcijo dveh spremenljivk in da je $a = (0, 0)$. Definirajmo

$$F(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0), \quad g(x) = f(x, k) - f(x, 0).$$

Potem je

$$F(h, k) = g(h) - g(0)$$

in po Lagrangeovem izreku

$$F(h,k) = g'(\xi)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,0)\right) h = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\nu)hk$$

kjer sta $\xi \in (0,h)$, $\nu \in (0,k)$. Če vzamemo

$$\tilde{g}(y) = f(h,y) - f(0,y),$$

podobno dobimo

$$F(h,k) = \tilde{g}(k) - \tilde{g}(0)$$

in po Lagrangeovem izreku

$$F(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi',\nu')hk$$

kjer sta $\xi' \in (0,h)$, $\nu' \in (0,k)$. Torej velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi',\nu').$$

Ker sta parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ zvezna v $(0,0)$ dobimo v limiti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

□

Na kratko si poglejmo primer funkcije, ko parcialna odvode ne komutirata. Takšna funkcija seveda ne zadošča predpostavkam zgornjega izreka

Primer 2.5. Vzemimo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirano z

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

V primeru, ko $(x,y) \neq (0,0)$ lahko povsem algebraično izračunamo parcialna odvoda po x in y in dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

V točki $(0,0)$ moramo parcialna odvoda izračunati po definiciji

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Parcialna odvoda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sta oba zvezna v $(0,0)$, kar lahko hitro vidimo z vpeljavo polarnih koordinat. Seveda sta zvezna tudi v okolici točke $(0,0)$. Brez težav lahko algebraično poiščemo tudi druga parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, če $(x,y) \neq (0,0)$, točki $(0,0)$ pa moramo zopet odvoda izračunati po definiciji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1.$$

Torej imamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ seveda nista zvezna v točki $(0,0)$. □

DEFINICIJA 2.6. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, je razreda $\mathcal{C}^k$ na D, če na D obstajajo vsi parcialni odvodi do vključno reda k in so zvezni. Prostor takšnih funkcij označimo z $\mathcal{C}(D)$.

Če je funkcija f razreda $\mathcal{C}^k$, potem nam pri parcialnih odvodih ni potrebno skrbeti glede vrstnega reda odvajanj, če seveda računamo le odvode do vključno reda k. Pomembno je le, koliko krat odvajamo po vsaki od spremenljivk. Parcialne odvode tako pišemo v obliki

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \cdots \partial x_n^{l_n}},$$

kjer je $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = l$ in so $l_, l_2, \cdots, l_n \geq 0$. Če je katera od $l_j = 0$, običajno v imenovalcu pripadajočega člena ne pišemo.

2.3. Diferencial funkcije več spremenljivk

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ in naj obstajajo vsi parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ v neki notranji točki $a \in D$. Potem lahko vse te parcialne odvode zložimo v $1 \times n$ matriko (vrstico)

$$(Df)(a) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)].$$

Predpostavimo, da vsi parcialni odvodi prvega reda obstajajo na okolici a in so v a zvezni, in zaradi enostavnosti predpostavimo, da je $n = 2$. Za majhne

h, k dobimo

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) - f(a, b) =& f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b)\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, \nu)k\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)h\\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, \nu) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)k\\
=& \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k,
\end{aligned}
$$

kjer smo označili $\epsilon_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ in $\epsilon_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, \nu) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Izraz $o = \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$ ni le majhen, če je norma $|(h, k)|$ majhna ampak velja celo

$$
\frac{o}{|(h, k)|} = \frac{\epsilon_1 h + \epsilon_2 k}{|(h, k)|} = \epsilon_1 \frac{h}{|(h, k)|} + \epsilon_2 \frac{k}{|(h, k)|} \xrightarrow[|(h,k)| \to 0]{} 0.
$$

Bolj v splošnem torej dobimo izrek

Izrek 2.7. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ in naj na D obstajajo parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ in naj bodo v a zvezni. Naj bo $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ dovolj majhen vektor. Potem velja*

$$
\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + o(h)\\
&= (Df)(a)h + o(h),
\end{aligned}
$$

kjer velja

$$
\lim_{|h| \to 0} \frac{o}{|h|} = 0.
$$

Izrek nam pove, da v primeru, ko veljajo predpostavke izreka, imamo v okolici točke a aproksimacijo do prvega reda

$$
f(a+h) \approx f(a) + (Df)(a)h.
$$

Definicija 2.8. Naj bo funkcija f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$ in naj obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, da za dovolj majhne $h \in \mathbb{R}^n$ velja aproksimacija

$$
f(a+h) = f(a) + Lh + o(h), \quad o(h)/|h| \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0,
$$

rečemo, da je f *diferenciabilna* v a in L njen *diferencial* v a.

Hitro lahko vidimo, da funkcija ne more imeti dveh različnih diferencialov L_1 in L_2 v točki a, saj velja

$$f(a+h) - f(a) = L_1 h + o_1(h) = L_2 h + o_2(h)$$

in zato

$$(L_1 - L_2)\frac{h}{|h|} = \frac{o_2(h) - o_1(h)}{|h|}.$$

Ker gre izraz na desni proti 0, ko gre $|h|$ proti 0, je $L_1 = L_2$.

TRDITEV 2.9. *Če je f diferenciabilna v točki a z diferencialom L, potem obstajajo vsi parcialni odvodi v točki a in velja $L = (Df)(a)$.*

DOKAZ. Naj bo $L = [L_1, L_2, \ldots, L_n]$ diferencial v točki a in naj bo $1 \leq k \leq n$. Potem je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{L_k t + o(t)}{t} = L_k.\end{aligned}$$

□

Izrek 2.7 nam pove, da je zveznost prvih odvodov v točki a zadosten pogoj za diferenciabilnost, njen diferencial v a pa je $(Df)(a)$. Zvezno odvedljive funkcije na D, to so funkcije razreda $\mathcal{C}^1$, so torej diferenciabilne v vsaki točki iz D. Ni pa nujno, da je vsaka diferenciabilna funkcija tudi zvezno odvedljiva.

PRIMER 2.10. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pokažimo, da je f zvezna povsod, parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah, diferenciabilna, vendar pa njeni parcialni odvodi v točki $(0,0)$ niso zvezni.

Kar se tiče zveznosti, moramo preveriti le zveznost v točki $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, saj je v vseh ostalih točkah očitno zvezna. Naj bo $\epsilon > 0$ poljuben in $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Naj bo $\delta = \sqrt{\epsilon}$. Če je $|(x,y) - (0,0)| < \delta$ je $x^2 + y^2 < \epsilon$ in zato

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}| < \epsilon.$$

Funkcija je torej zvezna tudi v $(0,0)$ in je tako zvezna povsod. Parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ in $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ izračunamo po definiciji

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{|h|} = 0$$

in analogno $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. V vseh drugih točkah parcialna odvoda izračunamo z običajnim odvajanjem. Funkcija f je torej parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah povsod na $\mathbb{R}^2$, njena parcialna odvoda sta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x.y) =\neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x.y) =\neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = 0 \end{cases}$$

Oba parcialna odvoda sta nezvezna v točki $(0,0)$. Če na primer vzamemo $(x,y) = (1/\sqrt{2n\pi},0)$, velja $\frac{\partial f}{\partial x}(1/\sqrt{2n\pi},0) = -1$. Ker gre zaporedje $(1/\sqrt{2n\pi},0)$ proti $(0,0)$ in je $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial x}$ ni zvezen v $(0,0)$. Povsem analogno za $\frac{\partial f}{\partial y}$. Funkcija je v $(0,0)$ diferenciabilna, saj je

$$f(0+h) - f(0) = |h|^2\sin\frac{1}{|h|}, \quad \frac{|h|^2\sin\frac{1}{|h|}}{|h|} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

Opomba 2.11. Obstoj parcialnih odvodov v neki točki ne zagotavlja, da je funkcija v tej točki tudi zvezna. Zelo preprost protiprimer je funkcija dveh spremenljivk, ki je enaka 1 vzdolž obeh koordinatnih osi, povsod drugje pa je enaka 0. Taka funkcija ima oba parcialna odvoda v izhodišču, je pa v izhodišču očitno nezvezna. Če pa je funkcija v točki a diferenciabilna, potem pa je v a zagotovo tudi zvezna, saj velja

$$|f(a+h) - f(a)| = |Lh + o(h)| \leq |Lh| + |o(h)| \to 0,$$

in kot vidimo iz zgornje trditve, v a obstajajo tudi vsi parcialni odvodi.

2.4. Smerni odvodi in gradient

Naj bo $\vec{n}$ enotski vektor v $\mathbb{R}^n$ in funkcija f definirana v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$. Če obstaja limita

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h\vec{n}) - f(a)}{h}$$

ji rečemo *smerni odvod* funkcije f f smeri $\vec{n}$. Parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial k_k}(a)$ torej ni nič drugega, kot smerni odvod v smeri $\vec{n} = e_k = (0,..,0,1,0,\ldots,0)$.

Poglejmo, da smerni odvodi v točki a obstajajo v vsaki smeri, če je funkcija v tej točki diferenciabilna. Še več, lahko jih preprosto izračunamo kot linearno kombinacijo parcialnih odvodov.

Po izreku 2.7 imamo namreč

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\vec{n}) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(Df)(a)\vec{n} + o(h\vec{n})}{h} = (Df)(a)\vec{n}.$$

Ker je

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(a)\right| \leq |(Df)(a)||\vec{n}| = |(Df)(a)|,$$

in enačaj velja (in je odvod pozitiven) natanko tedaj, ko $\vec{n}$ kaže v smeri vektorja

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right),$$

ki mi rečemo gradient funkcije f v točki a. Gradient torej kaže v smeri največjega naraščanja funkcije.

Opomba 2.12. Čeprav je to nekoliko neintuitivno, pa sam obstoj smernih odvodov še ne zagotavlja, da je funkcija v tisti točki sploh zvezna. Primer take funkcije je na primer

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta funkcija v točki $(0,0)$ ni zvezna, vseeno pa ima v točki $(0,0)$ smerne odvode v vseh smereh.

2.5. Jakobijeva matrika odvodov preslikav

Naj bo sedaj $f : D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a \in D$ notranja točka. Naj bo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, kjer so $f_j : D \to \mathbb{R}$ komponente funkcije f. Če za vsak $1 \leq j \leq m$ in vsak $1 \leq k \leq n$ obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $m \times n$ matriko

$$(Df)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

imenujemo *Jakobijeva matrika* ali *matrika odvodov*, ali pa samo *odvod* preslikave f v a.

Iz izreka 2.7 dobimo naslednjo posplošitev

Izrek 2.13. *Naj bo sedaj $f : D \to \mathbb{R}^m$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a \in D$ notranja točka. Naj bodo vsi parcialni odvodi $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ zvezni v a. Potem za dovolj majhne*

$h \in \mathbb{R}^n$ *velja*

$$f(a+h) = f(a) + (Df)(a)h + o(h) \quad \frac{|o(h)|}{|h|} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

DEFINICIJA 2.14. Naj bo funkcija $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a \in D$ notranja točka. Naj obstaja linearna preslikava $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da za dovolj majhne $h \in \mathbb{R}^n$ velja aproksimacija

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(h), \quad |o(h)|/|h| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

rečemo, da je f *diferenciabilna* v a in L njen *diferencial* v a.

Tako kot pri funkcijah, tudi v tem primeru vidimo, da ima preslikava lahko samo en diferencial v vsaki točki in da je le ta enak odvodu funkcije v točki a, in da je v primeru $\mathcal{C}^1$ preslikav odvod $Df(a)$ dejansko diferencial v točki a.

2.6. Verižno pravilo

IZREK 2.15. *Naj bosta $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $g : D' \to \mathbb{R}^k$; kjer je $D \subset \mathbb{R}^n$, $D' \subset \mathbb{R}^m$ in $f(D) \subset D'$. Naj bo $a \in D$ notranja točka D in $f(a)$ notranja točka D'. Naj bo f diferenciabilna v a in g diferenciabilna v $f(a)$. Potem je $g\circ f$ diferenciabilna v a z diferencialom*

$$(D(g\circ f))(a) = (Dg)(f(a))\circ(Df)(a).$$

DOKAZ. Velja

$$f(a+h) = f(a) + (Df(a))h + o(h), \quad |o(h)|/|h| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

in

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + (Dg)(f(a))k + o'(k), \quad |o'(k)|/|k| \xrightarrow[|k|\to 0]{} 0.$$

Vzemimo $k = f(a+h) - f(a)$. Potem je

$$\begin{aligned}
&g(f(a+h)) = g(f(a) + f(a+h) - f(a)) \\
&= g(f(a)) + (Dg)(f(a))(f(a+h) - f(a)) + o'(f(a+h) - f(a)) \\
&= g(f(a)) + (Dg)(f(a))((Df)(a)h + o(h)) + o'(f(a+h) - f(a)) \\
&= g(f(a)) + (Dg)(f(a))(Df)(a)h + (Dg)(f(a))o(h) + o'(f(a+h) - f(a)).
\end{aligned}$$

Velja

$$\frac{(Dg)(f(a))o(h) + o'(f(a+h) - f(a))}{|h|} \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

zato je

$$(Dg\circ f)(a) = (Dg)(f(a))\circ(Df)(a).$$

□

PRIMER 2.16. Naj bo $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ in $g : D' \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}$ in $f(D) \subset D'$. Potem je $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ funkcija ene spremenljivke. Odvod vektorske funkcije f v točki t, $(Df)(t)$, je enak

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix},$$

odvod (Dg) funkcije g pa

$$\left[\tfrac{\partial g}{\partial x_1}, \tfrac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \tfrac{\partial g}{\partial x_n}\right].$$

Zato je

$$(g \circ f)'(t) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) \cdot f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(f(t)) \cdot f_2'(t) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t)) \cdot f_n'(t).$$

2.7. Tangentni prostor na nivojnico

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ funkcija in $c \in \mathbb{R}$. Označimo z

$$M_c = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = c\}.$$

Množico M_c imenujemo nivojnica (nivojska hiperploskev). Naj bo $a \in M_c$ neka točka iz nivojnice in predpostavimo, da je $(\nabla f)(a) \neq 0$. Tangentni prostor na nivojnico M_c v točki a definiramo kot

$$T_a M_c = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ \langle (\nabla f)(a), \vec{v} \rangle = 0\}.$$

Neničeln vektor $\vec{v}$ je torej v $T_a M_c$ natanko tedaj, ko je smerni odvod funkcije f v smeri tega vektorja enak 0.

