

Univerza v Ljubljani  
Pedagoška fakulteta  
Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet  
**REŠENE NALOGE IZ  
KOMPLEKSNE ANALIZE**

Študijsko gradivo  
Druga, popravljena in razširjena izdaja

Ljubljana, september 2008

# Vsebina

|  |            |
|--|------------|
| <b>Predgovor</b>   | <b>4</b>   |
| <b>Naloge z rešitvami</b>                                    | <b>5</b>   |
| 1. CAUCHY-RIEMANNOVA POGOJA . . . . .                        | 5          |
| 2. LINEARNA LOMLJENA FUNKCIJA . . . . .                      | 18         |
| 3. NEKATERE DRUGE PRESLIKAVE . . . . .                       | 25         |
| 4. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA . . . . .                        | 33         |
| 4. TAYLORJEVA IN LAURENTOVA VRSTA . . . . .                  | 39         |
| 5. RAČUNANJE INTEGRALOV . . . . .                            | 65         |
| <b>Bernoullijeva števila</b>                                 | <b>151</b> |
| 1. BERNOULLIJEVI POLINOMI IN BERNOULLIJEVA ŠTEVILA . . . . . | 151        |
| 2. POTENČNE VRSTE IN BERNOULLIJEVA ŠTEVILA . . . . .         | 157        |
| 3. ENAKOSTI Z BERNOULLIJEVIMI POLINOMI IN ŠTEVILI . . . . .  | 159        |
| 4. EULER-MACLAURINOVA SUMACIJSKA FORMULA . . . . .           | 163        |
| 5. BERNOULLIJEVA ŠTEVILA V VERJETNOSTNEM RAČUNU . . . . .    | 168        |
| 6. BERNOULLIJEVA ŠTEVILA V TEORJI ŠTEVIL . . . . .           | 170        |
| 7. NEKAJ NALOG . . . . .                                     | 171        |
| <b>Eulerjeva števila</b>                                     | <b>173</b> |
| <b>Funkcija Lobačevskega</b>                                 | <b>181</b> |
| 1. VPELJAVA S FOURIEROVO VRSTO . . . . .                     | 181        |
| 2. LASTNOSTI . . . . .                                       | 182        |
| 3. PRIMER UPORABE . . . . .                                  | 188        |
| 4. NEKAJ INTEGRALOV S FUNKCIJO GAMA . . . . .                | 192        |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| Iracionalnost nekaterih števil | 197 |
| Literatura                     | 201 |

## Predgovor

Za akademsko leto 2003/04 mi je bila na Pedagoški fakulteti v Ljubljani zapuščana polovica izbranih poglavij iz analize v tretjem letniku, to je *kompleksne analize*. Predmet mi ni bil nov, saj sem ga že predaval daljnega leta 1990/91. S podobnimi vsebinami sem se srečeval že na ljubljanski Fakulteti za strojništvo, kjer je kompleksna analiza del matematike v drugem letniku in jo inženirji uporabljajo tudi pri nekaterih predmetih mehanike. Kompleksna analiza ima v Sloveniji dolgo tradicijo, že od Plemljevih časov naprej. Kot študentu matematike mi jo je predaval prof. Ivan Vidav in mi je bila eden najljubših predmetov.

Pred vami je zbirka rešenih nalog, ki je nastajala zadnja leta, in ki naj bi omogočala, da se študent lažje znajde v kompleksni analizi in da se nauči nekaj njenih tipičnih prijemov. Drugi izdaji so dodane še naloge, ki so jih študentje reševali na kolokvijih in pisnih izpitih v letih 2006, 2007 in 2008. Na tem mestu se zahvaljujem študentu Mateju Rožiču, ki mi je pomagal prekontrolirati in oblikovati nekaj nalog. Zbirka se bo z leti, upam, še dograjevala.

Zbirko sem dopolnil s poglavjema o Bernoullijevih in Eulerjevih številih, o katerih sem govoril ob različnih priložnostih, največ v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, ter o funkciji Lobačevskega, ki sem jo spoznal pred leti na nekem seminarju.

Ljubljana, september 2008

Dr. Marko Razpet

# Naloge z rešitvami

## 1. CAUCHY-RIEMANNOVA POGOJA

1. Poiščite konstanti  $a$  in  $b$ , za kateri je funkcija

$$f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$$

povsod analitična. Za katero funkcijo gre?

### Rešitev

Da bo funkcija  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , kjer je  $z = x + iy$ , povsod analitična, morata njen realni in imaginarni del povsod zadoščati Cauchy–Riemannovima pogojema:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

V našem primeru imamo

$$u(x, y) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y), \quad v(x, y) = \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$$

s parcialnimi odvodi:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\sin x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \cos x(\operatorname{sh} y + a \operatorname{ch} y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \cos x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \sin x(\operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y).$$

Cauchy–Riemannova pogoja se potemtakem glasita:

$$-\sin x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) = \sin x(\operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y),$$

$$\cos x(\operatorname{sh} y + a \operatorname{ch} y) = -\cos x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y).$$

Očitno sta povsod izpolnjena samo v primeru  $a = b = -1$ . Tedaj je

$$f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y),$$

kar prepišemo v obliko:

$$f(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^{-y}e^{ix} = e^{-y+ix} = e^{i(x+iy)}.$$

Nazadnje je pred nami:

$$f(z) = e^{iz}.$$

2. Poiščite analitično funkcijo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

če poznate njen imaginarni del  $v(x, y) = 1 + x - 2xy$  in veste, da je  $f(0) = i$ .

### Rešitev

Najprej je treba preveriti, če funkcija  $v(x, y)$  zadošča Laplaceovi enačbi:

$$\Delta v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Najprej je

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 1 - 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2x,$$

nato pa še

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

tako da je res povsod  $\Delta v(x, y) = 0$ .

Realno komponento  $u(x, y)$  analitične funkcije nato dobimo iz Cauchy–Riemannovih pogojev (Glej 1. nalogo!):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2x.$$

Z integracijo dobimo

$$u(x, y) = - \int 2x \, dx = -x^2 + \varphi(y),$$

kjer je  $\varphi(y)$  poljubna odvedljiva funkcija. Toda veljati mora še drug Cauchy–Riemannov pogoj, iz katerega dobimo enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \varphi'(y) = -(1 - 2y) = 2y - 1,$$

iz katere sledi po integraciji izraz  $\varphi(y) = y^2 - y + c$ , kjer je  $c$  realna konstanta. Tako imamo

$$u(x, y) = -x^2 + y^2 - y + c,$$

torej

$$f(z) = -x^2 + y^2 - y + c + i(1 + x - 2xy).$$

Sedaj je treba izraz na desni strani izraziti s kompleksno spremenljivko  $z = x + iy$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= -x^2 - 2ixy - i^2y^2 + i(x + iy) + c + i = \\ &= i(x + iy) - (x + iy)^2 + c + i = iz - z^2 + c + i. \end{aligned}$$

Konstanto  $c$  določimo iz začetnega pogoja  $i = f(0) = c + i$ , iz katerega dobimo  $c = 0$ . Tako smo našli:  $f(z) = iz - z^2 + i$ .

3. Poiščite analitično funkcijo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

če poznate njen realni del  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - y$  in veste, da je  $f(0) = 0$ .

## Rešitev

Najprej je treba preveriti, če funkcija  $u(x, y)$  zadošča Laplaceovi enačbi.

Z lahkoto izračunamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -6xy - 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -6x.$$

Očitno je res povsod

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Imaginarni del  $v(x, y)$  funkcije  $f(z)$  dobimo iz Cauchy–Riemannovih pogojev. Iz

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2$$

dobimo z integracijo

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + \varphi(x),$$

kjer je  $\varphi(x)$  poljubna odvedljiva funkcija. Ker mora biti izpolnjen tudi pogoj

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 6xy + 1,$$

mora funkcija  $\varphi(x)$  zadoščati preprosti diferencialni enačbi  $\varphi'(x) = 1$ , ki ima splošno rešitev:  $\varphi(x) = x + c$ , kjer je  $c$  realna konstanta. Torej imamo  $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + x + c$ .

Sedaj poiščemo še  $f(z)$ :

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 + x + c) =$$

$$= (x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + (ix - y) + ic = (x + iy)^3 + i(x + iy) + ic = z^3 + iz + ic.$$

Iz začetnega pogoja  $f(0) = 0$  dobimo  $c = 0$ , tako da je rešitev naše naloge  $f(z) = z^3 + iz$ .

4. Poiščite analitično funkcijo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

če poznate njen realni del  $u(x, y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y$  in veste, da je  $f(\pi/2) = 0$ .

### Rešitev

Najprej je treba seveda preveriti, če funkcija  $u(x, y)$  zadošča Laplaceovi enačbi. Z lahkoto izračunamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y - x \sin x \operatorname{ch} y + y \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x \cos x \operatorname{sh} y + \sin x \operatorname{sh} y + y \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -2 \sin x \operatorname{ch} y - x \cos x \operatorname{ch} y - y \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = x \cos x \operatorname{ch} y + 2 \sin x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y.$$

Očitno je tudi tokrat povsod

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Imaginarni del  $v(x, y)$  funkcije  $f(z)$  izračunamo spet iz Cauchy–Riemannovih pogojev. Iz

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y - x \sin x \operatorname{ch} y + y \cos x \operatorname{sh} y$$

dobimo z integracijo

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \cos x \operatorname{sh} y - x \sin x \operatorname{sh} y + \cos x \int y \operatorname{sh} y \, dy = \\ &= \cos x \operatorname{sh} y - x \sin x \operatorname{sh} y + \cos x \left( y \operatorname{ch} y - \int \operatorname{ch} y \, dy \right) = \\ &= -x \sin x \operatorname{sh} y + y \cos x \operatorname{ch} y + \varphi(x), \end{aligned}$$

kjer je  $\varphi(x)$  poljubna odvedljiva funkcija. Ker mora biti izpolnjen tudi pogoj

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\sin x \operatorname{sh} y - x \cos x \operatorname{sh} y - y \sin x \operatorname{ch} y + \varphi'(x) = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -x \cos x \operatorname{sh} y - \sin x \operatorname{sh} y - y \sin x \operatorname{ch} y, \end{aligned}$$

mora biti  $\varphi'(x) = 0$ , torej  $\varphi(x) = c$ , kjer je  $c$  realna konstanta. Torej imamo  $v(x, y) = -x \sin x \operatorname{sh} y + y \cos x \operatorname{ch} y + c$ . Poiščimo še  $f(z)$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= (x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y) + i(-x \sin x \operatorname{sh} y + y \cos x \operatorname{ch} y + c) = \\ &= (x + iy) \cos x \operatorname{ch} y - i(x + iy) \sin x \operatorname{sh} y + ic = \\ &= (x + iy)(\cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y) + ic = \\ &= (x + iy)(\cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)) + ic = \\ &= (x + iy) \cos(x + iy) + ic = z \cos z + ic. \end{aligned}$$

Iz začetnega pogoja  $f(\pi/2) = 0$  dobimo  $c = 0$ , tako da je rešitev naše naloge  $f(z) = z \cos z$ .

5. Poiščite analitično funkcijo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , za katero povsod velja enakost

$$u(x, y) + v(x, y) = x^2 - y^2.$$

## Rešitev

Funkciji  $u(x, y)$  in  $v(x, y)$  sta za analitično funkcijo  $f(z)$  harmonični,  $\Delta u(x, y) = 0$ ,  $\Delta v(x, y) = 0$ , zato mora biti harmonična tudi funkcija  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . Kratek račun to potrdi. Nato iz dane enačbe sledita enačbi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= -2y,\end{aligned}$$

Z upoštevanjem Cauchy–Riemannovih pogojev dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= 2x, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= -2y,\end{aligned}$$

Ko zgornji enačbi seštejemo in odštejemo ter delimo z 2, dobimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = x - y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -x - y.$$

Z integracijo dobimo iz prve enačbe

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + \varphi(y),$$

kjer je  $\varphi(y)$  poljubna odvedljiva funkcija. Veljati pa mora še enakost

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -x + \varphi'(y) = -x - y,$$

iz katere dobimo  $\varphi'(y) = -y$  in nato

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c.$$

Torej imamo

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 + c, \quad v(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 - c.$$

Pri tem izračunamo  $v(x, y)$  iz enačbe  $v(x, y) = x^2 - y^2 - u(x, y)$ . Sedaj sestavimo funkcijo  $f(z)$  in dobimo:

$$f(z) = \frac{1}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) + i\frac{1}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) + (1-i)c = \frac{1}{2}(1+i)z^2 + (1-i)c.$$

Iskana funkcija je torej kvadratna funkcija

$$f(z) = \frac{1}{2}(1+i)z^2 + (1-i)c.$$

6. Poiščite analitično funkcijo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , če veste, da je

$$xu(x, y) - yv(x, y) = 1.$$

### Rešitev

Z odvajanjem najprej dobimo:

$$\begin{aligned} u(x, y) + x\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= 0, \\ x\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - v(x, y) - y\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= 0, \\ 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= 0 \\ -2\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Ko zadnji dve enačbi seštejemo, dobimo:

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\right) + x\Delta u(x, y) - y\Delta v(x, y) = 0.$$

Ker sta funkciji  $u(x, y)$  in  $v(x, y)$  za analitično funkcijo  $f(z)$  harmonični in izpolnjujeta Cauchy–Riemannova pogoja, je 0 tudi leva stran zadnje enačbe. Če upoštevamo Cauchy–Riemannova pogoja v prvih dveh enačbah, ki vsebujeta odvode prvega reda, dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned}x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -u(x, y), \\-y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= v(x, y).\end{aligned}$$

Sistem razrešimo na parcialna odvoda:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - 2xu(x, y)}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^2 - y^2)u(x, y) - x}{y(x^2 + y^2)}.$$

Prva od pravkar dobljenih diferencialnih enačb je linearna nehomogena:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{2xu(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Rešujemo jo po ustaljenem postopku: najprej pripadajočo homogeno, nato z variacijo konstante še nehomogeno.