Poglejmo si še malo drugače, kako lahko dobimo tangentni prostor. Naj bo $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ taka $\mathcal{C}^1$ preslikava, da velja $\gamma((-\epsilon, \epsilon)) \subset M_c$ in $\gamma(0) = a$. Potem je $F(t) = f(\gamma(t)) = c$ za vsak $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in zato

$$0 = F'(0) = (Df)(a) f'(0) = \langle (\nabla f)(a), f'(0) \rangle.$$

Zato lahko tangentni prostor $T_a M_c$ zapišemo tudi kot

$$T_a M_c = \{\gamma'(0),\ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M_c, \gamma(0) = a\}.$$

PRIMER 2.17. Napišimo enačbo tangentne ravnine na kroglo $x^2 + y^2 + y^2 = 1$ v točki $a = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$. Gradient funkcije $f = x^2 + y^2 + y^2$ je $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$. Če vstavimo točko a, dobimo

$$(\nabla f) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}) = (2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{6}).$$

Tangentni prostor torej sestavljajo vektorji $\vec{v} = (v_1, v_2.v_3)$, za katere velja

$$v_1/\sqrt{2} + v_2/\sqrt{3} + v_3/\sqrt{6} = 0.$$

Če si tangentni prostor želimo predstavljati kot afino tangentno ravnino, ki gre skozi točko $a = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6})$, potem je enačba te ravnine

$$x/\sqrt{2} + y/\sqrt{3} + z/\sqrt{6} = 1.$$

□

2.8. Taylorjeva vrsta v več spremenljivkah

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, a notranja točka, in $r > 0$ tak da je $K(a, r) \subset D$. Naj bo $h \in \mathbb{R}^n$ tak, da je $|h| < r$. Potem je $F(t) = f(a + th)$ definirana za vse $t \in (-1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$, če je če ϵ dovolj majhen. Predpostavimo, da je $f \in \mathcal{C}^{k+1}(D)$. Potem je F tudi razreda $\mathcal{C}^{k+1}$ in lahko uporabimo Taylorjev izrek o ostankih

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{k!}F^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\xi),$$

kjer je ξ neka točka v $(0, 1)$. Če uporabimo verižno pravilo, to pomeni

$$\begin{aligned}
&f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)h_2h_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a)h_2h_1 + \cdots\right. \\
&\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a)h_1h_n + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a)h_2h_n + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)h_n^2\right) \\
&+ \frac{1}{3!}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}} h_ih_jh_k + \cdots \\
&+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(a)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_k} \\
&+ \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{k+1}=1}^{n} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{k+1}}}(a+\xi h)h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_{k+1}}
\end{aligned}$$

Če je funkcija $\mathcal{C}^\infty$, lahko napišemo Taylorjevo vrsto v točki a

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(a)(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) + \cdots$$

Podobno kot v eni spremenljivki, v primeru, ko gre ostanek vrste prosti 0, Taylorjeva vrsta konvergira proti funkciji $f(x)$. V primeru, da je to res, rečemo, da je funkcija *analitična*.

Primer 2.18. Razvijmo funkcijo

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = (0,0)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x-y+xy} &= \frac{1}{(1-x)(1-y)} \\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+y+y^2+y^3+\cdots) \\ &= 1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^j y^{k-j}\end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vse točke (x,y), $-1 < x, y < 1$. $\square$

Poglejmo si bolj natančno Taylorjevo aproksimacijo do kvadratnega člena. Predpostavimo, da je f vsaj razreda $\mathcal{C}^2$ in označimo s $\operatorname{Hess} f$ *Hessejevo matriko*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Potem lahko zapišemo Taylorjevo aproksimacijo v obliki

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle (\nabla f)(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a+\xi h)h, h\rangle \\ &= f(a) + \langle (\nabla f)(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle ((\operatorname{Hess} f)(a+\xi h) - (\operatorname{Hess} f)(a))h, h\rangle \end{aligned}$$

Če označimo $o(h) = \frac{1}{2}\langle ((\operatorname{Hess} f)(a+\xi h) - (\operatorname{Hess} f)(a))h, h\rangle$, dobimo

$$f(a+h) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle + o(h)$$

in zaradi zveznosti drugih odvodov velja

$$o(h)/|h|^2 \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

2.9. Lokalni ekstremi

Izrek 2.19. *Če je $f : D \to \mathbb{R}$ v notranji točki $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah in ima v a lokalni ekstrem, potem velja*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Dokaz. Za vsak $k = 1, 2, \dots, n$ ima funkcija $F_k(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n)$ lokalni ekstrem v $t = 0$, kar pomeni $0 = F_k'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$. $\square$

Opomba 2.20. Točko, v kateri so vsi parcialni odvodi enaki 0, imenujemo *stacionarna točka.*

Izrek 2.21. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ v okolici notranje točke a razreda $\mathcal{C}^2$ in naj bo a stacionarna točka. Potem velja*

(i) f ima v a lokalni maksimum, če je $\operatorname{Hess} f(a)$ negativno definitna.
(ii) f ima v a lokalni minimum, če je $\operatorname{Hess} f(a)$ pozitivno definitna.
(iii) f v a nima lokalnega ekstrema, če je $\operatorname{Hess} f(a)$ nedefinitna.

Dokaz. V točki a imamo Taylorjevo aproksimacijo

$$f(a+h) = f(a) + \langle (\nabla f)(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle + o(h),$$

kjer velja

$$o(h)/|h|^2 \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

Ker je a stacionarna točka, je $(\nabla f)(a) = 0$ in torej

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle + o(h), \qquad o(h)/|h|^2 \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0.$$

Naj bo S enotska sfera v $\mathbb{R}^n$. Preslikava $z \mapsto \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)z, z\rangle$ ima maksimum in minimum na S, saj je S kompaktna množica. Če je $\operatorname{Hess} f(a)$ negativno definitna, je maksimum negativen; označimo ga z $-M$. Za vsak $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, velja

$$\frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle = \frac{|h|^2}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h/|h|, h/|h|\rangle \leq -M|h|^2.$$

Ker velja

$$o(h)/|h|^2 \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

obstaja $\delta > 0$, da je $\left|o(h)/|h|^2\right| \leq M/2$, če je le $|h| < \delta$, $h \neq 0$. Potem za vsak $h \neq 0$, $|h| < \delta$ velja

$$\frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle + o(h) \leq -M|h|^2 + M|h|^2/2 \leq -M|h|^2/2$$

in zato

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h, h\rangle + o(h) < f(a).$$

Torej ima f v a lokalni maksimum. Analogno dokažemo točko *ii*).

Predpostavimo sedaj, da je $\operatorname{Hess} f(a)$ nedefinitna. Torej ima $\operatorname{Hess} f(a)$ tako pozitivno lastno vrednost λ_1, kot tudi negativno lastno vrednost λ_2. Naj bo h_1 enotski lastni vektor za lastno vrednost λ_1 in h_2 enotski lastni vektor za lastno vrednost λ_2. Potem je

$$\langle (\operatorname{Hess} f)(a)h_1, h_1\rangle = \lambda_1, \qquad \langle (\operatorname{Hess} f)(a)h_2, h_2\rangle = \lambda_2.$$

Ker velja

$$o(h)/|h|^2 \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0,$$

obstaja $\delta > 0$, da je $\left|o(h)/|h|^2\right| < \min\{\lambda_1, -\lambda_2\}/4$, če je le $|h| < \delta$, $h \neq 0$. Če je torej $0 \neq t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$, velja

$$\begin{aligned} f(a + th_1) &= f(a) + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)th_1, th_1\rangle + o(th_1) \\ &> f(a) + |t|^2\lambda_1/2 - \lambda_1|t^2|/4 > f(a) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} f(a + th_2) &= f(a) + \frac{1}{2}\langle (\operatorname{Hess} f)(a)th_2, th_2\rangle + o(th_2) \\ &< f(a) + |t|^2\lambda_2/2 + \lambda_2|t^2|/4 < f(a). \end{aligned}$$

Torej imamo poljubno blizu a tako točke, v katerih je vrednost funkcije večja od $f(a)$ kot tudi točke, v katerih je vrednost manjša od $f(a)$. $\square$

Ker za 2×2 matrike lahko enostavno preverimo njihovo definitnost, imamo naslednjo direktno posledico izreka v primeru funkcij dveh spremenljivk.

Posledica 2.22. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, v okolici notranje točke a razreda $\mathcal{C}^2$ in naj bo a stacionarna točka. Potem velja*

(i) f ima v a lokalni maksimum, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 > 0$ *in* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(a) < 0$.

(ii) f ima v a lokalni minimum, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 > 0$ *in* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(a) > 0$.

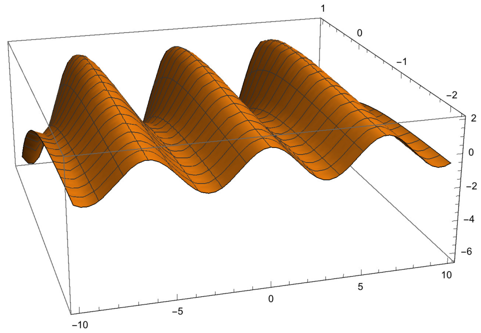
(iii) f v a nima lokalnega ekstrema, če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2 < 0$.

Primer 2.23. Poglejmo si lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definirane kot

$$f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y.$$

Poiščimo najprej stacionarne točke

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -(1 + e^y)\sin x = 0 \implies x = k\pi \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \implies y = -1 + (-1)^k \end{aligned}$$



SLIKA 2.1. $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$

Stacionarne točke so torej točke oblike $(2l\pi, 0)$ in $((2l+1)\pi, -2)$, $l \in \mathbb{Z}$. Hessejeva matrika funkcije $\operatorname{Hess} f(x,y)$ je enaka

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} -(1+e^y)\cos x & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y \cos x - 2e^y - ye^y \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\operatorname{Hess} f(2l\pi, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

negativno definitna, ima funkcija f v vseh točkah $(2l\pi, 0)$ lokalni maksimum. V točkah $((2l+1)\pi, -2)$ je matrika

$$\operatorname{Hess} f((2l+1)\pi, -2) = \begin{bmatrix} 1+e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{bmatrix}$$

nedefinitna, saj ima eno pozitivno in eno negativno lastno vrednost. Zato v teh točkah ni lokalnega ekstrema.

Opazimo, da ima v dveh spremenljivkah funkcija lahko neskončno lokalnih maksimumov in nobenega lokalnega minimuma. To se v eni spremenljivki seveda ne more zgoditi.

□

2.10. Vezani ekstremi

Pri teoriji funkcij ene spremenljivke poiščemo globalne ekstreme funkcije, definirane na kompaktnem intervalu $[a,b]$, tako, da preverimo vrednosti funkcije v stacionarnih točkah iz notranjosti intervala ter vrednosti funkcije v robnih točkah intervala, to je v točkah a in b. Če želimo podoben problem reševati v več dimenzijah, načeloma postopamo podobno. Recimo, da imamo $\mathcal{C}^1$ funkcijo, definirano na zaprti enotski krogli $K \subset \mathbb{R}^3$. Zopet preverimo vrednosti funkcije v stacionarnih točkah v notranjosti krogle, in vrednosti na robu krogle, v tem primeru je to na enotski sferi. Ker za razliko od roba intervala ne moremo kar preprosti preveriti vseh vrednosti na enotski sfere, potrebujemo način, kako poiščemo primerne kandidate za ekstremne vrednosti na enotski sferi. Želimo torej postopek, ki nam bo poiskal kandidate za maksimum in minimum funkcije $f(x, y, z)$ pri dodatni predpostavki (vezi) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Definicija 2.24. Naj bosta funkciji f in g definirani v okolici točke $a \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $g(a) = 0$. Funkcija f ima *lokalni vezani maksimum* pri pogoju $g(x) = 0$ v točki a, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(a) \geq f(x)$ za vsak $x \in \{x \in K(a, \delta), g(x) = 0\}$. Funkcija f ima *lokalni vezani minimum* pri pogoju $g(x) = 0$ v točki a, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(a) \leq f(x)$ za vsak $x \in \{x \in K(a, \delta), g(x) = 0\}$.

Izrek 2.25. *Naj bosta f in g funkciji razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke a, in naj velja $g(a) = 0$ ter $(\nabla g)(a) \neq 0$. Če ima f v a lokalni vezani ekstrem pri pogoju $g(x) = 0$, potem velja*

$$(\nabla f)(a) = \lambda(\nabla g)(a)$$

za nek $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Naj bo $r > 0$ dovolj majhen in označimo $M = \{x \in K(a, r),\ g(x) = 0\}$. Naj bo $v \in T_aM$ tangentni vektor na M v a in $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. Potem ima $f(\gamma(t))$ lokalni ekstrem v $t = 0$, zato je po verižnem pravilu

$$0 = Df(a)\gamma'(0) = \langle(\nabla f)(a), v\rangle.$$

Ker tangentni prostor T_aM sestavljajo točno tisti vektorji, ki so pravokotni na $(\nabla g)(a)$, morata biti $(\nabla g)(a)$ in $(\nabla f)(a)$ vzporedna. □

Posledica 2.26. *Naj bo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^1$, naj bo $M = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$ kompaktna množica in naj za vsak $x \in M$ velja $(\nabla g)(x) \neq 0$. Potem globalni ekstreme funkcije f, zožene na M, dobimo tako, da poiščemo ekstremne vrednoti funkcije f v rešitvah enačb*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\cdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
g(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Primer 2.27. Določimo največjo in najmanjšo vrednot funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

na zaprtem krogu $\overline{K}(0,2)$. Poiščimo najprej stacionarne točke funkcije f v notranjosti kroga.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - 2y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y - 2x = 0.$$

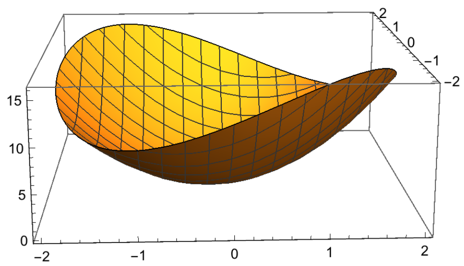
Edina stacionarna točka je $(0,0)$. Sedaj si poglejmo kandidate za ekstreme funkcije f na robu, torej na $S(0,2) = \{(x,y),\, g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0\}$. Rešiti moramo enačbe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - 2y = \lambda 2x = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y - 2x = \lambda 2y = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Da ima linearni sistem

$$(3-\lambda)x - y = 0$$
$$-x + (3-\lambda)y = 0$$

neničelno rešitev ($(0,0)$ ne leži na $S(0,2)$), mora biti determinanta $(3-\lambda)^2-1$ enaka 0, torej $\lambda = 2$ ali $\lambda = 4$. V prvem primeru so rešitve linearnega sistema točke iz premice $y = x$, v drugem primeru pa točke iz premice $y = -x$. Ker moramo zadostiti še enačbi $x^2 + y^2 = 4$, dobimo točke $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ in $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$. Ker je $f(0,0) = 0$, $f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 8$, $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}) = 16$, je maksimum funkcije f na $\overline{K}(0,2)$ enak 16 in je dosežen v robnih točkah $f(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$, minimum funkcije pa 0, dosežen v notranji točki $(0,0)$.



Slika 2.2. $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$

□

POGLAVJE 3

Riemannov integral

3.1. Definicija Riemannovega integrala

Pri definiciji Riemannovega integrala se v eni spremenljivki običajno omejimo na omejene funkcije, definirane na končnem zaprtem intervalu $[a, b]$. Definicijska območja funkcij so v več spremenljivkah precej bolj pestra. Riemannov integral bomo poskusili definirati za omejene funkcije na poljubnih omejenih množicah v $\mathbb{R}^n$. Poglejmo si najprej, kako definiramo Riemannov integral za omejene funkcije, definirane na kvadrih.

Naj bodo $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \ldots, a_n < b_n$ in $L \subset \mathbb{R}^n$ množica oblike

$$L = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq x_n \leq b_n\}.$$

Množici take oblike bomo rekli *zaprt kvader* (če vse $\leq$ zamenjamo z $<$, bomo rekli, da je kvader odprt). Definirajmo volumen kvadra L kot

$$v(L) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Naj bo $f : L \to \mathbb{R}$ omejena funkcija na zaprtem kvadru L. Na vsakem intervalu $[a_i, b_i]$ izberimo delilne točke $a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_{m_i}^{(i)} = b_i$. Tako dobimo $m_1 m_2 \cdots m_n$ manjših zaprtih kvadrov oblike

$$\begin{aligned} L_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \{&(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \\ &x_{i_1-1}^{(1)} \leq x_1 \leq x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2-1}^{(2)} \leq x_2 \leq x_{i_2}^{(2)}, \ldots, x_{i_n-1}^{(n)} \leq x_n \leq x_{i_n}^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Definirajmo

$$\mathcal{D} = \{L_{i_1 i_2 \cdots i_n}; 1 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq m_n\}$$

množice vseh teh kvadrov. Taki množice rečemo *delitev* kvadra L. Seveda dobimo različne delitve pri različnih naborih delilnih točk $x_i^{(i)}$. *Spodnjo Darbouxovo vsoto* za funkcijo L pri delitvi $\mathcal{D}$ definiramo kot

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} m(f, P) v(P),$$

zgornjo Darbouxovo vsoto pa kot

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} M(f, P) v(P),$$

kjer je $m(f,P)$ infimum funkcije f na kvadru P in $M(f,P)$ supremum funkcije f na kvadru P.

DEFINICIJA 3.1. Delitev $\mathcal{D}'$ kvadra L je *finejša* od delitve $\mathcal{D}$ kvadra L, če za vsak $P' \in \mathcal{D}'$ obstaja $P \in \mathcal{D}$, da je $P' \subset P$.

Delitev $\mathcal{D}'$ je torej finejša od delitve $\mathcal{D}$, če so delilne točke, ki določajo delitev $\mathcal{D}$ podmnožica delilnih točk, ki določajo delitev $\mathcal{D}'$, oziroma, če je vsak kvader iz $\mathcal{D}$ unija končno mnogo kvadrov iz $\mathcal{D}'$.

TRDITEV 3.2. *Če je $\mathcal{D}'$ finejša od $\mathcal{D}$, potem velja*

$$s(f,\mathcal{D}') \geq s(f,\mathcal{D}), \quad S(f,\mathcal{D}') \leq S(f,\mathcal{D}).$$

DOKAZ. Naj bo $P \in \mathcal{D}$ poljuben. Potem obstajajo $P_1', P_2', \ldots, P_{k_P}'$ kvadri iz $\mathcal{D}'$, da je $P = P_1' \cup P_2' \cup \cdots \cup P_{k_P}'$. Velja $v(P) = v(P_1') + v(P_2') + \cdots + v(P_{k_P}')$ in $m(f,P_i') \geq m(f,P)$ za vsak $1 \leq i \leq k_P$. Zato je

$$m(f,P)v(P) \leq m(f,P_1')v(P_1') + m(f,P_2')v(P_2') + \cdots + m(f,P_k')v(P_{k_P}').$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{D}) = \sum_{P\in\mathcal{D}} m(f,P)v(P) \leq \sum_{P\in D} &[m(f,P_1')v(P_1') + m(f,P_2')v(P_2') \\ &+ \cdots + m(f,P_k')v(P_{k_P}')] = s(d,\mathcal{D}'). \end{aligned}$$

Dokaz za zgornjo Darbouxovo vsoto je podoben.

□

TRDITEV 3.3. *Naj bosta $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$ poljubni delitvi kvadra L. Potem velja*

$$s(f,\mathcal{D}_1) \leq S(f,\mathcal{D}_2).$$

DOKAZ. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev kvadra L, ki jo dobimo tako, da vzamemo unijo delilnih točk, ki določajo delitvi $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Potem je $\mathcal{D}$ finejša od obeh delitev $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Zato velja

$$s(f,\mathcal{D}_1) \leq s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}_2).$$

□

Definirajmo spodnji in zgornji Darbouxov integral funkcije f na L kot

$$\begin{aligned} s(f,L) &= \sup_{\mathcal{D} \text{ delitev } L} s(f,D), \\ S(f,L) &= \inf_{\mathcal{D} \text{ delitev } L} S(f,D). \end{aligned}$$

Definicija 3.4. Naj bo $f : L \to \mathbb{R}$ omejena funkcija na zaprtem kvadru L. Če velja

$$s(f, L) = S(f, L)$$

rečemo, da je f Riemannovo integrabilna na L in definiramo Riemannov integral f na L kot

$$\int_L f(x)dx = \int_L f(x)dx_1dx_2 \dots dx_n = s(f, L) = S(f, L).$$

Trditev 3.5. *Omejena funkcija $f : L \to \mathbb{R}$ definirana na zaprtem kvadru L je integrabilna na L natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon > 0$ obstaja delitev $\mathcal{D}$ kvadra L, da velja*

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \epsilon.$$

Dokaz. Naj bo f integrabilna na L in I njen integral. Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja delitev $\mathcal{D}_1$, da je $s(f, \mathcal{D}_1) > I - \epsilon/2$ in obstaja delitev $\mathcal{D}_2$, da je $S(f, \mathcal{D}_2) < L + \epsilon/2$. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev, ki jo dobimo iz unije delilnih točk delitev $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Potem je $\mathcal{D}$ finejša od $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Zato velja

$$s(f, \mathcal{D}_1) \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}_2)$$

in zato

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \epsilon.$$

Obratno naj bo $\epsilon > 0$ in $\mathcal{D}$ taka delitev, da je $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \epsilon$. Ker velja

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s(f, L) \leq S(f, L) \leq S(f, \mathcal{D})$$

je

$$S(f, L) - s(f, L) < \epsilon.$$

Ker to velja za vsak ϵ, je $s(f, L) - S(f, L)$. $\square$

Poglejmo si sedaj primer, ko je $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na splošni omejeni množici $K \subset \mathbb{R}^n$. Ker je K omejena, obstaja tak zaprt kvader $L \subset \mathbb{R}^n$, da je $K \subset L$. Definirajmo $\tilde{f} : L \to \mathbb{R}$ kot

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in K \\ 0 & , \ x \in L \backslash K \end{cases}.$$

Če je $\tilde{f}$ Riemannovo integrabilna na L, potem rečemo, da je f Riemannovo integrabilna na K, in definiramo

$$\int_K f(x)dx = \int_K f(x)dx_1dx_2 \dots dx_n = \int_L \tilde{f}(x)dx_1dx_2 \dots dx_n.$$

Z malo truda lahko vidimo, da je ta definicija neodvisna od izbire kvadra, ki vsebuje množico K.

3.2. Integrabilnost funkcij

IZREK 3.6. *Naj bo $f : L \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, definirana na zaprtem kvadru L. Potem je f integrabilna na L.*

DOKAZ. Ker je L kompaktna množica, je f enakomerno zvezna na L. Naj bo $\epsilon > 0$ in naj bo δ tak, da je $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{v(L)}$, če velja $|x - y| < \delta$. Naj bo delitev $\mathcal{D}$ kvadra L taka, da za vsak $P \in \mathcal{D}$ in za vsak par $x, y \in P$ velja $|x - y| < \delta$. Potem velja

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} (M(f, P) - m(f, P)) v(P) < \frac{\epsilon}{v(L)} v(L) = \epsilon.$$

Zato je f integrabilna na L po trditvi 3.5. □

Množice z Lebesgueovo mero 0.

DEFINICIJA 3.7. Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$. Množica E ima Lebesgueovo mero 0, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja števno mnogo zaprtih kvadrov $P_1, P_2, \ldots$ v $\mathbb{R}^n$, da velja $E \subset P_1 \cup P_2 \cup \ldots$ in

$$v(P_1) + v(P_2) + \cdots < \epsilon.$$

OPOMBA 3.8. V definiciji množice z mero 0 bi lahko povsem enako zahtevali, da so kvadri P_i odprti. Naj bo $\epsilon > 0$ in $P_1, P_2, \ldots$ zaprti kvadri, katerih unija vsebuje E, da je vsota njihovih volumnov manjša od $\epsilon/2^n$. Za vsak i naj bo P_i' odprt kvader, ki vsebuje P_i, njegove stranice pa so 2 krat daljše od stranic kvadra P_i. Potem je $v(P_i') = 2^n v(P_i)$ in zato $\sum_i v(P_i') < \epsilon$. Obratno, če so P_i odprti kvadri, ki vsebujejo E, da je vsota njihovih volumnov manjša od ϵ, potem je E vsebovana v uniji zaprtih kvadrov $\overline{P}_i$ z isto vsoto volumnov.

Poglejmo si nekaj primerov množic z Lebesgueovo mero 0. Točka v $\mathbb{R}^n$ ima Lebesgueovo mero 0, saj jo lahko pokrijemo s poljubno majhnim kvadrom.

TRDITEV 3.9. *Naj bodo $E_1, E_2, \ldots$ množice v $\mathbb{R}^n$ z Lebesgueovo mero 0. Potem ima $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ Lebesgueovo mero 0.*

DOKAZ. Naj bo $\epsilon > 0$ in naj bodo za vsak k $P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, \ldots$ kvadri, da je $E_k \subset P_1^{(k)} \cup P_2^{(k)} \cup \ldots$ in $v(P_1^{(k)}) + v(P_2^{(k)}) + \cdots < \epsilon/2^k$. Potem velja

$$E \subset \cup_{j,k} P_j^{(k)}$$

in

$$\sum_{j,k} v(P_j^{(k)}) < \sum_k \epsilon/2^k = \epsilon.$$

□

Ta trditev nam med drugim pove, da ima množica števno mnogo točk v $\mathbb{R}^n$ Lebesgueovo mero 0.

TRDITEV 3.10. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $\phi : D \to \mathbb{R}$ zvezna. Potem ima graf*

$$\Gamma = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R};\ y = \phi(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Lebesgueovo mero 0.

DOKAZ. Množica D je števna unija zaprtih kvadrov $L_1, L_2, \ldots$ (za vsako točko iz D z racionalnimi koordinatami vzamemo po en kvader, ki je še popolnoma vsebovan v D). Za vsak kvader L_k je ϕ enakomerno zvezna na L_k. Naj bo $\delta > 0$ tak, da je $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \frac{\epsilon}{v(L_k)}$ če je $|x_1 - x_2| < \delta$. Naj bo $\mathcal{D}$ taka delitev L_k, da za vsak $P \in \mathcal{D}$ velja $|x_1 - x_2| < \delta$, če $x_1, x_2 \in P$. Kvadri $P \times [m(f, P), M(f, P)]$, $P \in \mathcal{D}$ pokrivajo $\Gamma_k\{(x, y); x \in L_k, y = \phi(x)\}$ in

$$\sum_{P \in \mathcal{D}} v(P \times [m(\phi, P), M(\phi, P)]) < \sum_{P \in \mathcal{D}} v(P) \frac{\epsilon}{v(L_k)} = \epsilon.$$

Torej ima Γ_k mero 0. Ker je $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$ števna unija množic z mero 0, ima Γ mero 0. $\square$

TRDITEV 3.11. *Če ima E Lebesgueovo mero* 0 *in je $E' \subset E$, ima tudi E' Lebesgueovo mero* 0.

DOKAZ. Dokaz direktno sledi iz definicije, ker je vsako pokritje množice E s kvadri tudi pokritje množice E' s temi istimi kvadri. $\square$

Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ funkcija, $K \subset \mathbb{R}^n$. Množici

$$\{x \in K;\ f \text{ ni zvezna v } x\}$$

rečemo množica točk nezveznosti funkcije f.

IZREK 3.12 (Lebesgueov izrek). *Naj bo $f : L \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na zaprtem kvadru L. Potem je f Riemannovo integrabilna na L natanko tedaj, ko ima množica točk nezveznosti funkcije f Lebesgueovo mero* 0.

DOKAZ. Naj bo E množica točk nezveznosti funkcije $f : L \to \mathbb{R}$, in predpostavimo, da je Lebesgueova mera E enaka 0. Naj bodo $L_1, L_2, \ldots$ odprti kvadri v $\mathbb{R}^n$, da velja $E \subset L_1 \cup L_2 \cup \ldots$ in $v(L_1) + v(L_2) + \cdots < \epsilon$. Naj bo $K = Ł \backslash (L_1 \cup Ł_2 \cup \ldots)$. Pokažimo, da obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak par $x \in K$, $y \in L$, $|x - y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Če to ni res, potem obstajata zaporedji $\{x_k\} \subset K$ in $\{y_k\} \subset L$, da velja $|x_k - y_k| < 1/k$ in hkrati $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \epsilon$. Ker je K kompaktna, obstaja podzaporedje $\{x_{x_i}\}$, ki konvergira proti nekemu $x \in K$. Ker je L kompakten, obstaja podzaporedje $\{y_{k_{i_j}}\}$ zaporedja $\{y_{k_i}\}$, ki konvergira proti $y \in L$. Ker $|x_k - y_k| \to 0$, je $x = y$ in ker je f zvezna v x, velja $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$, kar nam skupaj da protislovje. Naj bo sedaj $\mathcal{D}$ taka delitev L, da za vsak $P \in \mathcal{D}$ in vsak par $x, y \in P$ velja $|x - y| < \delta$. Naj bo $\mathcal{D}_1 : \{P \in \mathcal{D};\ P \cap K \neq \emptyset\}$ in $\mathcal{D}_2 = \{P \in \mathcal{D};\ P \cap K = \emptyset.\}$ Naj bo $P \in \mathcal{D}_1$ in z_P neka točka iz $K \cap P$. Za vsak par $x, y \in P$ velja $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z_P)| + |f(z_P) - f(y)| < 2\epsilon$, zato je

$$\sum_{P \in \mathcal{D}_1} (M(f, P) - m(f, P))v(P) < 2\epsilon v(L).$$

Ker je skupna vsota volumnov vseh kvadrov iz $\mathcal{D}_2$ manjša od ϵ, saj so vsebovani v $L_1 \cup L_2 \cup \ldots$, velja

$$\sum_{P \in \mathcal{D}_2} (M(f, P) - m(f, P))v(P) < (M - m)\epsilon,$$

kjer je $M = \sup_L f$ in $m = \inf_L f$. Zato je skupaj

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < (2v(L) - M - m)\epsilon.$$

Razliko zgornjih in spodnjih Darbouxovih vsot torej lahko naredimo poljubno majhno, zato je f integrabilna na L.

Poglejmo še obrat. Naj bo f integrabilna na L. Opazimo, da je funkcija f nezvezna v točki $x \in L$ natanko tedaj, ko obstaja $\epsilon > 0$, tako da je $\sup_P f - \inf_P f > \epsilon$ za vsak kvader P, ki vsebuje x. Naj bo

$$E_k = \{x \in L;\ \sup_P f - \inf_P f > 1/k \text{ za vsak kvader } P\text{, ki vsebuje } x\}.$$

Množica točk nezveznosti f je enaka

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Če pokažemo, da je mera vsake od množic E_k enaka 0, potem je mera množice E prav tako enaka 0. Naj bo $\epsilon > 0$ in naj bo $\mathcal{D}$ taka delitev L, da je

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} (M(f, P) - m(f, P))v(P) < \epsilon/k.$$

Če je za $P \in \mathcal{D}$ $P \cap E_k \neq \emptyset$, potem je $M(f, P) - m(f, P) > 1/k$. Vsota volumnov kvadrov P, ki sekajo E_k mora torej biti manjši od ϵ. Tako lahko E_k pokrijemo s končno mnogo zaprtimi kvadri, da je vsota njihovih volumnov manjša od ϵ. S tem smo pokazali, da je mera E_k enaka 0. $\square$

Definicija 3.13. Naj bo K omejena množica v $\mathbb{R}^n$. Če integral

$$v(K) = \int_K 1 dx$$

obstaja, rečemo, da ima K *volumen* $v(K)$.