Pripadajoča homogena enačba je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{2xu(x, y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Po ločitvi spremenljivk imamo najprej

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0,$$

nato pa po integraciji

$$\ln u(x, y) + \ln(x^2 + y^2) = \ln \varphi(y),$$

kjer je  $\varphi(y)$  poljubna odvedljiva funkcija. Torej je rešitev pripadajoče homogene enačbe:  $u(x, y) = \varphi(y)/(x^2 + y^2)$ . Splošno rešitev nehomogene enačbe iščemo z metodo variacije konstante v obliki:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Vstavimo jo v nehomogeno enačbo in dobimo

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

tako da je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 1$$

in zato  $\varphi(x, y) = x + \psi(y)$ , kjer je  $\psi(y)$  poljubna odvedljiva funkcija.

Tako smo našli obliko funkcije:

$$u(x, y) = \frac{x + \psi(y)}{x^2 + y^2}.$$

Da bi našli še funkcijo  $\psi(y)$ , upoštevajmo, da mora  $u(x, y)$  zadoščati tudi pogoju:

$$y(x^2 + y^2) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (x^2 - y^2)u(x, y) - x.$$

Najprej izračunamo

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\psi'(y)}{x^2 + y^2} - \frac{2y(x + \psi(y))}{(x^2 + y^2)^2}$$

in upoštevamo prejšnji pogoj:

$$y\psi'(y) - \frac{2y^2(x + \psi(y))}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 - y^2)(x + \psi(y))}{x^2 + y^2} - x,$$

Po poenostavitvi dobimo preprosto diferencialno enačbo

$$y\psi'(y) = \psi(y),$$

katere splošna rešitev je  $\psi(y) = cy$ , kjer je  $c$  realna konstanta. Realni del funkcije  $f(z)$  je torej

$$u(x, y) = \frac{x + cy}{x^2 + y^2}.$$

Funkcijo  $v(x, y)$  pa dobimo iz začetne enačbe  $xu(x, y) - yv(x, y) = 1$ :

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{xu(x, y) - 1}{y} = \\ &= \frac{x(x^2 + y^2)u(x, y) - (x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2)} = \frac{x(x + cy) - (x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2)} = \frac{cx - y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Končno lahko izrazimo:

$$f(z) = \frac{x + cy}{x^2 + y^2} + i \frac{cx - y}{x^2 + y^2} = \frac{(x - iy) + ic(x - iy)}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{1 + ic}{x + iy} = \frac{1 + ic}{z}.$$

Iskana funkcija je torej

$$f(z) = \frac{1 + ci}{z},$$

ki je analitična na vsej ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) razen v točki  $z = 0$ , ki je enostaven pol funkcije.

7. Dokažite naslednjo trditev: Analitična funkcija  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  je na polju  $\mathcal{D}$  konstantna natanko tedaj, ko je na tem polju funkcija  $|f(z)|$  konstantna.

### Dokaz

Če na polju  $\mathcal{D}$  velja  $f(z) = c$ , kjer je  $c$  kompleksna konstanta, potem je na tem polju  $|f(z)| = |c|$ , torej tudi konstanta.

Če je  $|f(z)| = 0$  na polju  $\mathcal{D}$ , potem je seveda na tem polju  $f(z) = 0$ .

Če je  $|f(z)| = k$  na polju  $\mathcal{D}$ , kjer je  $k > 0$  konstanta, potem je na tem polju

$$|f(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y) = k^2.$$

Z odvajanjem in krajšanjem z 2 dobimo:

$$u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + v(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0,$$

$$u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + v(x, y) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Upoštevajmo Cauchy–Riemannova pogoja in dobimo homogen sistem enačb

$$u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - v(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0,$$

$$v(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Ker je determinanta sistema

$$\begin{vmatrix} u(x, y) & -v(x, y) \\ v(x, y) & u(x, y) \end{vmatrix} = u^2(x, y) + v^2(x, y) = k^2$$

na polju  $\mathcal{D}$  različna od 0, ima sistem na tem polju samo trivialno rešitev

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0,$$

kar pomeni, da je funkcija  $u(x, y)$  konstanta, denimo  $\alpha$ . Ker je potem tudi

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0,$$

je tudi funkcija  $v(x, y)$  konstanta, denimo  $\beta$ . Potem pa je  $f(z) = \alpha + i\beta = c$  na polju  $\mathcal{D}$ , torej konstanta.

Lahko pa v primeru  $|f(z)| = k > 0$  računamo tudi drugače. Zagotovo tedaj na polju  $\mathcal{D}$  velja  $f(z) \neq 0$  in zato lahko zapišemo

$$f(z) = ke^{i\varphi(x, y)} = k(\cos \varphi(x, y) + i \sin \varphi(x, y)),$$

kjer je  $\varphi(x, y)$  na  $\mathcal{D}$  neka dovolj poveljna realna funkcija. Imamo torej funkciji

$$u(x, y) = k \cos \varphi(x, y), \quad v(x, y) = k \sin \varphi(x, y),$$

ki na  $\mathcal{D}$  izpolnjujeta Cauchy-Riemannova pogoja:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -k \sin \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - k \cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -k \sin \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + k \cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0,$$

Ko razrešimo dobljeni sistem enačb na oba parcialna odvoda, dobimo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0,$$

kar pomeni, da je  $\varphi(x, y)$  na  $\mathcal{D}$  realna konstanta, denimo  $\kappa$ . To pomeni, da je  $f(z) = ke^{i\kappa} = c$ , torej konstanta na  $\mathcal{D}$ .

8. Poiščite analitično funkcijo  $f(z)$ , za katero velja enakost  $|f(z)| = e^{x+y}$ . Pri tem je  $z = x + iy$ .

### Rešitev

Znano je, da je  $|e^z| = e^x$ . Prav tako najdemo:  $|e^{-iz}| = e^y$ . Torej velja:

$$|f(z)| = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = |e^z| \cdot |e^{-iz}| = |e^z \cdot e^{-iz}| = |e^{(1-i)z}|.$$

Iz tega sledi, da obstaja taka realna konstanta  $c$ , da velja:

$$f(z) = e^{ic} \cdot e^{(1-i)z} = e^{(1-i)z+ic}.$$

Lahko pa bi se lotili reševanja naloge tudi takole. Ker je  $e^{x+y} > 0$ , je  $f(z) \neq 0$  na vsej kompleksni ravnini in  $f(z)$  lahko zapišemo v polarni obliki:

$$f(z) = |f(z)| \cdot e^{i\varphi(x, y)} = e^{x+y}(\cos \varphi(x, y) + i \sin \varphi(x, y)),$$

kjer je  $\varphi(x, y)$  na vsej kompleksni ravnini neka dovolj poveljna realna funkcija. Imamo torej funkciji

$$u(x, y) = e^{x+y} \cos \varphi(x, y), \quad v(x, y) = e^{x+y} \sin \varphi(x, y),$$

ki povsod izpolnjujeta Cauchy-Riemannova pogoja:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0.$$

Ko vstavimo izraza za  $u(x, y)$  in  $v(x, y)$ , pokrajšamo in preuredimo, dobimo:

$$-\sin \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \sin \varphi(x, y) - \cos \varphi(x, y),$$

$$\cos \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - \sin \varphi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\sin \varphi(x, y) - \cos \varphi(x, y),$$

Razrešimo dobljeni sistem enačb na oba parcialna odvoda, pa dobimo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1.$$

Iz obeh enačb pa po ustaljenem postopku doženemo:  $\varphi(x, y) = y - x + c$ , kjer je  $c$  realna konstanta. Torej je iskana funkcija:

$$f(z) = e^{x+y} \cdot e^{i(y-x+c)} = e^{(1-i)z+c}.$$

## 2. LINEARNA LOMLJENA FUNKCIJA

1. Poiščite sliko premice  $(2-3i)z + (2+3i)\bar{z} = 1$  z obema kompozitumoma preslikav

$$f(z) = \frac{z+1}{z} \quad \text{in} \quad g(z) = \frac{z}{z+1}.$$

### Rešitev

Naj bo  $p(z) = f(g(z))$  in  $q(z) = g(f(z))$ . Preprost račun pokaže:

$$w = p(z) = \frac{2z+1}{z} \quad \text{in} \quad w = q(z) = \frac{z+1}{2z+1}.$$

Njuni inverzni preslikavi sta:

$$z = p^{-1}(w) = \frac{1}{w-2} \quad \text{in} \quad z = q^{-1}(w) = \frac{1-w}{2w-1}.$$

V prvem primeru se dana premica preslika v krivuljo:

$$(2-3i)\frac{1}{w-2} + (2+3i)\frac{1}{\bar{w}-2} = 1.$$

Po poenostavitvi dobimo:

$$(2-3i)(\bar{w}-2) + (2+3i)(w-2) = (w-2)(\bar{w}-2)$$

oziroma

$$|w|^2 - (4+3i)w - (4-3i)\bar{w} + 12 = 0.$$

To je enačba krožnice v ravnini kompleksnih števil ( $w$ ). Če postavimo  $w = u + iv$ , imamo najprej enačbo

$$u^2 + v^2 - 8u + 6v + 12 = 0,$$

ki jo prevedemo na kanonsko obliko:

$$(u-4)^2 + (v+3)^2 = 13.$$

Krožnica ima središče v točki  $w_0 = 4 - 3i$  in polmer  $r = \sqrt{13}$ .

V drugem primeru pa se dana premica preslika v krivuljo:

$$(2-3i)\frac{1-w}{2w-1} + (2+3i)\frac{1-\bar{w}}{2\bar{w}-1} = 1.$$

S poenostavitvijo dobimo:

$$(2-3i)(1-w)(2\bar{w}-1) + (2+3i)(1-\bar{w})(2w-1) = (2w-1)(2\bar{w}-1)$$

oziroma

$$12|w|^2 - (8+3i)w - (8-3i)\bar{w} + 5 = 0.$$

To je enačba krožnice v ravnini kompleksnih števil ( $w$ ). Če postavimo  $w = u + iv$ , imamo najprej enačbo

$$12(u^2 + v^2) - 16u + 6v + 5 = 0,$$

ki jo prevedemo na kanonsko obliko:

$$\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{13}{144}.$$

Krožnica ima središče v točki  $w_0 = (8 - 3i)/12$  in polmer  $r = \sqrt{13}/12$  v kompleksni ravnini ( $w$ ).

2. Poiščite sliko krožnice  $|z - 2| = 1$  s preslikavo

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

### Rešitev

Dano krožnico prepisemo v obliko

$$|z - 2|^2 = (z - 2)\overline{(z - 2)} = (z - 2)(\bar{z} - 2) = z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = 1,$$

nato izrazimo  $z = 1/w$ ,  $\bar{z} = 1/\bar{w}$ , vstavimo v predelano enačbo krožnice in dobimo:

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} - \frac{2}{w} - \frac{2}{\bar{w}} + 3 = 0.$$

Nato odpravimo ulomke:

$$1 - 2\bar{w} - 2w + 3w\bar{w} = 0.$$

Če dobljeno enačbo izrazimo z realnima koordinatama  $u$  in  $v$ , dobimo enačbo krožnice:

$$3(u^2 + v^2) - 4u + 1 = 0.$$

Prevedemo jo še na kanonsko obliko

$$\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{9},$$

iz katere je razvidno, da je slika dane krožnice spet krožnica, in sicer s središčem v točki  $w_0 = 2/3$  in radijem  $r = 1/3$  v ravnini kompleksnih števil ( $w$ ).

3. Poiščite sliko kvadranta  $\Re(z) > 0, \Im(z) > 0$  s preslikavo

$$w = f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Pri tem pomenita  $\Re(z)$  realni,  $\Im(z)$  pa imaginarni del kompleksnega števila  $z$ .

### Rešitev

Prvi del roba prvega kvadranta ima enačbo  $\Re(z) = (z + \bar{z})/2 = 0$  oziroma  $z + \bar{z} = 0$ , drugi del pa enačbo  $\Im(z) = -i(z - \bar{z})/2 = 0$  oziroma  $z - \bar{z} = 0$ . Preslikava iz ravnine kompleksnih števil  $z = x + iy$  v ravnino kompleksnih števil  $w = u + iv$  je dana z izrazom

$$w = f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

iz katerega najdemo obratno preslikavo

$$z = f^{-1}(w) = \frac{i(1 + w)}{1 - w}.$$

S kompleksno konjugacijo dobimo:

$$\bar{z} = \frac{-i(1 + \bar{w})}{1 - \bar{w}}.$$

Premica  $z + \bar{z} = 0$  se torej preslika v krivuljo, ki ima enačbo

$$\frac{i(1 + w)}{1 - w} + \frac{-i(1 + \bar{w})}{1 - \bar{w}} = 0,$$

premica  $z - \bar{z} = 0$  pa v krivuljo

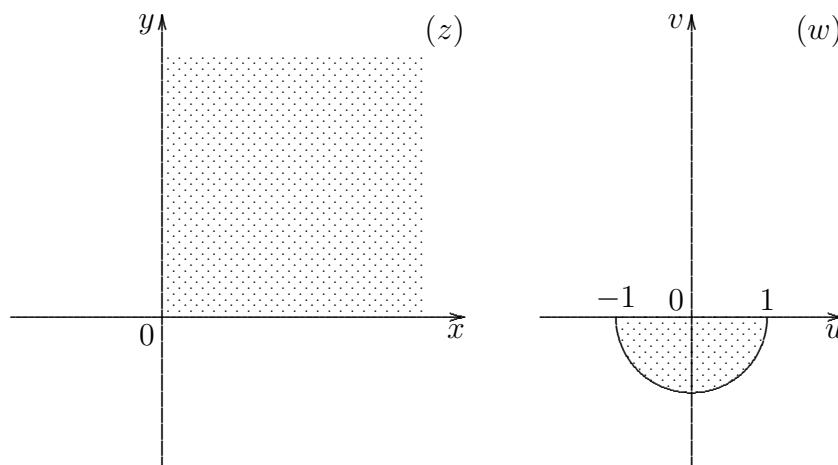
$$\frac{i(1+w)}{1-w} - \frac{-i(1+\bar{w})}{1-\bar{w}} = 0.$$

Po odpravi ulomkov in po poenostavitvi dobimo enačbi iskanih krivulj:

$$w - \bar{w} = 0, \quad w\bar{w} - 1 = 0.$$

Če ju izrazimo z realnima koordinatama  $u$  in  $v$ , dobimo:

$$v = 0, \quad u^2 + v^2 = 1.$$



To sta realna os in enotska krožnica v ravnini kompleksnih števil  $w = u + iv$ . Ker je točka  $z = 1 + i$  v prvem kvadrantu in njena slika  $f(1+i) = 1/(1+2i) = (1-2i)/5$  v tretjem kvadrantu, je slika celotnega prvega kvadranta s preslikavo  $f$  spodnja polovica odprtega enotskega kroga, in sicer brez premera med točkama  $-1$  in  $1$ .

4. Poiščite sliko kolobarja  $1 < |z| < 2$  s preslikavo

$$w = f(z) = \frac{z}{z-1}.$$

## Rešitev

Tako kot pri prejšnji nalogi izrazimo inverzno funkcijo in dobimo

$$z = f^{-1}(w) = \frac{w}{w-1}$$

in s kompleksno konjugacijo:

$$\bar{z} = \frac{\bar{w}}{\bar{w}-1}.$$

Enačbi notranje in zunanje mejne krožnice danega kolobarja sta

$$z\bar{z} = 1, \quad z\bar{z} = 4.$$

Enačbi s funkcijo  $f$  preslikanih krivulj pa sta

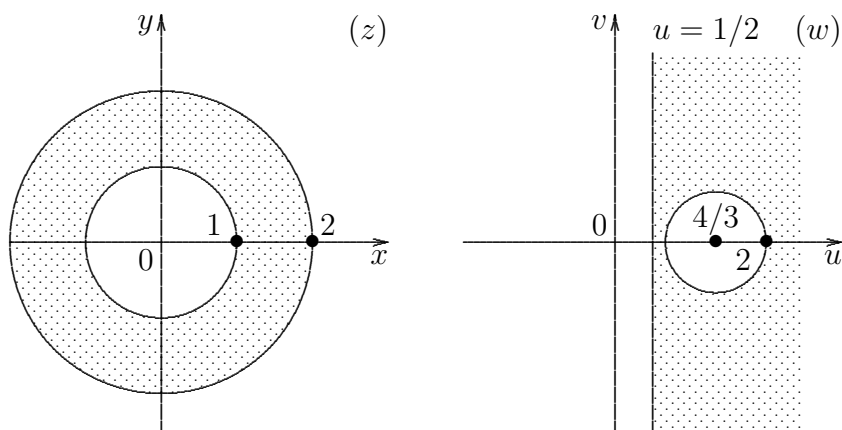
$$\frac{w}{w-1} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}-1} = 1, \quad \frac{w}{w-1} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}-1} = 4,$$

iz katerih po odpravi ulomkov in po poenostavitvi dobimo njuni enačbi:

$$w + \bar{w} - 1 = 0, \quad 3w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4 = 0.$$

Če ju izrazimo z realnima koordinatama  $u$  in  $v$ , dobimo:

$$2u = 1, \quad 3u^2 + 3v^2 - 8u + 4 = 0.$$



Točka  $z = 3/2$  je znotraj kolobarja in se preslika v  $w = f(3/2) = 3$  znotraj preslikanega območja. Prva krivulja je premica  $u = 1/2$ , druga pa krožnica

$$\left(u - \frac{4}{3}\right)^2 + v^2 = \frac{4}{9},$$

ki ima središče v točki  $w_0 = 4/3$  in radij  $r = 2/3$  v ravnini kompleksnih števil ( $w$ ).

5. Omejeno območje, ki je ograjeno s premicami

$$z - \bar{z} = 0, \quad z + \bar{z} = 0 \quad \text{in} \quad (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 4,$$

preslikajte s funkcijo

$$w = f(z) = \frac{4}{z}$$

iz kompleksne ravnine ( $z$ ) v kompleksno ravnino ( $w$ ). Kam se pri tem preslika točka  $z = (1 + i)/2$ ? Narišite!

### Rešitev

Očitno je premica  $z - \bar{z} = 0$  realna os, premica  $z + \bar{z} = 0$  pa imaginarna os v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ). S funkcijo  $w = f(z) = 4/z$  se preslikata v realno oziroma imaginarno os v ravnini kompleksnih števil ( $w$ ). Pri tem se točka  $z = 0$  preslika v točko  $w = \infty$ . Točka  $z = (1+i)/2$  pa se preslika v točko

$$w = \frac{8}{1+i} = \frac{8(1-i)}{2} = 4(1-i).$$

Premica  $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 4$  očitno poteka skozi točki  $z = 2$  in  $z = 2i$ , v ravnini ( $z$ ), tako da preslikujemo trikotnik  $\mathcal{D}$  z oglišči  $0, 2, 2i$ . Slike teh točk so zapored:  $2, -2i, \infty$ . Tretja podana premica se preslika v krivuljo

$$(1-i)\frac{4}{w} + (1+i)\frac{4}{\bar{w}} = 4$$

oziroma v

$$w\bar{w} = w + \bar{w} + i(w - \bar{w})$$

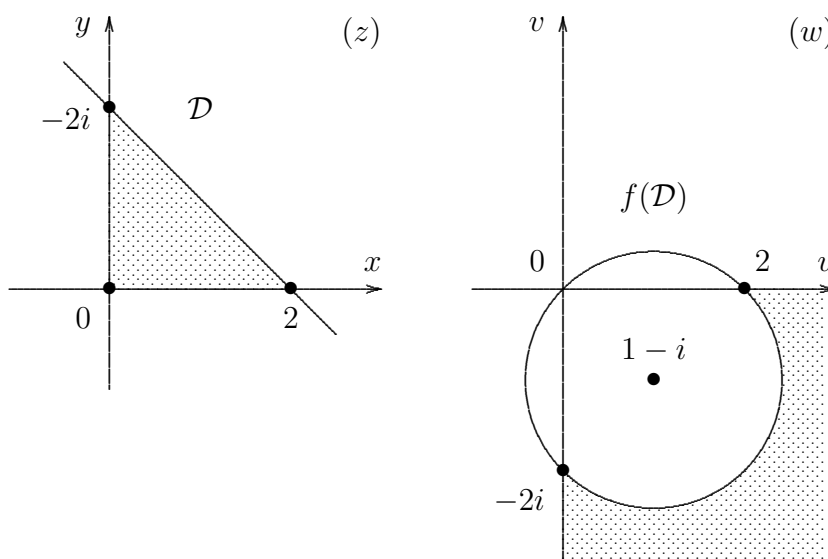
v ravnini  $(w)$ . Ko vstavimo  $w = u + iv$ , dobimo najprej

$$u^2 + v^2 = 2u - 2v$$

in nato po preoblikovanju

$$(u - 1)^2 + (v + 1)^2 = 2.$$

Dobljena krivulja je krožnica s središčem v točki  $w_0 = 1 - i$  in s polmerom  $r = \sqrt{2}$ . Preslikano območje  $f(\mathcal{D})$  je torej tisti neomejeni del 4. kvadranta ravnine  $(w)$ , ki je zunaj krožnice  $(u - 1)^2 + (v + 1)^2 = 2$ .



### 3. NEKATERE DRUGE PRESLIKAVE

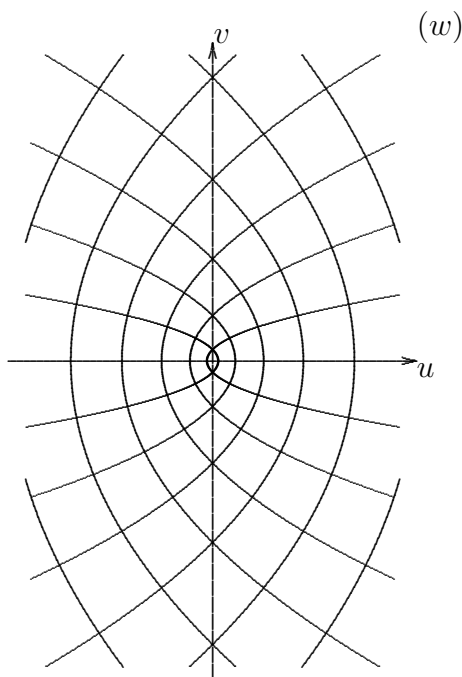
1. Preslikajte premice  $\Re(z) = a$  in  $\Im(z) = b$  s funkcijo  $f(z) = z^2$ .

## Rešitev

Premica prve vrste je vzporedna z realno osjo in ima enačbo  $z = a + iy$ , kjer je  $a$  realna konstanta,  $y$  pa realna spremenljivka. Preslika se v krivuljo  $w = u + iv = (a + iy)^2 = a^2 - y^2 + 2ayi$ . Dobljena krivulja ima parametrično obliko  $u = a^2 - y^2, v = 2ay$ . Za  $a \neq 0$  lahko parameter  $y$  izločimo in dobimo

$$v^2 = 4a^2(a^2 - u).$$

To je enačba parabole, ki ima realno os za svojo simetralo, gorišče pa je v točki  $w = 0$ . Za  $a = 0$  je slika negativna polovica realne osi. Parameter  $p$  parabole je ordinata točke v gorišču. Očitno je  $p = 2a^2$ .



Premica druge vrste je vzporedna z imaginarno osjo in ima enačbo  $z = x + ib$ , kjer je  $b$  realna konstanta,  $x$  pa realna spremenljivka. Preslika se v krivuljo  $w = u + iv = (x + ib)^2 = x^2 - b^2 + 2bxi$ . Dobljena krivulja ima

parametrično obliko  $u = x^2 - b^2, v = 2bx$ . Za  $b \neq 0$  lahko parameter  $x$  izločimo in dobimo

$$v^2 = 4b^2(b^2 + u).$$

To je enačba parabole, ki ima realno os za svojo simetralo, gorišče je prav tako v točki  $w = 0$ . Za  $b = 0$  je slika pozitivna polovica realne osi. Parameter  $p$  parabole je v tem primeru  $p = 2b^2$ .

2. Preslikajte krožnico  $|z| = r$  s funkcijo Žukovskega

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{k^2}{z} \right),$$

kjer je  $k$  pozitivna konstanta.