Omejena množica K ima torej volumen natanko tedaj, ko za zaprt kvader L, ki vsebuje K, obstaja integral

$$\int_L \chi_K(x)dx,$$

kjer je $\chi_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *karakteristična funkcija* množice K,

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in K \\ 0 & , \ x \in \mathbb{R}^n \backslash K \end{cases}.$$

Volumen je seveda enak temu integralu. Po Lebesgueovem izreku je χ_K integrabilna na L natanko tedaj, ko ima množica točk nezveznosti funkcije χ_K Lebesgueovo mero 0. Množica nezveznosti je ravno ∂K. Dokazali smo torej izrek

IZREK 3.14. *Omejena množica K ima volumen natanko tedaj, ko je Lebesgueova mera ∂K enaka* 0.

POSLEDICA 3.15. *Naj bo K omejena množica z volumnom in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija. Potem je f integrabilna na K.*

DOKAZ. Če je $\tilde{f}$ razširitev funkcije f z 0 na kvader L, ki vsebuje K, je množica točk nezveznosti f vsebovana v ∂K. Ker ima ∂K mero 0, je f integrabilna po Lebesgueovem izreku. □

3.3. Lastnosti Riemannovega integrala

TRDITEV 3.16. *Naj bosta omejeni funkciji f in g integrabilni na omejeni množici K in $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem velja*

(i) *$f+g$ integrabilna na K in velja $\int_K (f(x)+g(x))\,dx = \int_K f(x)\,dx + \int_K g(x)\,dx$.*
(ii) *λf je integrabilna na K in velja $\int_K \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_K f(x)\,dx$.*
(iii) *fg je integrabilna na K.*
(iv) *Če velja $f(x) \le g(x)$ za vsak $x \in K$, potem velja $\int_K f(x)\,dx \le \int_K g(x)\,dx$.*
(v) *$|f|$ je integrabilna in velja $\left|\int_K f(x)\,dx\right| \le \int_K |f(x)|\,dx$.*

DOKAZ. Za vse dokaze lahko predpostavimo, da je K zaprt kvader. (i) Naj bo $\mathcal{D}$ = poljubna delitev intervala K. Potem za poljuben $P \in \mathcal{D}$ velja $m(f+g,P) \ge m(f,P) + m(g,P)$ in zato

$$s(f,\mathcal{D}) + s(g,\mathcal{D}) \le s(f+g,\mathcal{D})$$

Podobno velja

$$S(f,\mathcal{D}) + S(g,\mathcal{D}) \ge S(f+g,\mathcal{D})$$

in skupaj

$$S(f,\mathcal{D})+S(g,\mathcal{D})\geq S(f+g,\mathcal{D})\geq s(f+g,\mathcal{D})\geq s(f,\mathcal{D})+s(g,\mathcal{D}).$$

Naj bo $\mathcal{D}_1$ taka delitev, da je $\int_K f(x)\,dx - s(f,\mathcal{D}_1) < \epsilon$ in $S(f,\mathcal{D}_1) - \int_K f(x)\,dx < \epsilon$ in $\mathcal{D}_2$ taka, da je $\int_K g(x)\,dx - s(g,\mathcal{D}_2) < \epsilon$ in $S(g,\mathcal{D}_2) - \int_K g(x)\,dx < \epsilon$ in naj bo D delitev, ki je finejša od obeh delitev $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Potem je $|s(f+g,\mathcal{D}) - \int_K f(x)\,dx - \int_K g(x)\,dx| < S(f,\mathcal{D}) + S(g,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) - s(g,\mathcal{D}) < 2\epsilon$ in podobno $|S(f+g,\mathcal{D}) - \int_K f(x)\,dx - \int_K g(x)\,dx| < S(f,\mathcal{D}) + S(g,\mathcal{D}) - s(f,\mathcal{D}) - s(g,\mathcal{D}) < 2\epsilon$. Ker je ϵ poljuben, je $f+g$ integrabilna, in velja zgornja formula.
(ii) Predpostavimo najprej, da je $\lambda > 0$. Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev K. Ker je $\sup \lambda f = \lambda \sup f$ in $\inf \lambda f = \lambda \inf f$ je

$$s(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda s(f,\mathcal{D}), \qquad S(\lambda f,\mathcal{D}) = \lambda S(f,\mathcal{D})$$

dobimo točko (ii). Podobno dokažemo, če je $\lambda \leq 0$.
(iii) Po Lebesgueovem izreku imata množici nezveznosti funkcij f in g mero 0. Množica točk nezveznosti fg je vsebovana v uniji točk nezveznosti funkcij f in g, in ima zato tudi mero 0. Zato je fg integrabilna.
(iv) Pri vsaki delitvi $\mathcal{D}$ intervala kvadra K velja $s(f,\mathcal{D}) \leq s(g,\mathcal{D})$. Zato velja

$$\int_K f(x)dx = \sup_{\mathcal{D}} s(f,\mathcal{D}) \leq \sup_{\mathcal{D}} s(g,\mathcal{D}) = \int_K g(x)\,dx.$$

(v) Da je $|f|$ integrabilna sledi iz Lebesgueovega izreka. Predpostavimo najprej, da je $\int_K f(x)\,dx > 0$. Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev K. Velja

$$|s(f,\mathcal{D})| = |\sum_P^n m(f,P)v(P)| \leq \sum_P M(|f|,P)v(P) = S(|f|,\mathcal{D}).$$

Zato je

$$\int_K f(x)\,dx = \sup |s(f,D)| \leq \inf S(|f|,\mathcal{D}) = \int_K |f(x)|\,dx.$$

Če je $\int_K f(x)\,dx < 0$, v zgornjem dokazu vzamemo $-f$ namesto f. □

Trditev 3.17. *Naj bo f integrabilna na omejeni množici K z volumnom (∂K ima mero 0) in naj bo $m = \inf f$ in $M = \sup f$.*

(i) Velja

$$mv(K) \leq \int_K f(x)\,dx \leq Mv(K).$$

(ii) Če je K kompaktna in povezana obstaja $\xi \in K$, da velja

$$f(\xi) = \frac{1}{v(K)} \int_K f(x)\,dx.$$

Dokaz. (i) Ker je $m \leq f(x) \leq M$ na K, velja

$$mv(K) = \int_K m\,dx \int_K f(x)\,dx \leq \int_K M\,dx = Mv(K).$$

(ii) Ker je K kompaktna je m minimum in M maksimum f. Iz (i) sledi

$$m \leq \frac{1}{v(K)} \int_K f(x)\,dx \leq M.$$

Ker zvezna funkcija na povezani množici zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom, obstaja tak $\xi \in K$, da velja

$$f(\xi) = \frac{1}{v(K)} \int_K f(x)\,dx.$$

□

Trditev 3.18. *Če je omejena funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ integrabilna na omejeni množici E z Lebesgueovo mero 0, potem je $\int_E f(x)\,dx = 0$.*

Dokaz. Naj bo L zaprt kvader, ki vsebuje E in naj bo $\tilde{f}$ razširitev funkcije f z 0 na L. Ker je f omejena, obstaja M, da je $f(x) \leq M$ za vsak x. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev L. Potem je

$$s(\tilde{f}, \mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{D}} m(\tilde{f}, P)v(P) \leq M \sum_{P \in \mathcal{D}} m(\chi_E, P)v(P).$$

Ker ima E mero 0, noben kvader $P \in \mathcal{D}$ ni ves vsebovan v E, zato je desna stran enaka 0 in je $s(\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq 0$. Če f zamenjamo z $-f$, dobimo enako $s(-\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq 0$. Ker je

$$S(\tilde{f}, D) = -s(-\tilde{f}, \mathcal{D}),$$

dobimo $S(\tilde{f}, \mathcal{D}) \geq 0$ in skupaj

$$s(\tilde{f}, \mathcal{D}) \leq 0 \leq S(\tilde{f}, \mathcal{D}).$$

Torej je $s(\tilde{f}, L) \leq 0$ in $S(\tilde{f}, L) \geq 0$. Ker je f integrabilna, je $s(\tilde{f}, L) = S(\tilde{f}, L) = \int_E f(x)\,dx$, kar pomeni, da je $\int_E f(x)\,dx = 0$. □

Trditev 3.19. *Naj bo $f : K_1 \cup K_2 \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, pri čemer je f integrabilna na K_1, K_2 in $K_1 \cap K_2$. Če ima $K_1 \cap K_2$ Lebesgueovo mero 0, potem velja*

$$\int_{K_1 \cup K_2} f(x)\,dx = \int_{K_1} f(x)\,dx + \int_{K_2} f(x)\,dx.$$

Dokaz. Naj bo L zaprt kvader, ki vsebuje $K_1 \cup K_2$. Naj bo $\tilde{f}$ razširitev funkcije f na L, tako da je $\tilde{f}|_{L \setminus (K_1 \cup K_2)} = 0$. Definirajmo $f_1 = \tilde{f} \cdot \chi_{K_1}$, $f_2 = \tilde{f} \cdot \chi_{K_2}$ in $f_3 = \tilde{f} \cdot \chi_{K_1 \cap K_2}$. Funkcije f_1, f_2, f_3 so definirane na L. Velja

$$\tilde{f} = f_1 + f_2 - f_3$$

in zato

$$\int_L \tilde{f}(x)\,dx = \int_L f_1(x)\,dx + \int_L f_2(x)\,dx - \int_L f_3(x)\,dx,$$

oziroma

$$\int_{K_1\cup K_2} f(x)\,dx = \int_{K_1} f(x)\,dx + \int_{K_2} f(x)\,dx - \int_{K_1\cap K_2} f(x)\,dx.$$

Ker ima $K_1 \cap K_2$ mero 0, velja $\int_{K_1\cap K_2} f(x)\,dx = 0$ in zato

$$\int_{K_1\cup K_2} f(x)\,dx = \int_{K_1} f(x)\,dx + \int_{K_2} f(x)\,dx$$

□

POSLEDICA 3.20. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica z volumnom in $f : K \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na K. Potem je zožitev $f|_{\operatorname{Int} K} : \operatorname{Int} K \to \mathbb{R}$ integrabilna na notranjosti $\int K$ množice K in velja*

$$\int_K f(x)\,dx = \int_{\operatorname{Int} K} f(x)\,dx.$$

DOKAZ. Lebesgueova mera ∂K enaka 0, saj ima po predpostavki K volumen. Ker je ∂K zaprta, je $\partial(K \cap \partial K) \subset \partial K$ in ima zato prav tako mero 0. Torej je $K\setminus \operatorname{Int} K$ omejena množica z volumnom (in mero) 0. Množica $\operatorname{Int} K$ je prav tako omejena množica z volumnom, ker je $\partial(\operatorname{Int} K) \subset \partial K$ in ima zato rob množice $\operatorname{Int} K$ mero 0. Naj bo L zaprt kvader, ki vsebuje K. Naj bo $\tilde{f}_1$ funkcije f na L, da je $\tilde{f}_1|_{L\setminus K} = 0$ in $\tilde{f}_2$ razširitev $f|_{\operatorname{Int} K}$ na L, da je $\tilde{f}_2|_{L\setminus \operatorname{Int} K} = 0$. Po predpostavki ima možica točk nezveznosti funkcije $\tilde{f}_1$, označimo jo z S, Lebesgueovo mero 0. Naj bo $S_1 = S \cap \operatorname{Int} K$ in $S_2 = S \cap \partial K$ Potem je $S = S_1 \cup S_2$ in S_1, S_2 imata obe mero 0. Množica točk nezveznosti funkcije $\tilde{f}_2$ je vsebovana v $S_1 \cup \partial(\operatorname{Int} K)$. Ker imata tako S_1 kot $\partial(\operatorname{Int} K)$ mero 0, je $\tilde{f}_2$ integrabilna na L, zato je $f|_{\operatorname{Int} K}$ integrabilna na $\operatorname{Int} K$. Naj bo $\tilde{f}_3$ razširitev $f|_{K\setminus \operatorname{Int} K}$ na L z 0 na $L\setminus(K\setminus \operatorname{Int} K)$. Množica točk nezveznosti $\tilde{f}_3$ je vsebovana v ∂K, zato ima mero 0. Funkcija $f|_{K\setminus \operatorname{Int} K}$ je torej integrabilna na $K\setminus \operatorname{Int} K$. Zgornja trditev nam sedaj pove, da je

$$\int_K f(x)\,dx = \int_{\operatorname{Int} K} f(x)\,dx + \int_{K\setminus \operatorname{Int} K} f(x)\,dx.$$

Ker je zadnji integral po množici z mero 0, je enak 0. □

3.4. Fubinijev izrek

Naj bo A zaprt kvader v $\mathbb{R}^n$ in B zaprt kvader v $\mathbb{R}^m$. Naj bo $f : A\times B \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, definirana na kvadru $A \times B \subset \mathbb{R}^n$. Točke iz A bomo označevali s spremenljivko x; točke iz B pa s spremenljivko y. Tako bomo za funkcijo f pisali $f(x, y)$. Za vsak $x \in A$ naj bo funkcija $f_x : B \to \mathbb{R}$

definirana kot $f_x(y) = f(x,y)$. Podobno za vsak $y \in B$ definiramo funkcijo $f_y : A \to \mathbb{R}$ z $f_y(x) = f(x,y)$.

IZREK 3.21 (Fubinijev izrek). *Naj bo $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, kjer sta $A \subset \mathbb{R}^n$ in $B \subset \mathbb{R}^m$. Če je za vsak $x \in A$ funkcija $f_x : B \to \mathbb{R}$ integrabilna, velja*

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f_x(y)\,dy\right) dx.$$

Podobno, če je $f_y : A \to \mathbb{R}$ integrabilna za vsak $y \in B$, velja

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \left(\int_A f_y(x)\,dx\right) dy.$$

DOKAZ. Naj bo $\mathcal{D}$ taka delitev kvadra $A\times B$, da velja $S(f,\mathcal{D})-s(f,\mathcal{D}) < \epsilon$. Naj bosta $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$ delitvi kvadrov A in B, tako da je $\mathcal{D} = \{P' \times P'';\ P' \in \mathcal{D}_1, P'' \in \mathcal{D}_2\}$. Izberimo si nek $P' \in \mathcal{D}_1$ in naj bo $a_{P'}$ poljubna točka iz P'. Potem velja

$$m(f, P' \times P'')v(P'') \le \int_{P''} f_{a_{P'}}(y)\,dy \le M(f, P' \times P'')v(P''),$$

saj je $m(f, P' \times P'') \le f(a_{P'}, y) \le M(f, P' \times P'')$ za vsak $y \in P''$. Zato je

$$\sum_{P''\in\mathcal{D}_2} m(f, P'\times P'')v(P'\times P'') \le \left(\int_B f_{a_{P'}}(y)\,dy\right) v(P') \le \sum_{P''\in\mathcal{D}_2} M(f, P'\times P'')v(P'\times P'').$$

Če seštejemo še po vseh kvadrih iz $\mathcal{D}_1$ dobimo

$$s(f,\mathcal{D}) \le \sum_{P'\in\mathcal{D}_1} \left(\int_B f_{a_{P'}}(y)\,dy\right) v(P') \le S(f,\mathcal{D}).$$

Ker velja

$$m\left(\int_B f_x(y)\,dy, P'\right) = \inf_{a_{p'}\in P'} \int_B f_x(y)\,dy$$

in

$$M\left(\int_B f_x(y)\,dy, P'\right) = \sup_{a_{p'}\in P'} \int_B f_x(y)\,dy,$$

smo s tem pokazali

$$s(f,\mathcal{D}) \le s\left(\int_B f_x(y)\,dy, \mathcal{D}_1\right) \le S\left(\int_B f_x(y)\,dy, \mathcal{D}_1\right) \le S(f,\mathcal{D}).$$

Zato je $x \mapsto \int_B f_x(y)\,dy$ integrabilna na A in njen integral je enak

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Povsem analogno pokažemo drugo enakost. $\square$

POSLEDICA 3.22. *Naj bo $f : A \times B \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer sta $A \subset R^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ zaprta kvadra. Potem velja*

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right)\,dy.$$

PRIMER 3.23. Izračunajmo integral

$$\int_K \frac{x}{x^2+y^2},$$

kjer je $K = [0,1] \times [1,2]$. Ker je funkcija zvezna na K, je integrabilna. Fubinijev izrek nam reče, da je

$$\int_K \frac{x}{x^2+y^2} = \int_{[1,2]} \left(\int_{[0,1]} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx \right)\,dy,$$

če desni integral lahko izračunamo.

$$\begin{aligned}
&\int_{[1,2]} \left(\int_{[0,1]} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx \right)\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+y^2} \right)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\int_{y^2}^{1+y^2} \frac{du}{u} \right)\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln\frac{1+y^2}{y^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2} y \ln \frac{1+y^2}{y^2}\bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{dy}{1+y^2} = \ln\frac{5\sqrt{2}}{8} + \arctan 2 - \pi/4.
\end{aligned}$$

□

Poglejmo si sedaj še Fubinijev izrek za nekoliko bolj splošen primer območja. Naj bo $D \subset R^n$ omejena odprta množica z volumnom in $\phi, \psi : D \to \mathbb{R}$ omejeni zvezni funkciji, pri čemer velja $\phi(x) \le \psi(x)$ za vsak $x \in D$. Naj bo

$$K = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R};\ \phi(x) \le y \le \psi(x).\}$$

Naj bo $m = \inf_D \phi$ in $M = \sup_D \psi$. Potem je rob množice K vsebovan v uniji

$$\partial D \times [m,M] \cup \{(x,\psi(x));\ x \in D\} \cup \{(x,\phi(x));\ x \in D\}.$$

Prva množica ima mero 0, saj ima $\partial D \subset \mathbb{R}^n$ mero 0, da imata drugi dve množici mero 0 pa sledi iz trditve 3.10. Torej ima ∂K mero 0 in zato je vsaka omejena zvezna funkcija na K integrabilna. Če je L zaprt kvader, ki vsebuje D, kvader $L \times [m,M]$ vsebuje K. Naj bo $f : K \to \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija in $\tilde{f}$ njena razširitev na $L \times [m,M]$. Če je $x \in D$ je

$$\int_{[m,M]} \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{\phi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\,dy,$$

če pa je $x \in L \backslash D$, pa je

$$\int_{[m,M]} \tilde{f}(x,y)\,dy = 0.$$

Fubinijev izrek nam tako da

$$\begin{aligned}\int_K f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{L\times[m,M]} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_L \left(\int_{[m,M]} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_D \left(\int_{[m,M]} \tilde{f}(x,y)\,dy\right) dx = \int_D \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.\end{aligned}$$

Izrek 3.24. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica z volumnom, $\phi, \psi : D \to \mathbb{R}$ omejeni zvezni funkciji, za kateri velja $\phi(x) \leq \psi(x)$ za vsak $x \in D$. Naj bo*

$$K = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R};\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija. Potem velja

$$\int_K f(x,y)\,dx\,dy = \int_D \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Primer 3.25. Izračunajmo integral

$$\int_K x\,dx\,dy\,dz,$$

kjer je

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}.$$

Naj bo $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1.\}$ Potem je

$$K = \{(x,y,z) \in \Delta \times \mathbb{R};\ 0 \leq z \leq 1-x-y.\}$$

Zato je

$$\begin{aligned}\int_K x\,dx\,dy\,dz &= \int_\Delta \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz\right) dx\,dy = \int_\Delta xz|_{z=0}^{z=1-x-y}\,dx\,dy \\ &= \int_\Delta (x - x^2 - xy)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Množico Δ lahko zapišemo kot

$$\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R};\ 0 \leq y \leq 1-x.\}$$

Zato je zopet

$$
\begin{aligned}
\int_{\Delta}(x-x^2-xy)\,dx\,dy &= \int_{[0,1]}\left(\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)\,dy\right)dx \\
&= \int_{[0,1]}\left(xy-x^2y-x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1\left(\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2}\right)=\frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Seveda bi lahko zgornji integral že takoj zapisali kot trikratno zaporedno integracijo

$$
\begin{aligned}
\int_K x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}x\,dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}x\,dz\,dy\,dx.
\end{aligned}
$$

□

3.5. Zamenjava spremenljivk

Preden zapišemo izrek v več spremenljivkah, se spomnimo na zamenjavo spremenljivk v Riemannovem integralu v eni spremenljivki. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna in $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektivna $\mathbb{C}^1$ preslikava. Če velja $\phi(\alpha)=a$ in $\phi(\beta)=b$ je funkcija ϕ naraščajoča, zato $\phi' \geq 0$, in velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Če velja $\phi(\alpha)=b$ in $\phi(\beta)=a$ je funkcija ϕ padajoča, zato $\phi' \leq 0$, in velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))(-\phi'(t))\,dt.$$

Če obe izjavi pogledamo skupaj, dobimo naslednjo izjavo. Če je $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijektivna $\mathbb{C}^1$ preslikava, velja

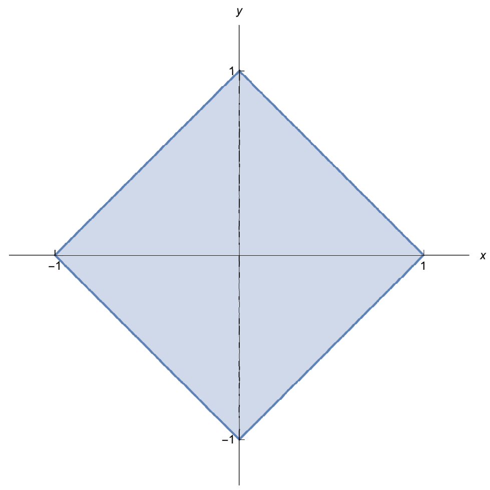
$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(\phi(t))|\phi'(t)|\,dt.$$

Izrek 3.26. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica z volumnom in $g : A \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava razreda $\mathcal{C}^1$. Naj bo $|(Dg)(x)| \neq 0$ za vsak $x \in A$ in $x \mapsto |(Dg)(x)|$ omejena funkcija na A. Naj bo $B = g(A)$ omejena množica z volumnom. Potem je za vsako integrabilno funkcijo $f : B \to \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto f(g(x)|\det(Dg)(x)|$ integrabilna na A in velja*

$$\int_B f(y)\,dy = \int_A f(g(x))|\det(Dg)(x)|\,dx.$$

Primer 3.27. Naj bo

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1.\}$$



Slika 3.1. $|x|^2 + |y|^2 \leq 1$

S pomočjo zamenjave spremenljivk

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

izračunajmo integral

$$\int_B \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 dx\, dy.$$

Če je

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\},$$

je preslikava

$$g(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

bijekcija, ki preslika A v B. Zato za vsako integrabilno funkcijo $f : B \to \mathbb{R}$ velja

$$\int_B f(x, y)\, dxdy = \int_A f(g(u, v))|\det(Dg)(u, v)|\, dudv.$$

Odvod preslikave ϕ je enaka

$$(Dg)(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

zato je

$$|\det(Dg)(u, v)| = \frac{1}{2}.$$

Dobimo torej

$$\begin{aligned}\int_B \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 dxdy &= \frac{1}{2}\int_A \frac{v^2}{(u+2)^2}\,dudv\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{v^2}{(u+2)^2}\,du\right)dv\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v^2\left(-\frac{1}{u+2}\right)\Big|_{u=-1}^{u=1} dv\\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} v^2\,dv = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

□

Polarne koordinate v $\mathbb{R}^2$. Polarne koordinate na $\mathbb{R}^2$ so podane s preslikavo

$$g : [0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2, \quad g(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Opomba 3.28. Preslikava g zadošča pogojem izreka o zamenjavi spremenljivk, če jo omejimo na poljubno omejeno odprto množico v $(0,\infty)\times(0,2\pi)$. Ker pa ima komplement $([0,\infty)\times[0,2\pi))\backslash((0,\infty)\times(0,2\pi))$ mero 0, nam to ne povzroča težav in lahko polarne koordinate uvedemo na kateri koli omejeni množici z volumnom.

Determinanta odvoda preslikave g je enaka

$$\det(Dg)(r,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{vmatrix} = r,$$

zato dobimo

$$\int_B f(x,y)\,dxdy = \int_A f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\,drd\phi.$$

Primer 3.29. Izračunajmo integral

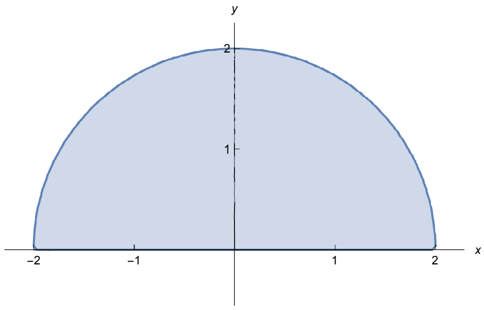
$$\int_B e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

po območju

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 4, y\ge 0.\}$$

S preslikavo, ki nam podaja polarne koordinate v ravnini, se na območje B preslika območje

$$A = [0,2]\times[0,\pi].$$



SLIKA 3.2. $x^2 + y^2 \leq 4$ in $y \geq 0$

Zato imamo

$$\int_A e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int_B e^{r^2} r\,drd\phi = \int_0^\pi \left(\int_0^2 e^{r^2} r\,dr\right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\int_0^4 e^u\,du\right) d\phi = \frac{e^4-1}{2}\pi.$$

$\square$

Cilindrične koordinate v $\mathbb{R}^3$. Cilindrične koordinate na $\mathbb{R}^3$ so podane s preslikavo

$$g : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad g(r,\phi,z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z).$$

Determinanta odvoda preslikave g je enaka

$$\det(Dg)(r,\phi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

zato dobimo

$$\int_B f(x,y,z)\,dxdy = \int_A f(r\cos\phi, r\sin\phi, z) r\,drd\phi dz.$$

PRIMER 3.30. Izračunajmo integral

$$\int_B dxdydz$$

po območju

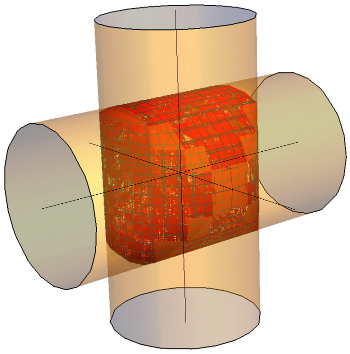
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1, x^2+z^2 \leq 1.\}$$

Vpeljali bomo cilindrične koordinate

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = z.$$

Pogoj $x^2+y^2 \leq 1$ je preprosto $r \leq 1$. Pogoj $x^2+z^2 \leq 1$ postane

$$r^2\cos^2\phi + z^2 \leq 1,$$



SLIKA 3.3. $x^2 + y^2 \le 1$ in $x^2 + z^2 \le 1$

oziroma
$$-\sqrt{1 - r^2\cos^2\phi} \le z \le \sqrt{1 - r^2\cos^2\phi}.$$
S preslikavo, ki nam podaja cilindrične koordinate v $\mathbb{R}^3$, se na območje B torej preslika območje

$$A = \{(r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \le r \le 1, 0 \le \phi < 2\pi, -\sqrt{1 - r^2\cos^2\phi} \le z \le \sqrt{1 - r^2\cos^2\phi}\}.$$

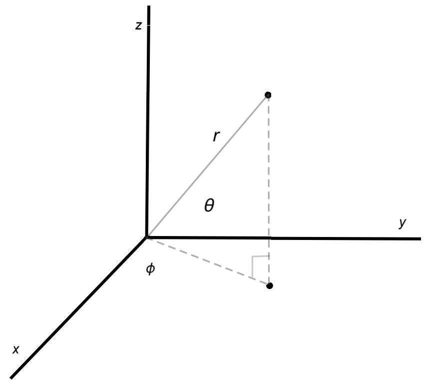
Zato imamo

$$\begin{aligned}
\int_A dxdydz &= \int_B r\, drd\phi dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2\cos^2\phi}}^{\sqrt{1-r^2\cos^2\phi}} rdzdrd\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{1 - r^2\cos^2\phi}\, rdrd\phi = \int_0^{2\pi}\int_{\sin^2\phi}^1 \frac{1}{\cos^2\phi}\sqrt{u}dud\phi \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2\phi}(1 - \sin^3\phi)d\phi = \frac{8}{3}\left(\frac{\sin\phi - 1}{\cos\phi} - \cos\phi\right)_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Za izračun izraza v $\phi = \pi/2$ smo uporabili L'Hospitalovo pravilo. $\square$

Sferične koordinate v $\mathbb{R}^3$. Sferične koordinate na $\mathbb{R}^3$ so podane s preslikavo

$$\begin{aligned}
&g : [0, \infty) \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\
&g(r, \theta, \phi, z) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta).
\end{aligned}$$



Determinanta odvoda preslikave g je enaka

$$\det(Dg)(r,\theta,\phi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}=-r^2\cos\theta,$$

zato dobimo

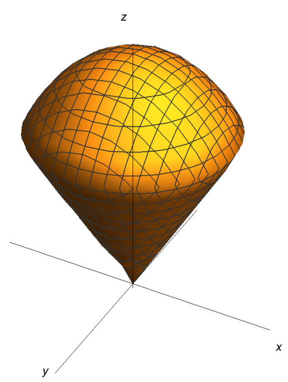
$$\int_B f(x,y,z)\,dxdy=\int_A f(r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta drd\phi dz.$$

Primer 3.31. Izračunajmo

$$\frac{1}{v(B)}\int_B z\,dxdydz$$

po območju

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2;\;\, x^2+y^2+z^2\leq 1, z\geq\sqrt{x^2+y^2}.\}$$



Slika 3.4. $x^2+y^2+z^2\leq 1$ in $z\geq\sqrt{x^2+y^2}$

Vpeljali bomo sferične koordinate

$$x = r\cos\theta\cos\phi,\ y = r\cos\theta\sin\phi,\ z = r\sin\theta.$$

Pogoj $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ je preprosto $r \leq 1$. Pogoj $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ postane

$$r\sin\theta \geq r\cos\theta,$$

oziroma

$$\theta \geq \pi/4.$$

S preslikavo, ki nam podaja sferične koordinate v $\mathbb{R}^3$, se na območje B torej preslika območje

$$A = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq r \leq 1, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi < 2\pi\}.$$

Zato imamo

$$v(B) = \int_A dxdydz = \int_B r^2\cos\theta\, drd\theta d\phi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^2\cos\theta\, drd\phi d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\pi(2-\sqrt{2})}{6}$$

Izračunajmo še integral

$$\int_A z\, dxdydz = \int_B r^3\cos\theta\sin\theta\, drd\theta d\phi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\, drd\phi d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} u\, du = \frac{\pi}{8}.$$

Torej je

$$\frac{1}{v(B)}\int_B z\, dxdydz = \frac{3}{8(2-\sqrt{2})},$$

kar predstavlja z koordinato težišča območja B. □

3.6. Izlimitirani integral

V tem razdelku bomo pogledali, kako lahko razširimo definicijo Riemannovega integrala na funkcije, ki so lahko neomejene, ali pa morda definirane na neomejenih množicah.