### Rešitev

Krožnico zapišimo v obliki  $z = re^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Dobimo

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left( re^{i\varphi} + \frac{k^2}{r} e^{-i\varphi} \right),$$

kar nam da iskano krivuljo v parametrični obliki:

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{k^2}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{k^2}{r} \right) \sin \varphi.$$

Takoj opazimo, da je iskana krivulja elipsa s polosema

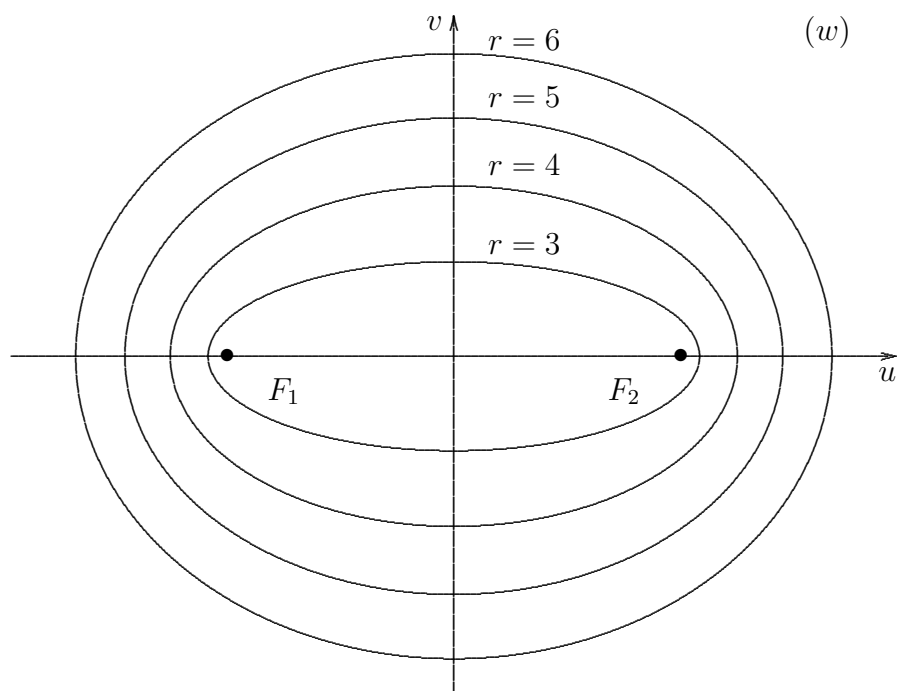
$$a(r) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{k^2}{r} \right), \quad b(r) = \frac{1}{2} \left( r - \frac{k^2}{r} \right), \quad r > k,$$

$$a(r) = \frac{1}{2} \left( r + \frac{k^2}{r} \right), \quad b(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{k^2}{r} - r \right), \quad r < k$$

v ravnini  $u, v$ . Izračunajmo linearno ekscentričnost  $c(r)$  elipse:

$$c^2(r) = a^2(r) - b^2(r) = r \cdot \frac{k^2}{r} = k^2.$$

To pomeni, da imajo vse dobljene elipse skupni gorišči v točkah  $F_1(-k, 0)$  in  $F_2(k, 0)$ . Pravimo, da so elipse konfokalne. Za  $r = k$  je elipsa degenerirana v daljico s krajiščema v  $(-k, 0)$  in  $(k, 0)$ . Pri zamenjavi  $r \rightarrow k^2/r$  se elipse ne spremenijo, pač pa se spremenijo njihove orientacije: če točka  $z$  kroži v pozitivni smeri po krožnici  $|z| = r$ , potem bo točka  $w$  potovala po elipsi tudi v pozitivni smeri, če je  $r > k$ , in v negativni smeri, če je  $0 < r < k$ .



3. S funkcijo Žukovskega

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{k^2}{z} \right),$$

kjer je  $k$  pozitivna konstanta, preslikajte krožnice, ki potekajo skozi točko  $k$  in imajo polmer  $R$  v ravnini  $(z)$ ,

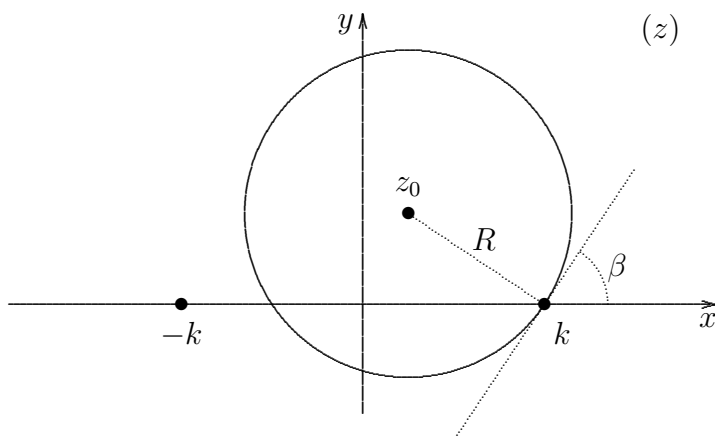
## Rešitev

Vzemimo, da tangenta na krožnico skozi točko  $k$  oklepa z realno osjo kot  $\beta$ . Potem je središče krožnice v točki  $z_0 = k + Re^{(\beta+\pi/2)i} = k + iRe^{i\beta}$ . Enačba take krožnice je očitno

$$|z - z_0| = R,$$

v parametrični obliki pa

$$z = k + iRe^{i\beta} + Re^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$



S funkcijo  $f(z)$  se ta krivulja preslika v krivuljo

$$w = \frac{1}{2} \left( k + iRe^{i\beta} + Re^{it} + \frac{k^2}{k + iRe^{i\beta} + Re^{it}} \right), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

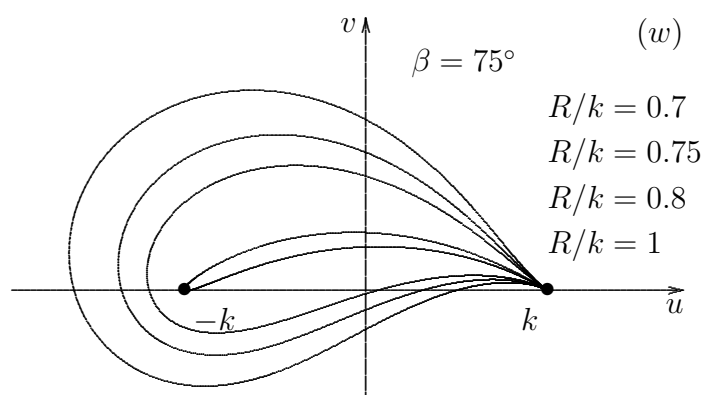
Realni in imaginarni del dobljenega izraza sta:

$$u = \frac{R}{2} \left[ \frac{k}{R} - \sin \beta + \cos t + \frac{k^2}{D} \left( \frac{k}{R} - \sin \beta + \cos t \right) \right],$$
$$v = \frac{R}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{D} \right) (\cos \beta + \sin t),$$

kjer je

$$D = k^2 + 2R^2 - 2kR \sin \beta + 2kR \cos t + 2R^2 \sin(t - \beta).$$

S spreminjanjem parametrov  $R$  in  $\beta$  dobimo prav zanimive krivulje. Nekaj jih kaže slika. Nekatere krivulje imajo tako zvito obliko, ki nas spominja na presek letalskega krila.



4. S funkcijo Žukovskega

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{k^2}{z} \right),$$

kjer je  $k$  pozitivna konstanta, preslikajte krožnice, ki potekajo skozi točki  $-k$  in  $k$  ravnine ( $z$ ).

### Rešitev

Krožnica, ki poteka skozi točki  $-k$  in  $k$ , ima središče  $z_0$  na imaginarni osi v ravnini ( $z$ ). Torej  $z_0 = ci$ , kjer je  $c$  realno število. Enačba take krožnice je očitno

$$|z - ci| = |k - ci| = \sqrt{k^2 + c^2} = R,$$

v parametrični obliki pa

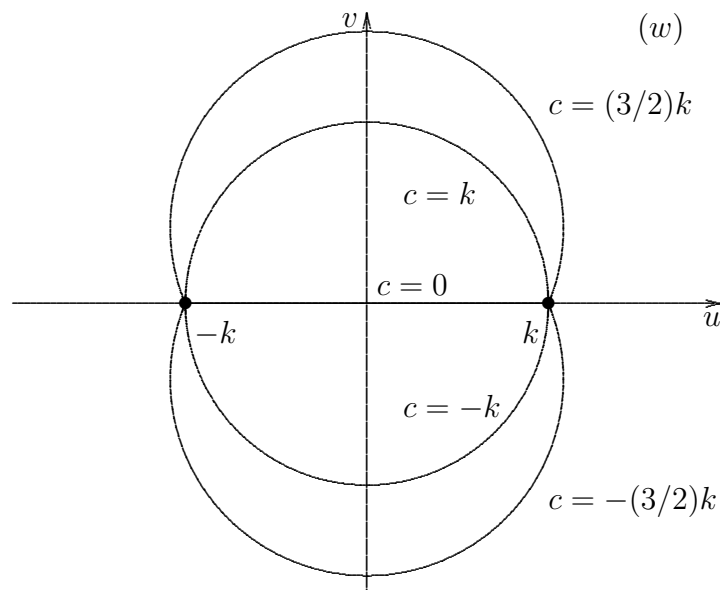
$$z = ci + Re^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

S funkcijo  $f(z)$  se ta krivulja preslika v krivuljo

$$w = \frac{1}{2} \left( ci + Re^{it} + \frac{k^2}{ci + Re^{it}} \right), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Preslikana krivulja poteka skozi negibni točki funkcije  $f(z)$ , to sta točki  $k$  in  $-k$  ravnine ( $w$ ). Realni in imaginarni del dobljenega izraza sta:

$$u = \frac{R^2(c \sin t + R) \cos t}{c^2 + 2cR \sin t + R^2}, \quad v = \frac{c(R \sin t + c)^2}{c^2 + 2cR \sin t + R^2}.$$



Najvišja točka na krožnici  $|z - ic| = R$  je  $z = i(c + R)$ . Ta se preslika v

$$w = f(i(c + R)) = \frac{1}{2} \left( i(c + R) + \frac{R^2 - c^2}{i(c + R)} \right) = ci.$$

Prav tako se najnižja točka na krožnici  $|z - ic| = R$ , to je  $z = i(c - R)$ , preslika v

$$w = f(i(c - R)) = \frac{1}{2} \left( i(c - R) + \frac{R^2 - c^2}{i(c - R)} \right) = ci.$$

Ko točka  $z$  potuje po zgornjem loku krožnice  $|z - ic| = R$  od točke  $k$  proti  $-k$ , potuje  $w = f(z)$  po krivulji od  $k$  prek  $ci$  proti  $-k$ , ko pa  $z$  potuje naprej od  $-k$  proti  $k$  po spodnjem loku krožnice, potuje  $w$  nazaj po isti krivulji od  $-k$  prek  $ic$  proti  $k$ . Preslikana krivulja ni več enostavno sklenjena.

V primeru  $c = 0$  je preslikana krivulja izrojena v daljico s krajiščema  $-k$  in  $k$ .

5. Preslikaj krožnico  $|z| = 1$  s funkcijo

$$w = f(z) = \frac{z}{1 + z + z^2}.$$

### Rešitev

Funkcija ima enostavna pola v točkah

$$z_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2 = e^{2\pi i/3}, \quad z_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2 = e^{-2\pi i/3}.$$

Ker je zaradi  $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ , velja povsod razen v polih:

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= \frac{z}{1 + z + z^2} - \frac{\bar{z}}{1 + \bar{z} + \bar{z}^2} = \frac{z(1 + \bar{z} + \bar{z}^2) - \bar{z}(1 + z + z^2)}{(1 + z + z^2)(1 + \bar{z} + \bar{z}^2)} = \\ &= \frac{z + z\bar{z} + (z\bar{z})\bar{z} - \bar{z} - \bar{z}z - (z\bar{z})z}{(1 + z + z^2)(1 + \bar{z} + \bar{z}^2)} = \frac{z + 1 + \bar{z} - \bar{z} - 1 - z}{(1 + z + z^2)(1 + \bar{z} + \bar{z}^2)} = 0. \end{aligned}$$

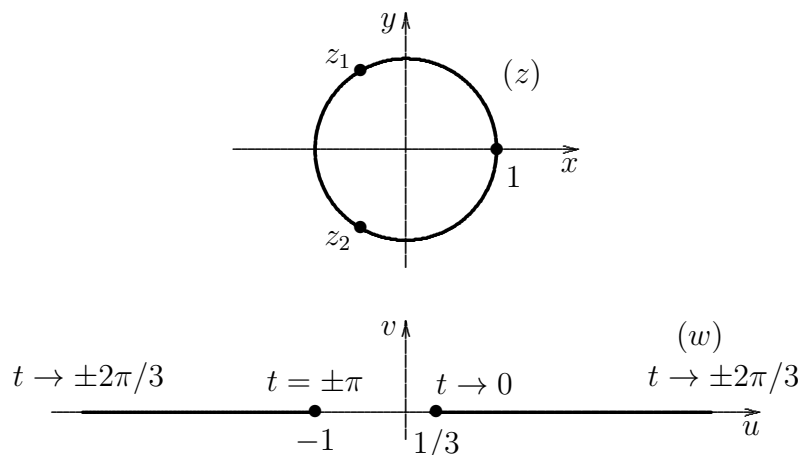
Torej je slika krožnice na realni osi. Pri tem se točka  $z = 1$  preslika v točko  $w = 1/3$ . Da bi ugotovili potek točke  $w$  po realni osi, zapišemo krožnico  $|z| = 1$  v obliki  $z = e^{it}$ ,  $-\pi < t \leq \pi$ , in dobimo:

$$f(e^{it}) = \frac{e^{it}}{1 + e^{it} + e^{2it}} = \frac{e^{it}(e^{it} - 1)}{e^{3it} - 1} = \frac{\sin(t/2)}{\sin(3t/2)}, \quad t \neq 0, \pm 2\pi/3.$$