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija (ki ni nujno omejena), definirana na (ne nujno omejenem) območju $D \subset \mathbb{R}^n$. Predpostavimo, da ima rob območja D Lebesgueovo mero 0 in da je funkcija f zvezna povsod, razen na množici z

Lebesgueovo mero 0. Razširimo najprej funkcijo f na celoten $\mathbb{R}^n$ kot

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in \mathcal{D} \\ 0 & , x \in \mathbb{R}^n \backslash D \end{cases} .$$

Funkcije $\tilde{f}$ je zvezna povsod na $\mathbb{R}^n$, razen na množici z mero 0.

Poglejmo si najprej definicijo integrala v primeru, ko je $f \geq 0$ povsod na D. Torej je tudi $\tilde{f} \geq 0$ povsod $\mathbb{R}^n$. Naj bo množica E definirana kot

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \text{funkcija } \tilde{f} \text{ je neomejena v vsaki okolici točke } x\}.$$

Množica $\mathbb{R}^n \backslash E$ je odprta, saj ima po definiciji vsaka točka iz $\mathbb{R}^n \backslash E$ odprto okolico, da je funkcija v tej okolici omejena. Torej je ta celotna odprta okolica vsebovana v $\mathbb{R}^n \backslash E$. Ker je množica E vsebovana v množici nezveznosti funkcije $\tilde{f}$, ima E mero 0.

Naj bo $\mathcal{K}$ družina vseh kompaktnih množic z volumnom, vsebovanih v $\mathbb{R}^n \backslash E$. Poglejmo, da za vsak $K \in \mathcal{K}$ obstaja integral $\int_K \tilde{f}(x)\, dx$. Poglejmo najprej, da je funkcija $\tilde{f}$ je na K omejena. Če je $\tilde{f}$ neomejena na K, obstaja zaporedje $\{x_i\} \subset K$, da velja $\tilde{f}(x_i) > i$. Ker je K kompaktna, obstaja podzaporedje $\{x_{i_j}\}$, ki konvergira proti neki točki $x \in K$. Ker je potem funkcija $\tilde{f}$ neomejena v vsaki okolici točke x, smo dobili protislovje, saj je $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$. Torej je $\tilde{f}$ omejena na K. Ker je $\tilde{f}$ zvezna povsod na K, razen morda na množici z mero 0, integral obstaja po Lebesgueovem izreku. Zato lahko definiramo

$$\int_D f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx = \sup_{K \in \mathcal{K}} \int_K \tilde{f}(x) dx,$$

ki pa je lahko tudi ∞.

Opomba 3.32. Naj bo $K_1, K_2, \ldots$ poljubno zaporedje kompaktnih množic v $\mathbb{R}^n \backslash E$, za katere velja

(i) $K_i \subset \operatorname{Int} K_{i+1}$ za vsak $i = 1, 2, 3 \ldots$,
(ii) $K_1 \cup K_2 \cup \ldots = \mathbb{R}^n \backslash E$.

Takemu zaporedju rečemo *kompaktno izčrpanje* množice $\mathbb{R}^n \backslash E$. Če je integral

$$I = \int_{R^n} \tilde{f}(x) dx = \sup_{K \in \mathcal{K}} \int_K \tilde{f}(x) dx$$

končen, potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $K \in \mathcal{K}$, da je

$$\int_K \tilde{f}(x) dx > I - \epsilon.$$

Ker je $\{K_i\}$ izčrpanje, obstaja tak K_m, da velja $K \subset K_m$, in zato je

$$\int_{K_m} \tilde{f}(x) dx > I - \epsilon.$$

Zato velja

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_{K_i} \tilde{f}(x)dx.$$

Zelo podobno bi to pokazali v primeru, ko je $I = \infty$. Pri računanju izlimitiranega integrala pozitivne funkcije torej lahko zgolj izberemo primerno izčrpanje množice $\mathbb{R}^n \backslash K$ s kompaktnimi množicami.

Poglejmo sedaj še splošen primer, ko f ni nujno pozitivna. V tem primeru najprej zapišemo f kot razliko dveh pozitivnih funkcij

$$f = f_+ - f_-, \quad f_+(x) = \max\{f(x), 0\},\ f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Definicija 3.33. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna povsod, razen morda na množici z mero 0 in naj ima rob množice D mero 0. Če sta oba integrala $\int_D f_+(x)\,dx$ in $\int_D f_-(x)\,dx$ končna, rečemo, da je *integrabilna* na D, in definiramo

$$\int_D f(x)\,dx = \int_D f_+(x)\,dx - \int_D f_-(x)\,dx.$$

Opomba 3.34. Funkcija f, zvezna skoraj povsod, je integrabilna na D natanko tedaj, ko je na D integrabilna funkcija $|f|$, saj je $|f| = f_+ + f_-$.

Primer 3.35. Izračunajmo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Za izčrpanje $\mathbb{R}^2$ bomo najprej vzeli kar zaprte krogle $K_i = \bar{K}(0, i)$. V polarnih koordinatah imamo

$$\int\limits_{K_i} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{i} e^{-r^2} r dr d\phi = -\pi \int\limits_0^{i^2} e^{-u} du = \pi(1 - e^{-i^2}).$$

Torej je

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{K_i} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi.$$

Vzemimo sedaj za izčrpanje $\mathbb{R}^2$ kvadrate $L_i = [-i, i] \times [-i, i]$. Velja

$$\int\limits_{L_i} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{-i}^{i} \int\limits_{-i}^{i} e^{-x^2} e^{-y^2} dydx$$

$$= \left(\int\limits_{-i}^{i} e^{-x^2} dx \right) \left(\int\limits_{-i}^{i} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int\limits_{-i}^{i} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Zato dobimo

$$\pi = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{L_i} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

oziroma

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

POGLAVJE 4

Vektorska analiza

4.1. Skalarno in vektorsko polje

DEFINICIJA 4.1. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$. Zvezno funkcijo $f : U \to \mathbb{R}$ imenujemo *skalarno polje* na U, zvezni preslikavi $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^n$ pa *vektorsko polje* na U.

Izraza skalarno in vektorsko polje prideta iz fizike. Primeri skalarnega polja so na primer gravitacijski potencial, temperatura, pritisk. Primeri vektorskega polja pa so na primer sile, hitrost. V primeru, ko je $n = 2$ bomo v koordinatah vektorsko polje običajno pisali kot

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)),$$

v primeru $n = 3$ pa

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Od sedaj naprej se bomo omejili na prostor $\mathbb{R}^3$. Če je $f(x, y, z)$ skalarno polje razreda $\mathcal{C}^1$ na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^3$, potem je gradient f v točki $T_0 = (x_0, y_0, z_o) \in U$

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} f)(x_0, y_0, z_0) &= (\nabla f)(T_0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_o), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_o)\right).\end{aligned}$$

Tako je $\nabla f : U \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje na U.

Označimo z

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

formalni vektor odvodov po vseh treh spremenljivkah.

DEFINICIJA 4.2. Naj bo $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na odprti množici U. Divergenca vektorskega polja $\vec{F}$ v točki $T_0 = (x_0, y_0, z_o) \in U$ je

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \vec{F})(x_0, y_0, z_0) = (\nabla \cdot \vec{F})(T_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R)(T_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(T_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(T_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(T_0).\end{aligned}$$

DEFINICIJA 4.3. Naj bo $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje razreda $\mathbb{C}^1$ na odprti množici U. Rotor vektorskega polja $\vec{F}$ v točki $T_0 = (x_0, y_0, z_o) \in U$ je

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \vec{F})(x_0, y_0, z_0) &= (\nabla \times \vec{F})(T_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R)(T_0) \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(T_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(T_0), \frac{\partial P}{\partial z}(T_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(T_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(T_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(T_0)\right).
\end{aligned}
$$

Če je $\vec{F}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$ na U je divergenca $\nabla \cdot \vec{F} : U \to \mathbb{R}$ skalarno polje na U, rotor $\nabla \times \vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ pa vektorsko polje na U.

TRDITEV 4.4. *Naj bo $f : U \to \mathbb{R}$ skalarno polje razreda $\mathcal{C}^2$. Potem je rotor od gradienta f enak* 0 *na U, torej*

$$\nabla \times (\nabla f) = (0, 0, 0)$$

DOKAZ.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla f) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

□

TRDITEV 4.5. *Naj bo $\vec{F} = (P, Q, R) : U \to \mathbb{R}$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^2$. Potem je divergenca od rotorja $\vec{F}$ enaka* 0 *na U, torej*

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

DOKAZ.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

DEFINICIJA 4.6. Naj bo $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje.

- Če obstaja $\mathbb{C}^1$ skalarno polje $f : U \to \mathbb{R}$, da je $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ rečemo, da je $\vec{F}$ *potencialno* oziroma *konzervativno* vektorsko polje, skalarnemu polju f pa rečemo *potencial* polja $\vec{F}$.
- Če je $\vec{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$ in je $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$ rečemo, da je $\vec{F}$ *irotacijsko* ali *nevrtinčno* polje.

- Če je $\vec{F}$ razreda $\mathcal{C}^1$ in je $\operatorname{div} F = 0$ rečemo, da je $\vec{F}$ *solenoidalno* ali *nestisljivo* vektorsko polje.

Pokazali smo že, da je vsako potencialno vektorsko polje tudi nevrtinčno. Kasneje bomo videli, da na dovolj lepih območjih velja tudi obrat.

IZREK 4.7. *Če je U odprta in enostavno povezana množica, potem je vsako nevrtinčno vektorsko polje na U potencialno.*

PRIMER 4.8. Preverimo, da je polje

$$\vec{F} = (2x\cos y - 2z^3, 3 + 2ye^z - x^2 \sin y, y^2e^z - 6xz^2)$$

potencialno na $\mathbb{R}^3$ in poiščimo njegov potencial. Najprej preverimo, če je $\operatorname{rot} \vec{F} = (0,0,0)$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (2x\cos y - 2z^3, 3 + 2ye^z - x^2 \sin y, y^2e^z - 6xz^2) \\
&= (2ye^z - 2ye^z, -6z^2 + 6z^2, -2x\sin y + 2x\sin y) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Potencial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je taka funkcija, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x\cos y - 2z^3 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3 + 2ye^z - x^2 \sin y \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= y^2e^z - 6xz^2.
\end{aligned}$$

Če prvo enačbo integriramo po x dobimo

$$f(x,y,z) = x^2\cos y - 2xz^3 + C(y,z),$$

kjer je $C(y,z)$ poljubna funkcija, ki je odvisna le od spremenljivk y in z. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$-x^2 \sin x + \frac{\partial C}{\partial y} = 3 + 2ye^z - x^2 \sin y,$$

oziroma

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 3 + 2ye^z.$$

Integracija po y nam da

$$C(x,y) = 3y + y^2e^z + D(z),$$

kjer je D poljubna funkcija, odvisna le še od spremenljivke z. Če sedaj

$$f(x,y,z) = x^2\cos y - 2xz^3 + C(y,z) = x^2\cos y - 2xz^3 + 3y + y^2e^z + D(z),$$

vstavimo še v tretjo enačbo, dobimo

$$-6xz^2 + y^2e^z + D'(z) = y^2e^z - 6xz^2,$$

oziroma $D'(z) = 0$. Zato je D konstanta. Potencial je tako

$$f(x,y,z) = x^2 \cos y - 2xz^3 + C(y,z) = x^2 \cos y - 2xz^3 + 3y + y^2 e^z + D.$$

□

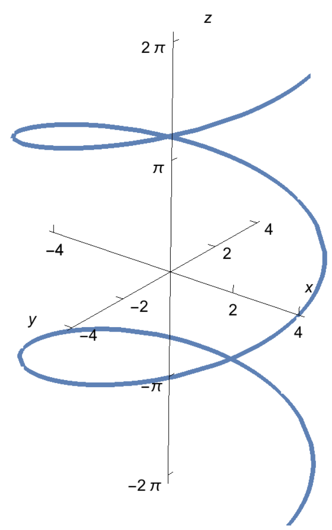
4.2. Poti v $\mathbb{R}^n$

DEFINICIJA 4.9. *Gladka pot* v $\mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ preslikava $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. *Tir gladke poti* γ je slika $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$. Pot γ je *regularna*, če je $\gamma' \neq 0$ za vsak $t \in (a,b)$.

DEFINICIJA 4.10. Naj bo $\phi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ bijektivna preslikava razreda $\mathbb{C}^1$, in je $\phi' > 0$ na (α, β). Potem je $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ reparametrizacija poti γ.

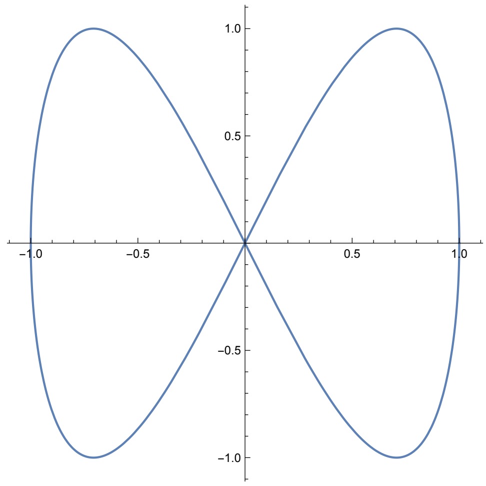
Včasih bomo obravnavali bolj splošne, *kosoma gladke poti*. To pomeni, da je γ zvezna na $[a,b]$ in obstaja particija $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ intervala I, da je γ razreda $\mathcal{C}^1$ na vsakem podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$.

PRIMER 4.11. Pot $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, t)$, $\gamma : [-2\pi, 2\pi]$ je regularna, ker je $\gamma'(t) = (-4\sin t, 4\cos t, 1) \neq (0,0,0)$ v vsaki točki. Tir te poti je vijačnica v $\mathbb{R}^3$.



SLIKA 4.1. Vijačnica

Primer 4.12. Regularna pot $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, je *sklenjena* pot v $\mathbb{R}^2$, saj je $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, katere tir je "osmica". Tir poti ima v točki $(0, 0)$ *samopresečno točko*.

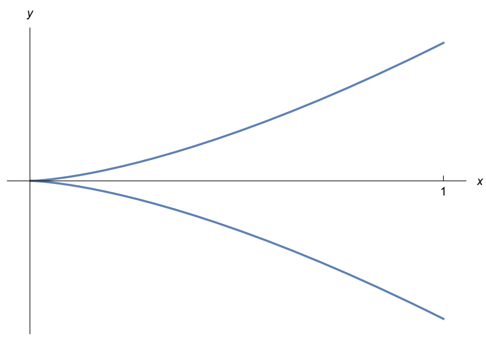


Slika 4.2. Osmica s samopresečno točko

Primer 4.13. Regularna pot $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, ima za tir običajno krožnico z radijem 1 v $\mathbb{R}^2$. Poleg tega, da je sklenjena, je tudi injektivna na $[0, 2\pi)$, zato rečemo, da je *enostavno sklenjena*.

Če vzamemo namesto definicijskega območja $[0, 2\pi]$ definicijsko območje $[0, 4\pi]$ in isti predpis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, je tir ista krožnica z radijem 1, ki pa jo pot sedaj dvakrat obhodi. Pot je še vedno regularna, sklenjena, ni pa enostavno sklenjena.

Primer 4.14. Pot $\gamma(t) = (t^2, t^3/3)$, $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, ni regularna, saj je $\gamma'(0) = (0, 0)$. V točki $\gamma(0)$ krivulja nima dobro definirane tangentne smeri (tam ima ost). Ni možno najti regularne poti, ki bi imela isti tir kot γ.



Slika 4.3. Krivulja z ostjo

Pot $\gamma(t) = (t^3, t^3)$, $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, prav tako ni regularna, saj je zopet $\gamma'(0, 0) = (0, 0)$. Ima pa regularna pot $\tilde{\gamma}(t) = (t, t)$ isti tir kot γ.

Definicija 4.15. Dolžina gladke poti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je enaka

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Včasih je dolžina poti enaka dolžini tira te poti (če je na primer gladka pot γ injektivna, ali enostavno sklenjena). Ni pa vedno tako. Pri poti $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, je dolžina poti enaka 4π, čeprav je tir poti krožnica, katere dolžina je 2π.

4.3. Krivuljni integral skalarnega polja

Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ gladka pot in $f : U \to \mathbb{R}$ skalarno polje, kjer $U \subset \mathbb{R}^m$ vsebuje tir poti γ. Krivuljni integral po γ skalarnega polja f je definiran kot

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt.$$

Opomba 4.16. Izraz $ds = |\gamma'(t)|\, dt$ predstavlja infinitezimalno dolžino poti γ. Integral torej smiselno "sešteje" vrednosti polja f vzdolž poti γ. Če je γ injektivna in si na primer $f(\gamma(t))$ predstavljamo kot linearno gostoto v točki $\gamma(t)$, potem integral poda ravno maso tira poti.

Trditev 4.17. *Krivuljni integral $\int_\gamma f\, ds$ je neodvisen od reparametrizacije poti γ.*

Dokaz. Naj bo $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijekcija in $\phi' > 0$ na (a, b). Potem je

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\, ds &= \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\phi(u)))|\gamma'(\phi(u))|\phi'(u)\, du \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma \circ \phi(u)))|(\gamma \circ \phi)'(u))|\, du = \int_{\gamma\circ\phi} f\, ds.\end{aligned}$$

$\square$

Opomba 4.18. Krivuljni integral skalarnega polja je neodvisen tudi od take reparametrizacije, ki obrne orientacijo poti γ, torej, če je $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ taka bijekcija, da je $\phi < 0$.

Če je γ injektivna (ali enostavno sklenjena), potem iz zgornje trditve sledi, da je krivuljni integral po γ odvisen le od tira poti $C = \gamma([a, b])$, in ne od same injektivne (ali enostavno sklenjene) poti, ki ta tir parametrizira. V takem primeru namesto $\int_\gamma f\, ds$ pišemo kar $\int_C f\, ds$.

PRIMER 4.19. Izračunajmo integral skalarnega polja

$$\int_C x^2 y\, ds,$$

kjer je C daljica, ki povezuje točki $(1,2,3)$ in $(3,3,5)$.

Daljico C parametriziramo z $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (1,2,3) + t\,((3,3,5) - (1,2,3)) = (1+2t, 2+t, 3+2t).$$

Torej je $\gamma'(t) = (2,1,2)$ in $|\gamma'(t)| = 3$. Integral je enak

$$\begin{aligned}\int_C x^2 y\, ds = \int_\gamma x^2 y\, ds &= \int_0^1 (1+2t)^2 (2+t) 3dt \\ &= \int_0^1 (12t^3 + 36t^2 + 27t + 6)dt = 69/2.\end{aligned}$$

□

PRIMER 4.20. Izračunajmo integral skalarnega polja

$$\int_C x^2 y\, ds,$$

kjer je C krožnica v $\mathbb{R}^2$ s središčem v $(1,1)$ in radijem 2.

Krožnico C parametriziramo z $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t, 1 + 2\sin t).$$

Torej je $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$ in $|\gamma'(t)| = 2$. Integral je enak

$$\int_C x^2 y\, ds = \int_\gamma x^2 y\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos t)^2 (1 + 2\sin t) 2dt$$
$$= 2\int_0^{2\pi} (8\cos^2 t \sin t + 8\cos t \sin t + 4\cos^2 t + 2\sin t + 4\cos t + 1)dt = 12\pi.$$

□

4.4. Krivuljni integral vektorskega polja

Naj bo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gladka pot in $\vec{F} : U \to \mathbb{R}$ vektorsko polje, kjer $U \subset \mathbb{R}^m$ vsebuje tir poti γ. Krivuljni integral po γ vektorskega polja $\vec{F}$ je definiran kot

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

OPOMBA 4.21. Naj bo γ regularna pot in $\vec{T}(t)$ enotski tangentni vektor na tir poti γ v točki $\gamma(t)$. Potem je

$$d\vec{s} = \gamma'(t)\, dt = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}|\gamma'(t)|\, dt = \vec{T}(t)\, ds.$$

Zato je
$$\int_\gamma \vec{F} d\vec{s} = \int_\gamma (\vec{F}\cdot\vec{T})\, ds.$$
Integral vektorskega polja torej "sešteje" dolžino projekcije vektorskega polja $\vec{F}$ v tangentni smeri poti. Če je na primer vektorsko polje v vsaki točki pravokotno na tir poti, je integral enak 0.

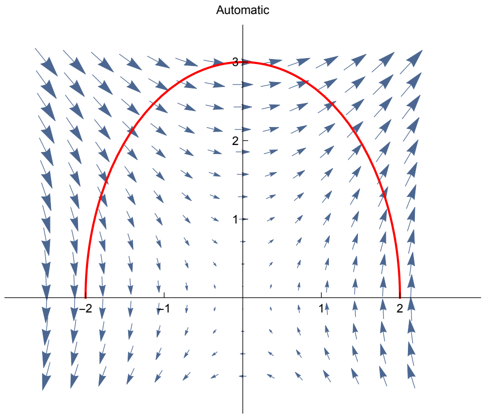
TRDITEV 4.22. *Krivuljni integral $\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{s}$ je neodvisen od parametrizacije poti γ.*

DOKAZ. Naj bo $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bijekcija in $\phi' > 0$ na (a,b). Potem je
$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \\ &= \int_\alpha^\beta \vec{F}(\gamma(\phi(u)))\gamma'(\phi(u))\phi'(u)\, du \\ &= \int_\alpha^\beta \vec{F}(\gamma\circ\phi(u)))(\gamma\circ\phi)'(u))\, du = \int_{\gamma\circ\phi} \vec{F}\, d\vec{s}.\end{aligned}$$
□

Če je γ injektivna (ali enostavno sklenjena), potem iz zgornje trditve sledi, da je krivuljni integral po γ odvisen le od tira poti γ in od orientacije poti γ. Za razliko od krivuljnega integrala skalarnega polja, se vrednosti integrala spremeni predznak, že po tiru potujemo v nasprotni smeri.

Če je $n = 2$, potem je vektorsko polje oblike $\vec{F} = (P,Q)$, kjer sta P,Q funkciji na $U \subset \mathbb{R}^2$. Ker je $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, je $d\vec{s} = (x'(t), y'(t))dt$, kar lahko pišemo kot (dx, dy). Zato integral vektorskega polja v dveh spremenljivkah pogosto pišemo kot
$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{s} = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy.$$
Podobno v treh spremenljivkah pišemo
$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{s} = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$
kjer je $\vec{F} = (P,Q,R)$.

PRIMER 4.23. Izračunajmo integral $\int_C \vec{F}\, d\vec{s}$, kjer je $\vec{F} = (2y, 3x)$ in je C pozitivno orientiran zgornji del elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ med točkama $(2,0)$ in $(-2,0)$



C parametriziramo z $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t) \quad (\gamma'(t) = (-2\sin t, 3\cos t)).$$

Torej je

$$\int_C (2y, 3x) d\vec{s} = \int_\gamma (2y, 3x) d\vec{s} = \int_0^\pi (6\sin t, 6\cos t) \cdot (-2\sin t, 3\cos t) dt$$
$$= \int_0^\pi (-12\sin^2 t + 18\cos^2 t) dt = 3\pi$$

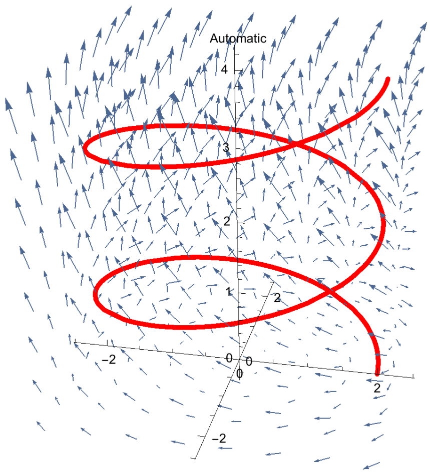
Primer 4.24. Izračunajmo integral

$$\int_C y\,dx - x\,dy + z\,dz,$$

kjer je C del vijačnice

$$x = 2\cos t \quad (dx = -2\sin t\,dt)$$
$$y = 2\sin t \quad (dy = 2\cos t\,dt)$$
$$z = t/\pi \quad (dz = \frac{1}{\pi}\,dt)$$

med točkama $(2, 0, 0)$ $(t = 0)$ in $(2, 0, 4)$ $(t = 4\pi)$.



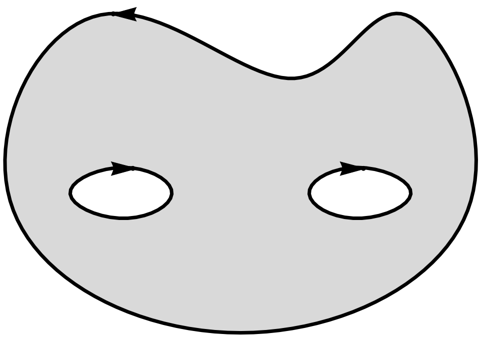
Torej je

$$\int_C y\,dx - x\,dy + z\,dz = \int_0^{4\pi} (2\sin t)(-2\sin t)dt - (2\cos t)(2\cos t)dt + \frac{t}{\pi}\frac{1}{\pi}dt$$
$$= \int_0^{4\pi} \left(-4\sin^2 t - 4\cos^2 t + \frac{t}{\pi^2}\right) dt = 8 - 16\pi$$

□

4.5. Greenova formula v $\mathbb{R}^2$

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje. D ima kosoma gladek rob ∂D, če ga lahko napišemo kot unijo tirov gladkih injektivnih regularnih poti v $\mathbb{R}^2$. (ekvivalentno, kot tir enostavno sklenjene kosoma gladke regularne poti v $\mathbb{R}^2$). Integral vektorskega polja po robu takega območja je odvisen le od orientacije roba (poti). Orientacijo izberemo tako, da je območje vedno na levi strani, ko potujemo po robu.



Slika 4.4. Orientacija roba

Izrek 4.25. *Naj bo D omejeno območje v $\mathbb{R}^2$ s kosoma gladkim robom in $\vec{F} = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici zaprtja $\bar{D}$. Potem velja*

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Dokaz. Pokazali bomo, da za vsako $\mathcal{C}^1$ funkcijo $P(x, y)$, definirano v okolici $\bar{D}$ velja

$$\int_{\partial D} Pdx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \tag{1}$$

in da za vsako $\mathcal{C}^1$ funkcijo $Q(x, y)$, definirano v okolici $\bar{D}$ velja

$$\int_{\partial D} Qdx = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \tag{2}$$

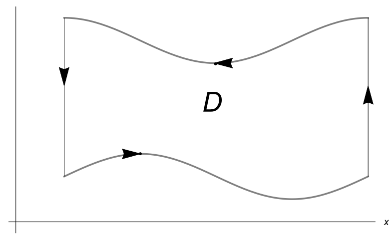
Če obe enakosti seštejemo, dobimo

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Poglejmo najprej (1). Predpostavimo najprej, da je območje D oblike

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}, \tag{3}$$

kjer sta $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^1$ in $\phi \le \psi$.



Potem je

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left(P(x, \psi(x)) - P(x, \phi(x)) \right) dx.$$

Izračunajmo še $\int_{\partial D} Pdx$. Po obeh navpičnih segmentih roba je integral 0, ker je tam parametrizacija oblike $x =$ konst., $y = t$, zato je $dx = 0dt$. Spodnji del roba parametriziramo kot

$$x = x,\ y = \phi(x) \quad (dx = dx),$$

kjer je $a \le x \le b$, zato je ta del integrala po robu enak

$$\int_a^b P(x, \phi(x))\, dx.$$

Parametrizacija

$$x = x,\ y = \psi(x) \quad (dx = dx),$$

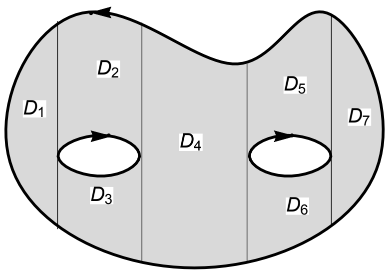
kjer je $a \leq x \leq b$, nam da ravno integral po zgornjem delu roba območja, pomnožen z -1, saj ima parametrizacija napačno orientacijo. Zato je integral po zgornjem delu roba enak

$$-\int_a^b P(x, \psi(x))\, dx.$$

Skupaj dobimo

$$\int_{\partial D} P dx = \int_a^b P(x, \phi(x))\, dx - \int_a^b P(x, \psi(x))\, dx,$$

kar je ravno $-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$. Poglejmo si sedaj splošno območje D. Z vertikalnimi daljicami lahko D razrežimo na dele $D_1, D_2, \ldots, D_k$, tako da je vsak del oblike (3).



Potem je

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_k -\int_{D_k} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_k \int_{\partial D_k} P dx = \int_D P dx.$$

Formulo (2) dokažemo povsem analogno, le da v tem primeru območje razdelimo s horizontalnimi daljicami na primerna območja. $\square$

Primer 4.26. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ območje s kosoma gladkim robom. Greenova formula nam da

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} xdy - ydx = \int_D dxdy = pl(D).$$

Naj bo na primer D poligon z oglišči (x_0, y_0),(x_1, y_1),...,(x_{n-1}, y_{n-1}). Daljico med (x_k, y_k) in (x_{k+1}, y_{k+1}) parametriziramo z $\gamma(t) = ((1-t)x_k + tx_{k+1}, (1-t)y_k + ty_{k+1})$. Zato je

$$\int_\gamma xdy - ydx = \int_\gamma [((1-t)x_k + tx_{k+1})(y_{k+1} - y_k) - ((1-t)y_k + ty_{k+1})(x_{k+1} - x_k)]dt$$
$$= (y_{k+1}x_k - y_k x_{k+1}).$$

Potem je ploščina poligona D enaka

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}_n}(y_{k+1}x_k - y_k x_{x+1})\right|.$$

4.6. Ploskve v $\mathbb{R}^3$

Definicija 4.27. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica. *Regularno parametrizirana ploskev* v $\mathbb{R}^3$ je injektivna preslikava $r : U \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

kjer je dodatno

$$r_u \times r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \neq (0,0,0)$$

v vsaki točki $(u,v) \subset U$. Sliki regularno parametrizirane ploskve bomo rekli *ploskev* v $\mathbb{R}^3$.