Analiza funkcije

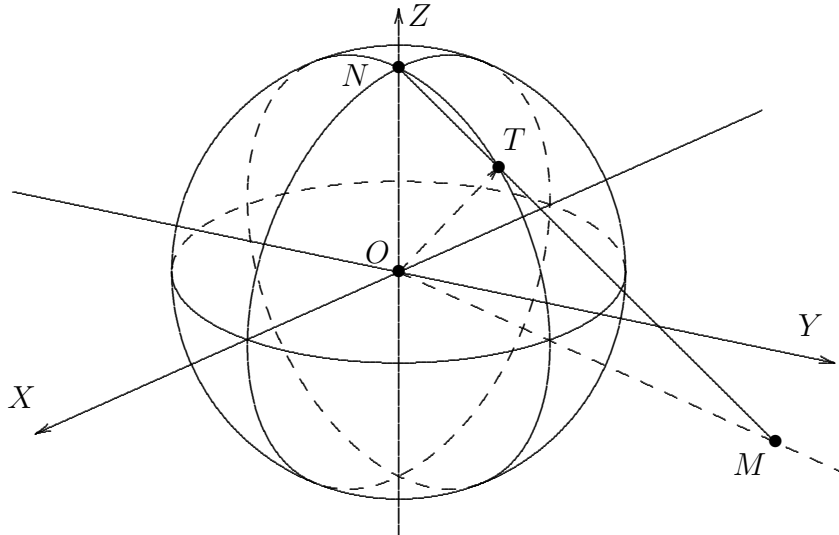
$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t/2)}{\sin(3t/2)}, & t \neq 0, \pm 2\pi/3, \\ \frac{1}{3}, & t \neq \pm 2\pi/3 \end{cases}$$

na intervalu  $[-\pi, \pi]$  pokaže, da ima le-ta lokalni minimum  $1/3$  pri  $t = 0$  in lokalna maksimuma  $-1$  pri  $t = \pm\pi$ , pri  $\pm 2\pi/3$  pa enostavna pola. Slika krožnice  $|z| = 1$  je torej unija dveh disjunktnih poltrakov na realni osi v ravnini  $(w)$ .



#### 4. STEREOGRAFSKA PROJEKCIJA

1. V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu  $XYZ$  je enotska sfera  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  brez severnega pola  $N(0, 0, 1)$ . Na ravnini  $XY$  izberemo točko  $M(x, y)$ . Skozi točki  $M$  in  $N$  potegnemo premico  $p$ , ki prebode sfero v točki  $T(X, Y, Z)$ , v stereografski projekciji točke  $M(x, y)$ :  $\sigma(M) = T$ . Izpeljite formule, ki izražajo koordinate  $X, Y, Z$  s koordinatama  $x, y$  in obratno.



### Rešitev

Enačbo premice  $p$  s smernim vektorjem  $\vec{s} = (X, Y, Z - 1)$  in začetnim vektorjem  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  lahko hitro zapišemo v vektorski obliki:

$$\vec{r} = \vec{k} + \lambda \vec{s}.$$

Pri tem je  $\lambda$  realno število. V koordinatah se premica  $p$  glasi:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(X, Y, Z - 1).$$

Od tod pa dobimo relacije:

$$x = \lambda X, \quad y = \lambda Y, \quad z = 1 + \lambda(Z - 1).$$

Tretja koordinata točke  $M$  je nič:

$$z = 0, \quad 0 = 1 + \lambda(Z - 1).$$

Dobimo:  $\lambda = 1/(1 - Z)$ . Koordinati točke  $M$  sta zato:

$$x = \frac{X}{1 - Z}, \quad y = \frac{Y}{1 - Z}.$$

To sta iskani formuli.

Sedaj pa zapišimo koordinate točke  $T$ :

$$X = (1 - Z)x, \quad Y = (1 - Z)y.$$

Uporabimo enačbo  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  oziroma  $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$ :

$$(1 - Z)^2 x^2 + (1 - Z)^2 y^2 = 1 - Z^2 = (1 - Z)(1 + Z).$$

Pri tem je  $1 - Z \neq 0$ , ker smo sferi odvzeli točko  $N(0, 0, 1)$ . Zato lahko zgornjo enačbo delimo z  $1 - Z$  in dobimo:

$$(1 - Z)x^2 + (1 - Z)y^2 = 1 + Z.$$

Izrazimo iz dobljene enačbe koordinato  $Z$ . Po preureditvi členov imamo najprej enačbo

$$-Z(x^2 + y^2 + 1) = 1 - x^2 - y^2,$$

iz katere izrazimo

$$Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Da določimo še preostali dve koordinati  $X$  in  $Y$ , najprej izrazimo:

$$1 - Z = 1 - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 + 1 - x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Nazadnje dobimo iskane formule:

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

## Dopolnilo

Limitni proces  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  ima za posledico  $M \rightarrow N$ . Če ravnino  $XY$  kompaktificiramo z neskončno oddaljeno točko  $\infty$ , potem lahko stereografsko projekcijo razširimo tudi na to točko, tako da postavimo  $\sigma(\infty) = N$ . Tako dobimo bijektivno preslikavo  $\sigma$  med razširjeno ravnino  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  in enotsko sfero s severnim polom vred.

2. Dokazite, da se vsaka premica  $p$  ravnine  $XY$  pri stereografski projekciji  $\sigma$  preslika na krožnico skozi severni pol  $N$  enotske sfere.

## Rešitev

Naj bo  $aX + bY + c = 0$  enačba premice  $p$  v ravnini  $XY$ , pri čemer je  $a^2 + b^2 > 0$ . Če je poljubna točka  $M(x, y)$  na premici  $p$ , potem velja  $ax + by + c = 0$  in po formulah za stereografsko projekcijo dobimo:

$$a \frac{X}{1-Z} + b \frac{Y}{1-Z} + c = 0.$$

Če je  $M$  končna točka, potem  $Z \neq 1$  in koordinate točke  $T = \sigma(M)$  ustrežajo enačbama

$$aX + bY + c(1-Z) = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

kar pomeni, da je  $T$  hkrati na preseku ravnine skozi severni pol  $N$  in sfere, torej na sferini krožnici, ki poteka skozi točko  $N$ . Točka  $\infty$  premice  $p$  pa se preslika ravno v  $N$ , tako da se res vsa premica  $p$  preslika na sferino krožnico, ki poteka skozi severni pol  $N$ .

S tem smo dokazali, da se premica pri stereografski projekciji preslika na krožnico skozi severni pol sfere.

3. Dokažite, da vsaka krožnica ravnine  $XY$  pri stereografski projekciji  $\sigma$  preslika na krožnico, ki ne poteka skozi severni pol  $N$  enotske sfere.

### Rešitev

Naj bo  $X^2 + Y^2 + 2aX + 2bY + c = 0$  enačba krožnice  $k$  v ravnini  $XY$ .

Če je poljubna točka  $M(x, y)$  na krožnici  $k$ , potem velja  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  in po formulah za stereografsko projekcijo dobimo:

$$\frac{X^2}{(1-Z)^2} + \frac{Y^2}{(1-Z)^2} + 2a\frac{X}{1-Z} + 2b\frac{Y}{1-Z} + c = 0.$$

Krožnica  $k$  ne vsebuje točke  $\infty$  in zato  $Z \neq 1$ . Ko odpravimo ulomke, dobimo:

$$X^2 + Y^2 + 2aX(1-Z) + 2bY(1-Z) + c(1-Z)^2 = 0.$$

Ker hkrati velja  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , imamo

$$1 - Z^2 + 2aX(1-Z) + 2bY(1-Z) + c(1-Z)^2 = 0$$

in po krajšanju s faktorjem  $1 - Z \neq 0$

$$1 + Z + 2aX + 2bY + c(1-Z) = 0$$

oziroma po preureditvi

$$2aX + 2bY + (1-c)Z + (1+c) = 0.$$

To pa je enačba ravnine, v kateri leži točka  $T$  in v kateri ne leži točka  $N$ . Hkrati pa je  $T$  na sferi  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , to se pravi,  $T$  je na sferini krožnici, ki ne poteka skozi njen severni pol  $N$ .

S tem smo dokazali, da se krožnica pri stereografski projekciji preslika na krožnico, ki ne gre skozi severni pol sfere.

4. Dokažite, da se okolica točke  $\infty$  pri stereografski projekciji preslika na sfero v okolico severnega pola.

### Rešitev

Brez škode za splošnost naj bo okolica točke  $\infty$  množica točk  $\mathcal{O}_\infty = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2, X^2 + Y^2 > R^2\}$ . Krožnica  $X^2 + Y^2 = R^2$  se očitno preslika na krožnico, ki je presek sfere  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  in ravnine  $Z = (R^2 - 1)/(R^2 + 1)$ . Pri tem pa se točka  $\infty$  preslika v severni pol  $N$ . Množica  $\mathcal{O}_\infty$  se torej preslika na sferino kapico višine  $2/(R^2 + 1)$  s središčem v točki  $N$ , ki je okolica  $\mathcal{O}_N$  severnega pola  $N$ .

### Dopolnilo

Krožnica  $X^2 + Y^2 = 1$  v ravnini  $XY$  je negibna množica stereografske projekcije, kajti za  $R = 1$  dobimo  $Z = 0$  na sferi  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , to se pavi zopet krožnico  $X^2 + Y^2 = 1$ .

5. S stereografsko projekcijo se točke  $M$  z racionalnimi koordinatami preslikajo v točke  $T$  prav tako z racionalnimi koordinatami na enotski sferi. Poišči s to ugotovitvijo nekaj pitagorejskih četverok.

### Rešitev

Izberimo na primer  $M(26, 27)$ . Po transformacijskih formulah dobimo:

$$\begin{aligned} X &= \frac{52}{26^2 + 27^2 + 1} = \frac{52}{1406} = \frac{26}{703}, \\ Y &= \frac{54}{26^2 + 27^2 + 1} = \frac{54}{1406} = \frac{27}{703}, \\ Z &= \frac{26^2 + 27^2 - 1}{26^2 + 27^2 + 1} = \frac{1404}{1406} = \frac{702}{703}. \end{aligned}$$

Ker velja

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{26^2}{703^2} + \frac{27^2}{703^2} + \frac{702^2}{703^2} = 1,$$

velja tudi

$$26^2 + 27^2 + 702^2 = 703^2,$$

kar pomeni, da je  $(26, 27, 702, 703)$  pitagorejska četverka.

Nadaljujmo s primerom  $M(57, 91)$ . Po transformacijskih formulah dobimo:

$$\begin{aligned} X &= \frac{114}{57^2 + 91^2 + 1} = \frac{114}{11531}, \\ Y &= \frac{182}{57^2 + 91^2 + 1} = \frac{182}{11531}, \\ Z &= \frac{57^2 + 91^2 - 1}{57^2 + 91^2 + 1} = \frac{11529}{11531}. \end{aligned}$$

Ker velja

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{114^2}{11531^2} + \frac{182^2}{11531^2} + \frac{11529^2}{11531^2} = 1,$$

velja tudi

$$114^2 + 182^2 + 11529^2 = 11531^2,$$

kar pomeni, da je  $(114, 182, 11529, 11531)$  tudi pitagorejska četverka.

Lahko pa jih najdemo še in še.

#### 4. TAYLORJEVA IN LAURENTOVA VRSTA

1. Izračunajte konvergenčni radij potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n z^n}{n!}.$$

#### Rešitev

Potenčna vrsta ima splošni koeficient  $c_n = n^n/n!$ . Po Cauchy-Hadamardovi formuli je konvergenčni radij  $R$  potenčne vrste dan s formulo:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

V našem primeru obstaja kar limita, ki jo izračunamo s Stirlingovo formulo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\vartheta_n/(12n)}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n} e^{\vartheta_n/(12n^2)}} = e. \end{aligned}$$

Pri tem je  $0 < \vartheta_n < 1$ . Upoštevali smo vmesno limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(2\pi n)}{2n}} = e^0 = 1.$$

Torej je  $R = 1/e$ .