Naj bo $P = r(U)$ ploskev v $\mathbb{R}^3$, kjer je $r(u,v)$ regularna parametrizacija.Naj bo $(u_0, v_0) \in U$ in $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to P$, definirana z

$$\gamma(t) = r(u_0 + t, v_0).$$

Vektor odvoda

$$\gamma'(0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right) = r_u(u_0,v_0)$$

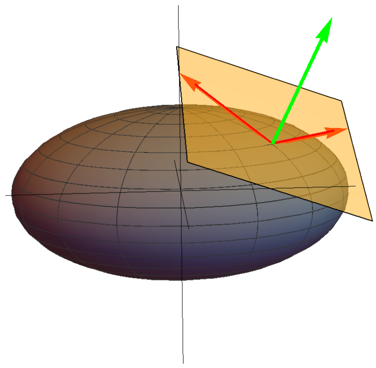
leži v tangentnem prostoru $T_{r(u_0,v_0)}P$. Podobno vektor $r_v(u_0,v_0)$ leži v tangentnem prostoru $T_{r(u_0,v_0)}P$. Pogoj, da je vektorski produkt $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) \neq 0$ pove, da sta ta dva tangentna vektorja linearno neodvisna in tako razpenjata celoten tangentni prostor $T_{r(u_0,v_0)}P$, vektorski produkt $r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0)$ pa predstavlja (ne nujno normiran) normalni vektor na ploskev P v točki $r(u_0, v_o)$.

V vsaki točki regularno parametrizirane ploskve imamo dve možni normalni smeri. *Orientacija ploskve* je zvezna izbira smeri normalne v vsaki točki ploskve (izbira zgornje in spodnje strani ploskve). Regularna parametrizacija $r(u,v)$ ploskve orientira ploskev s smerjo vektorjev $r_u \times r_v$.

Primer 4.28. Preslikava

$$r(u,v) = (a\cos v\cos u, b\cos v\sin u, c\sin v),$$

kjer je $(u,v) \in [0,2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2]$ nam parametrizira elipsoid z glavnimi osmi a,b,c. Če $a = b = c$ dobimo sfero. (Da dobimo zares regularno parametrizacijo, se moramo načeloma omejiti na območje $U = (0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$, kar pa nam potem parametrizira elipsoid brez ničelnega poldnevnika.)



SLIKA 4.5. Elipsoid $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$, vektorja r_u, r_v (rdeče), $r_u \times r_v$ (zeleno) v točki $(3/4, 1, \sqrt{2}/2)$.

Če izberemo $a = 3/2$, $b = 2$ in $c = 1$ dobimo elipsoid

$$E: \ \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1,$$

parametriziran z

$$r(u, v) = \left(\frac{3}{2}\cos v \cos u, 2\cos v \sin u, \sin v\right).$$

Če vstavimo $u = v = \pi/4$ dobimo točko $(3/4, 1, \sqrt{2}/2)$ na elipsoidu. Vektorja

$$r_u(\pi/4, \pi/4) = (-3/4, 1, 0) \text{ in } r_v(\pi/4, \pi/4) = (-3/4, -1, \sqrt{2}/2)$$

razpenjata tangentni prostor na elipsoid E v točki $(3/4, 1, \sqrt{2}/2)$. Normalni vektor na E (in na tangentno ravnino) v točki $(3/4, 1, \sqrt{2}/2)$ dobimo kot vektorski produkt

$$r_u(\pi/4, \pi/4) \times r_v(\pi/4, \pi/4) = (-3/4, 1, 0) \times (-3/4, -1, \sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/8, 3/2).$$

Tangentna ravnina na E v točki $(3/4, 1, \sqrt{2}/2)$ je torej

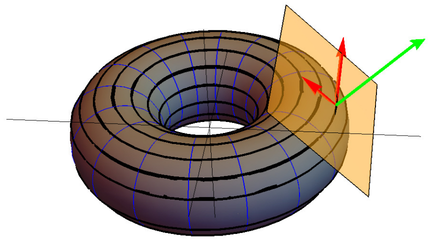
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{8}(y - 1) + \frac{3}{2}\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

□

PRIMER 4.29. Preslikava

$$r(u, v) = ((c + a\cos v)\cos u, (c + a\cos v)\sin u, a\sin v),$$

kjer je $(u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi]$ nam parametrizira torus, ki ga dobimo, če krožnico $(x - c)^2 + z^2 = a^2$ zavrtimo okrog z-osi.



SLIKA 4.6. Torus z radijema $a = 1$ in $c = 2$, vektorja r_u, r_v (rdeče), $r_u \times r_v$ (zeleno) v točki $(2 + \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$.

Če izberemo $a = 1$, $c = 2$ in $c = 1$ dobimo elipsoid

$$T: \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1,$$

parametriziran z

$$r(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v).$$

Če vstavimo $u = 0$, $v = \pi/4$ dobimo točko $(2 + \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ na torusu. Vektorja

$$r_u(0, \pi/4) = (0, 2 + \sqrt{2}/2, 0) \text{ in } r_v(0, \pi/4) = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$$

razpenjata tangentni prostor na torus T v točki $(2 + \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Normalni vektor na T (in na tangentno ravnino) v točki $(2 + \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ dobimo kot vektorski produkt

$$\begin{aligned} r_u(0, \pi/4) \times r_v(0, \pi/4) &= (0, 2 + \sqrt{2}/2, 0) \times (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \\ &= ((2 + \sqrt{2})/2, 0, (2 + \sqrt{2})/2). \end{aligned}$$

Tangentna ravnina na T v točki $(2 + \sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ je torej

$$x + z = 2 + \sqrt{2}.$$

□

PRIMER 4.30. Poljuben graf $\mathbb{C}^1$ funkcije $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ lahko regularno parametriziramo kot

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Potem sta tangentna vektorja

$$r_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ in } r_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

njun vektorski produkt

$$r_x \times r_y = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

□

Površina ploskev v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija ploskve $P \subset \mathbb{R}^3$ in naj bo $(u_0, v_0) \in U$. Naj bosta Δu in Δv majhna, tako da je pravokotnik $L = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u, v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v\}$ vsebovan v U. Ocenimo površino $p(r(L))$ slike $r(L) \subset P$:

$$\begin{aligned} p(r(L)) &\approx |(r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0)) \times (r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0))| \\ &= |r_u(\xi, v_0) \times r_v(u_0, \nu)| \approx |r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)|. \end{aligned}$$

Zato definiramo

Definicija 4.31. Naj bo $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija ploskve $P \subset \mathbb{R}^3$, kjer je U omejena odprta množica z volumnom in je $(u, v) \mapsto |r_u(u, v) \times r_v(u, v)|$ integrabilna funkcija na U. Potem je površina ploskve P enaka

$$p(P) = \int_U |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| du dv.$$

Trditev 4.32. *Površina ploskve ni odvisna od same parametrizacije ploskve.*

Dokaz. Naj bo $g : V \to U$ bijekcija razreda C^1, kjer je $\det Dg \neq 0$ na V in je V omejena množica z volumnom. Potem je

$$\tilde{r}(s, t) = r \circ g = r(u(s, t), v(s, t)) : V \to \mathbb{R}^3$$

regularna parametrizacija ploskve P in

$$\begin{aligned} \tilde{r}_s &= r_u \frac{\partial u}{\partial s} + r_v \frac{\partial v}{\partial s} \\ \tilde{r}_t &= r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_s \times \tilde{r}_t| &= \left| \left(r_u \frac{\partial u}{\partial s} + r_v \frac{\partial v}{\partial s}\right) \times \left(r_u \frac{\partial u}{\partial t} + r_v \frac{\partial v}{\partial t}\right) \right| \\ &= |r_u \times r_v| \left| \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} \right| = |r_u \times r_v| \, |\det Dg|. \end{aligned}$$

Izrek o substituciji nam da

$$\int_U |r_u \times r_v| \, du dv = \int_V |r_u \times r_v| \, |\det Dg| ds dt = \int_V |\tilde{r}_s \times \tilde{r}_t| \, ds dt.$$

□

S uporabo Lagrangejeve identitete je

$$|r_u \times r_v|^2 = (r_u \times r_v) \cdot (r_u \times r_v) = (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2.$$

Vpeljimo

$$\begin{aligned} E &= r_u r_u \\ G &= r_v r_v \\ F &= r_u r_v. \end{aligned}$$

Matriki

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

rečemo prva fundamentalna forma ploskve. Površino ploskve P lahko zapišemo kot

$$p(P) = \int_U \sqrt{|I|} dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

PRIMER 4.33. Izračunajmo površino sfere z radije R. Kroglo lahko parametriziramo z

$$r(u, v) = (R \cos v \cos u, R \cos v \sin u, R \sin v).$$

Potem je

$$\begin{aligned} E =& r_u r_u = |(-R \cos v \sin u, R \cos v \cos u, 0)|^2 = R^2 \cos^2 v \\ G =& r_v r_v = |(-R \sin v \cos u, -R \sin v \sin u, R \cos v)|^2 = R^2 \\ F =& r_u r_v = 0 \end{aligned}$$

in

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos v.$$

Zato je površina sfere z radijem R enaka

$$p = \int_U \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos v\, dvdu = 4\pi R^2.$$

□

PRIMER 4.34. Izračunajmo površino torusa z radijema a in c. Torus parametriziramo z

$$r(u, v) = ((c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, a \sin v),$$

Potem je

$$\begin{aligned} E &= r_u r_u = |(-(c + a \cos v) \sin u, (c + a \cos v) \cos u, 0)|^2 = (c + a \cos v)^2 \\ G &= r_v r_v = |(-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v)|^2 = a^2 \\ F &= r_u r_v = 0 \end{aligned}$$

in

$$\sqrt{EG-F^2} = a(c + a\cos v).$$

Zato je površina torusa enaka

$$\int_U \sqrt{EG-F^2}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(c + a\cos v)\,dvdu = 4\pi^2 ac = (2\pi a)(2\pi c).$$

□

4.7. Ploskovni integral skalarnega polja

Naj bo $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularno parametrizirana ploskev P in $f : V \to \mathbb{R}$ skalarno polje, kjer $V \subset \mathbb{R}^3$ vsebuje P. Ploskovni integral po P skalarnega polja f je definiran kot

$$\int_P f\,dS = \int_U f(r(u,v))|r_u \times r_v|dudv = \int_U f(r(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

OPOMBA 4.35. Izraz $ds = \sqrt{EG-F^2}dudv$ predstavlja infinitezimalno površino ploskve P. Integral torej smiselno "sešteje" vrednosti polja f vzdolž ploskve.

TRDITEV 4.36. *Ploskovni integral $\int_P f\,dS$ je neodvisen od parametrizacije ploskve P.*

DOKAZ. Dokaz je enak dokazu, da je površina ploskve neodvisna od parametrizacije. □

PRIMER 4.37. Izračunajmo z koordinato težišča zgornje hemisfere

$$S_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\},$$

to je

$$\frac{1}{p(S_+)}\int_S zdS.$$

Parametriziramo $r(u,v) = (\cos v\cos u, \cos v\sin u, \sin v)$, $u \in [0,2\pi)$, $v \in [0,\pi/2)$. Potem je $\sqrt{EG-F^2} = \cos v$. Zato je z-koordinata težišča

$$\frac{1}{p(S_+)}\int_S zdS = \frac{1}{2\pi)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin v\cos v\,dvdu = \frac{1}{2\pi}\pi = 1/2.$$

□

4.8. Ploskovni integral vektorskega polja

Naj bo $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularno parametrizirana ploskev P in $\vec{F} : V \to \mathbb{R}$ vektorsko polje, kjer $V \subset \mathbb{R}^3$ vsebuje P. Ploskovni integral po P vektorskega polja $\vec{F}$ je definiran kot

$$\int_P \vec{F}\,d\vec{S} = \int_U \vec{F}(r(u,v))(r_u \times r_v)dudv.$$

OPOMBA 4.38. Naj bo $r : U \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija ploskve P in $\vec{N}(u,v)$ enotski normalni vektor na P v točki $r(u,v)$. Potem je

$$d\vec{S} = (r_u \times r_v)dudv = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}|r_u \times r_v|dudv = \vec{N}(u,v)\, dS.$$

Zato je

$$\int_P \vec{F} d\vec{S} = \int_P (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dS. \tag{4}$$

Integral vektorskega polja torej "sešteje" dolžino projekcije vektorskega polja $\vec{F}$ v normalni smeri na ploskev. Če je na primer vektorsko polje v vsaki točki tangentno na ploskev, je integral enak 0.

TRDITEV 4.39. *Vrednost ploskovnega integrala $\int_P \vec{F}\, d\vec{S}$ je neodvisna od parametrizacij ploskve P, ki določajo isto orientacijo. Če dve parametrizaciji določata različni orientaciji ploskve, sta integrala nasprotno enaka.*

DOKAZ. Dokaz neposredno sledi iz neodvisnosti ploskovnega integrala skalarnega polja in (4). □

PRIMER 4.40. Izračunajmo ploskovni integral

$$\int_P \vec{F} d\vec{S},$$

kjer je $\vec{F} = (-x, -y, z)$ in $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1\}$. Ploskev je orientirana tako, da normala gleda navzgor.

Parametrizirajmo ploskev z

$$r(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Ker je ploskev graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, je

$$r_x \times r_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right).$$

Ker je zadnja komponenta pozitivna, normala gleda navzgor, orientacija je pravilna. Integral je enak

$$\begin{aligned}\int_P \vec{F} d\vec{S} &= \int_D \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right) \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dxdy \\ &= \int_D dxdy = \pi,\end{aligned}$$

saj je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$. □

4.9. Gaussova formula

Naj bo $V \subset \mathbb{R}^3$ omejeno območje. V ima gladek rob ∂V, če ga lahko napišemo kot unijo zaprtij regularno parametriziranih ploskev v $\mathbb{R}^3$. Integral vektorskega polja po robu takega območja je odvisen le od orientacije ∂V. Orientacijo izberemo tako, da normala kaže ven iz območja V.

Izrek 4.41. *Naj bo V omejeno območje v $\mathbb{R}^3$ s kosoma gladkim robom in $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje razreda $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici zaprtja $\bar{V}$. Potem velja*

$$\int_{\partial V} \vec{F} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dxdydz$$

Primer 4.42. Izračunajmo integral

$$\int_P \vec{F} d\vec{S},$$

kjer je P rob valja $V = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ in $\vec{F} = (\sin^2 y, e^x, z^2)$. Divergenca $\vec{F}$ je enaka $2z$. Po Gaussovem izreku je

$$\int_P \vec{F} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = 2 \int_V z\, dxdydz.$$

Ker je z-koordinata težišča V enaka $1/2$, je zadnji integral enak volumnu V, torej π. □