2. Poiščite konvergenčni radij potenčne vrste

$$1 + \frac{2}{3}z + \left(\frac{3}{2}z\right)^2 + \left(\frac{2}{3}z\right)^3 + \left(\frac{3}{2}z\right)^4 + \dots$$

### Rešitev

Dana potenčna vrsta ima koeficiente  $c_n$ , pri katerih moramo obravnavati posebej lihe in sode indekse:

$$c_{2k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}, \quad c_{2k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zato je

$$\sqrt[n]{c_n} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n = 2k, \\ \frac{2}{3}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Torej imamo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{3}{2}$$

in konvergenčni polmer vrste je  $R = 2/3$ .

3. Katera cela funkcija  $f(z)$  zadošča za vsak kompleksen  $z$  enačbi:

$$f(2z) = 2f(z).$$

### Rešitev

Funkcija ima razvoj v potenčno vrsto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

katere konvergenčni radij je neskončen. Potem velja tudi razvoj v potenčno vrsto, ko  $z$  nadomestimo z  $2z$ :

$$f(2z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n z^n.$$

Iz zahtevane enakosti torej sledi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n z^n.$$

Torej morajo veljati enačbe

$$2^n c_n = 2c_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Iz njih razberemo, da je  $c_n = 0$  za vse  $n \neq 1$ , koeficient  $c_1$  pa je lahko katerokoli kompleksno število, denimo  $c_1 = c$ . Rešitev je nešteto, vse so preproste linearne funkcije:

$$f(z) = cz.$$

4. Katera cela funkcija  $f(z)$  zadošča za vsak kompleksen  $z$  enačbi:

$$f(2z) = (f(z))^2.$$

## Rešitev

Zopet zapišemo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad f(2z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n z^n,$$

$$(f(z))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) z^n.$$

Iz zahteve  $f(2z) = (f(z))^2$  dobimo sistem enačb:

$$\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = 2^n c_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Za  $n = 0$  mora veljati  $c_0^2 = c_0$ , zato imamo dve možnosti:  $c_0 = 0$  in  $c_0 = 1$ .

Če je  $c_0 = 0$ , potem iz enačbe  $2c_0c_1 = 2c_1$  dobimo  $c_1 = 0$ , iz enačbe  $2c_0c_2 + 2c_1^2 = 4c_2$  pa  $c_2 = 0$ . Korak za korakom spoznamo, da je tedaj  $c_n = 0$  za vse indekse  $n$  in ena od rešitev je  $f(z) = 0$ .

Če pa je  $c_0 = 1$ , potem je  $c_1$  poljubno kompleksno število, recimo  $c_1 = c$  in  $c_2 = c^2/2$ . Iz enačbe  $2c_0c_3 + 2c_1c_2 = 8c_3^2$  dobimo  $c_3 = c^3/6$ , tako da domnevamo, da je  $c_n = c^n/n!$  za vsak  $n \geq 1$ . Domneva je pravilna, ker velja:

$$\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{c^k c^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{c^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{c^n}{n!} 2^n = 2^n c_n.$$

Tako smo našli drugo rešitev:

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n z^n}{n!} = e^{cz}.$$

5. Katera cela funkcija  $f(z)$  zadošča enačbi

$$f(z+w) = f(z)f(w)?$$

### Rešitev

Za  $w = 0$  mora veljati:  $f(z) = f(z)f(0)$  za vsak kompleksen  $z$ . Prav tako mora veljati enačba za  $w = z$ , torej  $f(2z) = (f(z))^2$ . Za  $z = 0$  tudi:  $f(0) = (f(0))^2$ . Torej je možno dvoje: ali je  $f(0) = 0$  ali pa je  $f(0) = 1$ . V prvem primeru dobimo trivialno rešitev  $f(z) = 0$ .

V drugem primeru,  $f(0) = 1$ , pa se lahko skličemo na rezultat prejšnje naloge, ki pove, da je edina cela funkcija  $f(z)$ , ki zadošča enačbi  $f(2z) = (f(z))^2$ , oblike  $f(z) = e^{cz}$ , kjer je  $c$  poljubno kompleksno število.

6. Poiščite stopnjo  $n$  ničle  $z = 0$  funkcije

$$f(z) = z^2(e^{z^2} - 1).$$

### Rešitev

Najprej je seveda  $f(0) = 0$ , kar pomeni, da je  $z = 0$  res ničla funkcije  $f(z)$ . Uporabimo razvoj v potenčno vrsto

$$e^{z^2} = 1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots,$$

ki konvergira na vsej kompleksni ravnini ( $z$ ). Potem imamo

$$f(z) = \frac{z^4}{1!} + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^8}{3!} + \dots = z^4 g(z),$$

kjer je

$$g(z) = \frac{1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots$$

analitična funkcija, ki za  $z = 0$  ni enaka 0:  $g(0) = 1$ . Torej ima funkcija  $f(z)$  v točki  $z = 0$  ničlo stopnje  $n = 4$ .

7. Preverite, da je kompleksno število  $z = 0$  ničla funkcije

$$f(z) = 24(\cos(z^2) - 1) + z^4(12 - z^4)$$

in nato z njenim razvojem v potenčno vrsto določite stopnjo  $n$  te ničle.

### Rešitev

Očitno je  $f(0) = 0$ , tako da je  $z = 0$  res ničla funkcije  $f(z)$ . Z razvojem v potenčno vrsto okrog točke  $z = 0$  dobimo vrsto

$$\cos(z^2) = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \dots,$$

ki konvergira na vsej kompleksni ravnini. Torej imamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= 24 \left( -\frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \dots \right) + 12z^4 - z^8 = \\ &= -\frac{1}{30}z^{12} + Az^{16} + \dots = z^{12}g(z), \end{aligned}$$

pri čemer je  $g(z)$  analitična funkcija z lastnostjo  $g(0) \neq 0$ . Torej je  $z = 0$  ničla stopnje  $n = 12$  funkcije  $f(z)$ .

8. Poiščite stopnjo  $n$  ničle  $z = 0$  funkcije

$$f(z) = 6 \sin(z^3) + z^3(z^6 - 6).$$

### Rešitev

Najprej je seveda spet  $f(0) = 0$ , kar pomeni, da je  $z = 0$  tudi tokrat ničla funkcije  $f(z)$ . Uporabimo znani razvoj sinusne funkcije v potenčno vrsto

$$\sin(z^3) = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \dots,$$

ki konvergira na vsej kompleksni ravnini ( $z$ ). Potem lahko izrazimo:

$$f(z) = 6z^3 - z^9 + \frac{6z^{15}}{5!} - \frac{6z^{21}}{7!} + \dots + z^9 - 6z^3 = z^{15}g(z),$$

kjer je

$$g(z) = \frac{6}{5!} - \frac{6z^6}{7!} + \dots$$

analitična funkcija, ki za  $z = 0$  ni enaka 0:  $g(0) = 6/5!$ . Torej ima funkcija  $f(z)$  v točki  $z = 0$  ničlo stopnje  $n = 15$ .

9. Poiščite stopnjo  $n$  ničle  $z = 0$  funkcije

$$f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}.$$

### Rešitev

Zapišimo:

$$f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z} = e^{\operatorname{tg} z}(e^{\sin z - \operatorname{tg} z} - 1).$$

Najprej bomo razvili eksponent  $\sin z - \operatorname{tg} z$  v potenčno vrsto okrog točke  $z = 0$ , ki je očitno ničla funkcije  $f(z)$ . Razvoja sinusne in kosinusne funkcije sta znana, funkcija tangens, ki je liha, pa ima razvoj oblike:

$$\operatorname{tg} z = az + bz^3 + cz^5 + \dots$$

Ker je  $\sin z = \operatorname{tg} z \cdot \cos z$ , mora v okolici točke  $z = 0$  veljati enakost:

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = (az + bz^3 + cz^5 + \dots) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right).$$

Desno stran zmnožimo in zapišimo do petih potenc:

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = az + \left(b - \frac{a}{2}\right)z^3 + \left(c - \frac{b}{2} + \frac{a}{24}\right)z^5 + \dots$$

S primerjavo koeficientov potenčnih vrst na levi in desni strani enakosti dobimo sistem enačb

$$a = 1, \quad b - \frac{a}{2} = -\frac{1}{6}, \quad c - \frac{b}{2} + \frac{a}{24} = \frac{1}{120}$$

z rešitvijo:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{2}{15}.$$

Torej se razvoj funkcije tangens začne takole:

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots$$

Tako imamo

$$\sin z - \operatorname{tg} z = -\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{8}z^5 + \dots$$

in

$$e^{\sin z - \operatorname{tg} z} - 1 = (\sin z - \operatorname{tg} z) + \frac{(\sin z - \operatorname{tg} z)^2}{2!} + \dots = -\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{8}z^5 + \dots$$

Torej lahko končno zapišemo:

$$f(z) = z^3 e^{\operatorname{tg} z} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}z^2 + \dots \right) = z^3 g(z),$$

kjer je funkcija  $g(z)$  analitična v okolici točke  $z = 0$  in  $g(0) = -1/2$ .

Torej ima funkcija  $f(z)$  v točki  $z = 0$  ničlo stopnje  $n = 3$ .

10. Poiščite glavni del funkcije

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2/2) - \cos z}{z^5}$$

z razvojem v njej nastopajočih funkcij v potenčni vrsti glede na točko  $z_0 = 0$ . Nato na podlagi dobljenega rezultata izračunajte še

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

po pozitivno orientirani integracijski krožnici.

### Rešitev

Najprej zapišemo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^5} \left[ \left( 1 - \frac{z^2}{2 \cdot 1!} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{z^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{z^5} \left( \frac{z^4}{12} + Az^6 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{12z} + Az + \dots \end{aligned}$$

Glavni del funkcije  $f(z)$  glede na točko  $z_0 = 0$  in residuum sta torej

$$G(f(z), 0) = \frac{1}{12z}, \quad \text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{12}.$$

Tako imamo nazadnje

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 0) = \frac{\pi i}{6}.$$

11. Poiščite glavni del funkcije

$$f(z) = \frac{2 \exp(-2z^2) - 2 \cos z + 3z^2}{z^5}$$

z razvojem v njej nastopajočih funkcij v potenčni vrsti glede na točko  $z_0 = 0$ . Nato na podlagi dobljenega rezultata izračunajte še

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

po pozitivno orientirani integracijski krožnici.

## Rešitev

Najprej razvijemo:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \left[ 2 \left( 1 - \frac{2z^2}{1!} + \frac{2^2 z^4}{2!} - \frac{2^3 z^6}{3!} + \dots \right) - \right. \\ \left. - 2 \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + 3z^2 \right] = \frac{1}{z^5} \left( \frac{47z^4}{12} + Az^6 + \dots \right).$$

Glavni del funkcije  $f(z)$  glede na točko  $z_0 = 0$  in residuum sta torej

$$G(f(z), 0) = \frac{47}{12z}, \quad \text{Res}(f(z), 0) = \frac{47}{12}.$$

Tako imamo nazadnje

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 0) = \frac{47\pi i}{6}.$$

12. Poiščite glavni del funkcije

$$f(z) = \frac{\text{ch } z + \cos z - 2}{z^5}$$

z razvojem v njej nastopajočih funkcij v potenčni vrsti glede na točko  $z_0 = 0$ . Nato na podlagi dobljenega rezultata izračunajte še

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

po pozitivno orientirani integracijski krožnici.

## Rešitev

Najprej uporabimo znana razvoja:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \left[ \left( 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) - 2 \Big] = \\
& = \frac{1}{z^5} \left( \frac{z^4}{12} + Az^6 + \dots \right) = \frac{1}{12z} + Az + \dots
\end{aligned}$$

Glavni del funkcije  $f(z)$  glede na točko  $z_0 = 0$  in residuum sta torej

$$G(f(z), 0) = \frac{1}{12z}, \quad \text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{12}.$$

Tako imamo nazadnje

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 0) = \frac{\pi i}{6}.$$

13. Z razcepom na parcialne ulomke razvijte kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{6 - 2z}{3 - 2z - z^2}$$

v potenčno vrsto v okolici točke  $z = 0$ . Narišite konvergenčno območje v ravnini kompleksnih števil.

### Rešitev

Najprej razstavimo imenovalac in razbijemo na parcialna ulomka:

$$\frac{6 - 2z}{3 - 2z - z^2} = \frac{2z - 6}{z^2 + 2z - 3} = \frac{2z - 6}{(z + 3)(z - 1)} = \frac{A}{z + 3} + \frac{B}{z - 1}.$$

Veljati mora enakost

$$2z - 6 = A(z - 1) + B(z + 3).$$

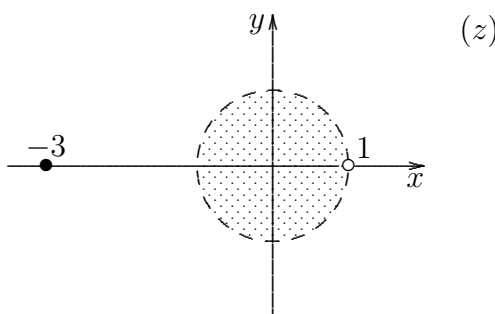
Za  $z = -3$  dobimo  $-12 = -4A$ , za  $z = 1$  pa  $-4 = 4B$ . Tako imamo  $A = 3$  in  $B = -1$ . Torej lahko izrazimo:

$$f(z) = \frac{3}{3 + z} + \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z}{3}\right)} + \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Prva vrsta absolutno konvergira pri pogoju  $|z| < 3$ , druga pa pri pogoju  $|z| < 1$ , ki tudi prevlada, tako da je konvergenčno območje dobljene vrste

$$f(z) = \frac{6 - 2z}{3 - 2z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n}\right) z^n$$

enotski krog  $|z| < 1$ .



14. Pokažite, da koeficienti  $c_n$  v razvoju

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

zadoščajo za  $n \geq 2$  relaciji  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ . Poiščite konvergenčni radij vrste. Izračunajte prvih osem koeficientov  $c_n$ .

### Rešitev

Iz razvoja

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dobimo

$$z = (1 - z - z^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2}$$

oziroma

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n =$$

$$= c_0 + c_1 z - c_0 z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n .$$

Sedaj lahko izrazimo dobljeno enakost v obliki:

$$z = c_0 + (c_1 - c_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} (c_n - c_{n-1} - c_{n-2})z^n .$$

S primerjavo koeficientov vrst na levi in desni strani enačaja imamo:

$$0 = c_0, \quad 1 = c_1 - c_0, \quad 0 = c_n - c_{n-1} - c_{n-2} \quad \text{za} \quad n = 2, 3, 4, \dots .$$

Torej je

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad \text{za} \quad n = 2, 3, 4, \dots .$$

Polja funkcije

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

sta

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

in  $z_2$  je središču  $z_0 = 0$  razvoja v vrsto najbližji pol dane funkcije. Zato je konvergenčni radij  $R$  vrste enak:

$$R = |z_2| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} .$$

Zaporedje  $c_0, c_1, c_2, \dots$  je znamenito Fibonaccijevo zaporedje. Z lahkoto izračunamo še ostalih 6 zaporednih členov:

$$c_2 = 1, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 3, \quad c_5 = 5, \quad c_6 = 8, \quad c_7 = 13 .$$

15. Poiščite rekurzijo za koeficiente  $c_n$  v razvoju

$$\frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Poiščite konvergenčni radij vrste. Poiščite izraz za koeficiente  $c_n$ .

### Rešitev

Iz razvoja

$$\frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

dobimo

$$z = (2 - 3z + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2}$$

oziroma

$$\begin{aligned} z &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n = \\ &= 2c_0 + 2c_1 z - 3c_0 z + 2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n - 3 \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^n. \end{aligned}$$

Sedaj lahko izrazimo dobljeno enakost v obliki:

$$z = 2c_0 + (2c_1 - 3c_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} (2c_n - 3c_{n-1} + c_{n-2})z^n.$$

S primerjavo koeficientov vrst na levi in desni strani enačaja imamo:

$$0 = 2c_0, \quad 1 = 2c_1 - 3c_0, \quad 0 = 2c_n - 3c_{n-1} + c_{n-2} \quad \text{za } n = 2, 3, 4, \dots$$

Torej je

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad 2c_n - 3c_{n-1} + c_{n-2} = 0 \quad \text{za } n = 2, 3, 4, \dots$$

Polja funkcije

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

sta

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2$$

in  $z_1$  je središču  $z_0 = 0$  razvoja v vrsto najbližji pol dane funkcije. Zato je konvergenčni radij  $R$  vrste enak 1.

Rekurzijo  $2c_n - 3c_{n-1} + c_{n-2} = 0$  pri začetnih pogojih  $c_0 = 0, c_1 = 1/2$  rešujemo z nastavkom  $c_n = \lambda^n$ . Ustrezna karakteristična enačba je  $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ , ki ima korena  $\lambda_1 = 1$  in  $\lambda_2 = 1/2$ . Splošna rešitev rekurzije je:

$$c_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A + \frac{B}{2^n}.$$

Za koeficienta  $A$  in  $B$  dobimo iz začetnih pogojev sistem enačb

$$A + B = 0, A + \frac{B}{2} = \frac{1}{2},$$

ki ima rešitev  $A = 1, B = -1$ , tako da lahko končno izrazimo

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

in s tem razvoj v vrsto

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n,$$

ki konvergira za  $|z| < 1$ .

16. Funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{z - z^2}$$

razvijte na punktirani okolici točke  $z_0 = 1$  v konvergentno Laurentovo vrsto. Upodobite to okolico.

**Rešitev**

Najprej zapišemo funkcijo v obliki:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{z + (1-z)}{z(1-z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z}.$$

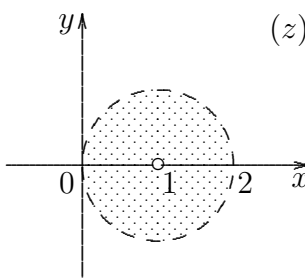
Prvi parcialni ulomek je en člen iskane vrste, drugega pa izrazimo tako:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n.$$

Dobljena geometrijska vrsta konvergira pri pogoju  $|z-1| < 1$ . Nazadnje imamo iskano Laurentovo vrsto:

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Vrsta konvergira pri pogoju  $0 < |z-1| < 1$ , to je na punktiranem krogu s središčem v točki  $z_0 = 1$  in radijem 1 v ravnini ( $z$ ).



Iz razvoja tudi razberemo:  $\text{Res}(f(z), 1) = -1$ .

17. Funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

razvijte na punktirani okolici točke  $z_0 = i$  v konvergentno Laurentovo vrsto. Upodobite to okolico.

**Rešitev**

Najprej funkcijo zapišemo v obliki

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2}.$$

Ker poteka zahtevani razvoj v Laurentovo vrsto po potencah razlike  $z - z_0 = z - i$ , postavimo  $t = z - i$  in dobimo

$$\frac{1}{(z - i)^2(z + i)^2} = \frac{1}{t^2(t + 2i)^2},$$

kar razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{t^2(t + 2i)^2} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{(t + 2i)^2} + \frac{D}{t + 2i}.$$

Po odpravi ulomkov in odvajanju na  $t$  imamo:

$$A(t + 2i)^2 + Bt(t + 2i)^2 + Ct^2 + D(t + 2i)t^2 = 1,$$

$$2A(t + 2i) + B((t + 2i)^2 + 2t(t + 2i)) + 2Ct + D(t^2 + 2(t + 2i)t) = 0.$$

Če sedaj v zgornji relaciji postavimo  $t = 0$  in  $t = -2i$ , dobimo

$$-4A = 1, \quad -4C = 1, \quad 4Ai - 4B = 0, \quad -4Ci - 4D = 0,$$

od koder imamo pri priči:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{i}{4}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = \frac{i}{4}.$$

Četrty parcialni ulomek ima razvoj v geometrijsko vrsto:

$$\frac{i}{4(t + 2i)} = \frac{1}{8(1 - it/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+3}} t^n.$$

Dobljena porenčna vrsta konvergira pri pogoju  $|t/2| < 1$  oziroma  $|t| < 2$  in jo smemo členoma odvajati:

$$-\frac{i}{4(t + 2i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n}{2^{n+3}} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}(n+1)}{2^{n+4}} t^n.$$

S tem smo dobili razvoj tretjega parcialnega ulomka v potenčno vrsto:

$$-\frac{1}{4(t + 2i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+1)}{2^{n+4}} t^n.$$

Tako imamo razvoj vsote tretjega in četrtega parcialnega ulomka v potenčno vrsto:

$$\frac{i}{4(t+2i)} - \frac{1}{4(t+2i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{n+4}} t^n.$$

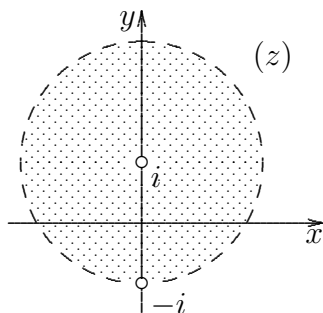
Našli smo Laurentov razvoj po potencah spremenljivke  $t$ :

$$\frac{1}{t^2(t+2i)^2} = -\frac{1}{4t^2} - \frac{i}{4t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{n+4}} t^n.$$

Dobljena vrsta konvergira pri pogoju  $0 < |t| < 2$ . Ko se vrnemo na prvotno spremenljivko  $z$ , imamo rezultat:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{n+4}} (z-i)^n.$$

Vrsta konvergira na punktiranem krogu  $0 < |z-i| < 2$  s središčem v točki  $z_0 = i$  in radijem 2 v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ).



18. Funkcijo

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$$

razvijte na kolobarju  $1 < |z| < 2$  v konvergentno Laurentovo vrsto.

**Rešitev**

Najprej razstavimo imenovalce in razbijemo na parcialne ulomke:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

Ko odpravimo ulomke, imamo:

$$z^2 - 2z + 5 = A(z - i)(z + i) + B(z - 2)(z + i) + C(z - 2)(z - i).$$

Za  $z = 2$  dobimo  $5 = 5A$ , za  $z = i$  imamo  $4 - 2i = 2i(i - 2)B$  in za  $z = -i$  nazadnje  $4 + 2i = -2i(-i - 2)C$ . Nato iz teh enačb najdemo

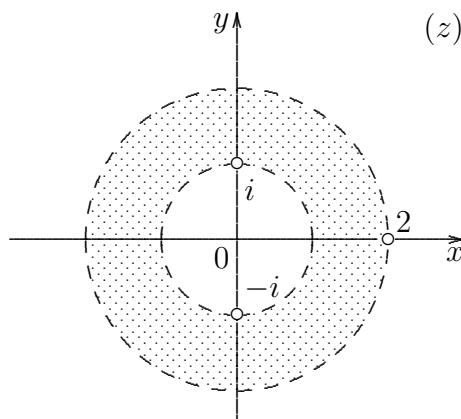
$$A = 1, B = i, C = -i,$$

tako da imamo:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)} = \frac{1}{z - 2} + \frac{i}{z - i} - \frac{i}{z + i} = \frac{1}{z - 2} - \frac{2}{z^2 + 1}.$$

Prvi ulomek ima pol pri  $z = 2$ , drugi pa pri  $z = i$  in  $z = -i$ . Vsi poli so enostavni (1. stopnje). Prvi je oddaljen od točke  $z = 0$  za 2, slednja pa sta najbliže točki  $z = 0$ , oddaljena od nje za 1 in zato bomo drugi ulomek razvili zunaj kroga radija 1, prvi ulomek pa v krogu radija 2.

$$f(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{\frac{2}{z^2}}{1 - \left(-\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}.$$



Iskana Laurentova vrsta ima torej obliko

$$f(z) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

ali lepše

$$f(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Prva vrsta konvergira pri pogoju  $1/|z| < 1$  oziroma  $|z| > 1$ , druga pa pri pogoju  $|z/2| < 1$  oziroma  $|z| < 2$ , njuna vsota pa na kolobarju  $1 < |z| < 2$ .

19. Funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

razvijte v konvergentno Laurentovo vrsto:

- (a) v okolici točke  $z_0 = 0$ ;
- (b) v okolici točke  $z_0 = 1$ ;
- (c) v okolici točke  $z_0 = 2$ ;
- (d) na kolobarju  $1 < |z| < 2$ ;
- (e) v okolici točke  $z_0 = \infty$ .

### Rešitev

Najprej funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)},$$

ki ima enostavna pola  $z_1 = 1$  in  $z_2 = 2$ , razcepimo na parcialne ulomke:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}.$$

Po odpravi ulomkov imamo:

$$z = A(z-2) + B(z-1).$$

Za  $z = 1$  oziroma  $z = 2$  dobimo  $1 = -A$  oziroma  $2 = B$ . Tako imamo  $A = -1$  in  $B = 2$  in s tem

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}.$$

(a) Za razvoj v okolici točke  $z_0 = 0$  pišemo

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

Vrsta konvergira za  $|z| < 1$ .

(b) Za razvoj v okolici točke  $z_0 = 1$  pišemo najprej  $t = z - 1$  in dobimo vrsto

$$\frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \frac{-1}{t} + \frac{2}{(t+1)-2} = \frac{-1}{t} - \frac{2}{1-t} = \frac{-1}{t} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

ki konvergira pri pogoju  $0 < |t| < 1$ . S prehodom na prvotno spremenljivko  $z$  imamo razvoj v Laurentovo vrsto

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n,$$

ki konvergira za  $0 < |z-1| < 1$ , to je na punktiranem krogu  $|z-1| < 1$ .

(c) Podobno ravnamo v okolici točke  $z_0 = 2$ . Uvedemo  $t = z - 2$  in razvijemo v vrsto

$$\frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \frac{2}{t} + \frac{-1}{(t+2)-1} = \frac{2}{t} + \frac{-1}{1-(-t)} = \frac{2}{t} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n,$$

ki konvergira pri pogoju  $0 < |t| < 1$ . S prehodom na prvotno spremenljivko  $z$  imamo spet razvoj v Laurentovo vrsto

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n,$$

ki konvergira za  $0 < |z-2| < 1$ , to je na punktiranem krogu  $|z-2| < 1$ .

(d) Za konvergenco na kolobarju  $1 < |z| < 2$  pišemo

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

in razvijemo v vrsto:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Prva vrsta konvergira za  $1/|z| < 1$  oziroma za  $|z| > 1$ , druga pa za  $|z| < 2$ , tako da dobljena vrsta res konvergira na kolobarju  $1 < |z| < 2$ .

(e) Za razvoj v okolici točke  $z_0 = \infty$  zapišemo funkcijo najprej v obliki:

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{z}{2}}.$$

Nato razvijemo v vrsto:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}.$$

Prva vrsta konvergira za  $1 < |z|$ , druga pa za  $2 < |z|$ , vsota pa za  $|z| > 2$ . Nazadnje dobimo vrsto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \frac{1}{z^n},$$

ki konvergira v okolici točke  $\infty$ , in sicer zunaj kroga s polmerom 2, to je za  $|z| > 2$ .

20. Dokažite adicijski izrek za kompleksno eksponentno funkcijo

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

## Rešitev

Za vsak kompleksni  $z$  vrsta v nalogi absolutno in enakomerno konvergira in eksponentna funkcija  $z \mapsto e^z$  je cela funkcija. Poleg tega velja

$$(e^z)^{(n)} = e^z$$

za vsak naraven  $n$  in vsak kompleksen  $z$ . Za vsak kompleksni  $w$  pa velja Taylorjev razvoj:

$$e^{z+w} = e^z + \frac{e^z}{1!}w + \frac{e^z}{2!}w^2 + \frac{e^z}{3!}w^3 + \dots$$

Torej velja:

$$e^{z+w} = e^z \left( 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots \right) = e^z e^w.$$

Tako imamo adicijski izrek za eksponentno funkcijo:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

21. Za funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{2z} + e^z + 1}{(e^z + 1)^2}$$

določite ničle, pole in glavne dele v polih.

## Rešitev

Ničle funkcije so koreni enačbe

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0.$$

Iz nje takoj dobimo

$$e^z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2\pi i/3},$$

torej so iskane ničle

$$z = \pm 2\pi i/3 + 2k\pi i = (2k \pm 2/3)\pi i,$$

kjer je  $k$  poljubno celo število.

Poli funkcije so koreni enačbe  $e^z + 1 = 0$  oziroma  $e^z = -1 = e^{\pi i}$ . To so

$$z_k = \pi i + 2k\pi i = (2k + 1)\pi i,$$

kjer je  $k$  poljubno celo število. Vsi poli so druge stopnje.

Za razvoj v Laurentovo vrsto preprosto naredimo zamenjavo  $w = z - z_k$  in dobimo:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(w + z_k) = \frac{e^{2w+2z_k} + e^{w+z_k} + 1}{(e^{w+z_k} + 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2(w+2k\pi i+\pi i)} + e^{(w+2k\pi i+\pi i)} + 1}{(e^{w+2k\pi i+\pi i} + 1)^2} = \frac{e^{2w} - e^w + 1}{(e^w - 1)^2} = g(w). \end{aligned}$$

Dobljeno funkcijo  $g(w)$  sedaj razvijemo v Laurentovo vrsto okoli točke  $w = 0$ . Ker nas zanima glavni del te funkcije, bomo zapisali samo nekaj členov v razvoju števca in imenovalca:

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1 + w + 3w^2/2 + 7w^3/6 + \dots}{w^2(1 + w + 7w^2/12 + w^3/4 + \dots)} = \\ &= \frac{1}{w^2} \left(1 + 11w^2/12 + w^4/240 + \dots\right) = \frac{1}{w^2} + \frac{11}{12} + \frac{w^2}{240} + \dots \end{aligned}$$

Funkcija  $f(z)$  ima torej glede na pol  $z_k$  glavni del

$$\frac{1}{(z - z_k)^2} = \frac{1}{(z - (2k + 1)\pi i)^2}.$$

22. Za funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

določite glavne dele glede na njene pole.

### Rešitev

Funkcija  $f(z)$  ima pole tam, kjer je  $\sin z = 0$ , to je v točkah  $z_k = k\pi$ , kjer je  $k$  poljubno celo število. Vsi njeni poli so druge stopnje, ker lahko njen imenovalec zapišemo kot

$$\begin{aligned} \sin^2 z &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2z)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2(z - k\pi))) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2^2(z - k\pi)^2}{2!} - \frac{2^4(z - k\pi)^4}{4!} + \dots \right) = \\ &= (z - k\pi)^2 \left( \frac{2}{2!} - \frac{2^3(z - k\pi)^2}{4!} + \dots \right) = (z - k\pi)^2 g(z), \end{aligned}$$

kjer je  $g(z)$  neka holomorfná funkcija, za katero je očitno  $g(k\pi) \neq 0$ .

Za določitev glavnega dela uvedemo pomožno spremenljivko  $w = z - k\pi$  in dobimo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sin^2 z} = \frac{2}{1 - \cos(2z)} = \\ &= \frac{2}{1 - \cos(2w + 2k\pi)} = \frac{2}{1 - \cos(2w)} = \\ &= \frac{2}{\frac{2^2 w^2}{2!} - \frac{2^4 w^4}{4!} + \frac{2^6 w^6}{6!} - \frac{2^8 w^8}{8!} + \dots} = \\ &= \frac{1}{\frac{2w^2}{2!} - \frac{2^3 w^4}{4!} + \frac{2^5 w^6}{6!} - \frac{2^7 w^8}{8!} + \dots} = \\ &= \frac{1}{w^2 \left( 1 - \frac{2^3 w^2}{4!} + \frac{2^5 w^4}{6!} - \frac{2^7 w^6}{8!} + \dots \right)}. \end{aligned}$$

Za določitev glavnega dela je dovolj izračunati le nekaj prvih členov v razvoju, v katerem so očitno samo sodi eksponenti:

$$\frac{1}{1 - \frac{2^3 w^2}{4!} + \frac{2^5 w^4}{6!} - \frac{2^7 w^6}{8!} + \dots} = c_0 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + c_6 w^6 + \dots$$

V neki okolici točke  $w = 0$  mora veljati:

$$\left(1 - \frac{w^2}{3} + \frac{2w^4}{45} - \frac{w^6}{315} + \dots\right) (c_0 + c_2 w^2 + c_4 w^4 + c_6 w^6 + \dots) = 1.$$

S primerjavo koeficientov pri istoležnih potencah spremenljivke  $w$  dobimo linearen sistem enačb:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ -\frac{1}{3}c_0 + c_2 &= 0 \\ \frac{2}{45}c_0 - \frac{1}{3}c_2 + c_4 &= 0 \\ -\frac{1}{315}c_0 + \frac{2}{45}c_2 - \frac{1}{3}c_4 + c_6 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sistem znamo hitro rešiti in imamo:

$$c_0 = 1, c_2 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{15}, c_6 = \frac{2}{189}, \dots$$

S tem smo našli nekaj prvih členov v razvoju:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{w^2} \left(1 + \frac{w^2}{3} + \frac{w^4}{15} + \frac{2w^6}{189} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{(z - k\pi)^2} + \frac{1}{3} + \frac{(z - k\pi)^2}{15} + \frac{2(z - k\pi)^4}{189} + \dots \end{aligned}$$

Glavni del funkcije  $f(z)$  glede na pol  $k\pi$  je torej

$$\frac{1}{(z - k\pi)^2},$$

pri čemer je  $k$  poljubno celo število.

## 5. RAČUNANJE INTEGRALOV

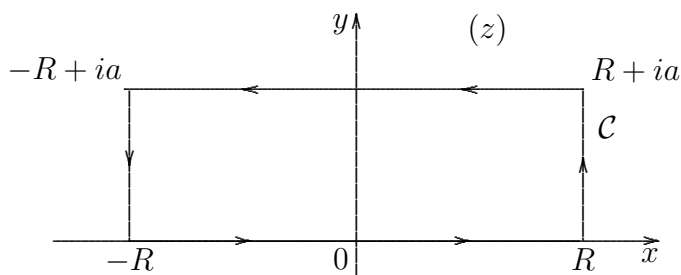
1. Z uporabo Cauchyjevega izreka izračunajte za pozitivno konstanto  $a$  integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx$$

z integracijo funkcije  $f(z) = e^{-z^2}$  po obodu pravokotnika z oglišči  $-R, R, R + ia, -R + ia$ , kjer je  $R$  pozitivno število.

### Rešitev

Ker je  $f(z)$  cela funkcija, je  $\oint f(z) dz$  po ograji  $\mathcal{C}$  pravokotnika v pozitivni smeri enak 0. Na stranici od  $-R$  do  $R$  je  $z = x, dz = dx$ , na stranici od  $R$  do  $R + ia$  je  $z = R + iy, dz = idy$ , na stranici od  $R + ia$  do  $-R + ia$  je  $z = x + ia, dz = dx$  in končno na stranici od  $-R + ia$  do  $-R$  je  $z = -R + iy, dz = idy$ .



Torej velja:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^a e^{-(R+iy)^2} dy + \\ &+ \int_R^{-R} e^{-(x+ia)^2} dx + i \int_a^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = 0. \end{aligned}$$

Integrale na desni označimo po vrsti z  $I_1(R), I_2(R), I_3(R), I_4(R)$ . Pri vseh bomo  $R$  limitirali proti neskončno. Dobimo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

To je znani *Poissonov integral*. Naslednji integral, to je

$$I_2(R) = i \int_0^a e^{-(R+iy)^2} dy = i \int_0^a e^{-R^2-2iRy+y^2} dy,$$

ocenimo takole:

$$|I_2(R)| \leq \int_0^a e^{-R^2} e^{y^2} dy = e^{-R^2} \int_0^a e^{y^2} dy.$$

Očitno  $I_2(R)$  gre proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Tretji integral je

$$\begin{aligned} \int_R^{-R} e^{-(x+ia)^2} dx &= - \int_{-R}^R e^{-(x+ia)^2} dx = \\ &= - \int_{-R}^R e^{-x^2-2iax+a^2} dx = -e^{a^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} (\cos(2ax) - i \sin(2ax)) dx \end{aligned}$$

Četrty integral, to je

$$I_4(R) = i \int_a^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = -i \int_0^a e^{-R^2+2iRy+y^2} dy,$$

spet ocenimo tako kot  $I_2(R)$  in dobimo:

$$|I_4(R)| \leq e^{-R^2} \int_0^a e^{y^2} dy.$$

Očitno  $I_4(R)$  gre tudi proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Ko v  $\oint f(z) dz$  naredimo limitni proces  $R \rightarrow \infty$ , dobimo:

$$\sqrt{\pi} - e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\cos(2ax) - i \sin(2ax)) dx = 0,$$

iz česar sledi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin(2ax) dx = 0.$$

Tako smo na cilju:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2ax) dx = \frac{1}{2} e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

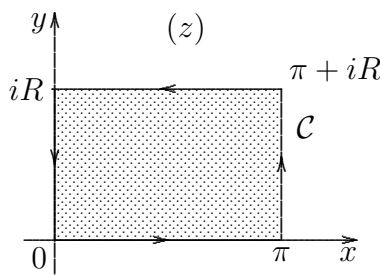
2. Dokažite enakost:

$$\int_0^\pi x^n (\pi - x)^n \sin x \, dx = \int_0^\infty y^n [(y + \pi i)^n + (y - \pi i)^n] e^{-y} \, dy.$$

Pri tem je  $n$  poljubno nenegativno celo število.

### Rešitev

Vzemimo celo funkcijo  $f(z) = z^n(\pi - z)^n e^{iz}$  in jo integrirajmo v pozitivni smeri po obodu  $\mathcal{C}$  pravokotnika z oglišči  $0$ ,  $\pi$ ,  $\pi + iR$  in  $iR$  v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ). Pri tem je  $R$  poljubno pozitivno število.



Po Cauchyjevem izreku in z razbitjem integrala na štiri delo dobimo:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n e^{ix} \, dx + i \int_0^R (\pi + iy)^n (-iy)^n e^{i(\pi + iy)} \, dy + \\ &+ \int_\pi^0 (x + iR)^n (\pi - x - iR)^n e^{i(x + iR)} \, dx + i \int_R^0 (iy)^n (\pi - iy)^n e^{i(iy)} \, dy = \\ &= \int_0^\pi x^n (\pi - x)^n e^{ix} \, dx + ie^{\pi i} \int_0^R (-i\pi + y)^n y^n e^{-y} \, dy + \\ &- e^{-R} \int_0^\pi (x + iR)^n (\pi - x - iR)^n e^{ix} \, dx - i \int_0^R y^n (\pi i + y)^n e^{-y} \, dy. \end{aligned}$$

Sedaj naredimo limitni proces  $R \rightarrow \infty$ . Integral s faktorjem  $e^{-R}$  gre pri tem proti 0, ostalo pa zapišemo v obliki:

$$\int_0^\pi x^n (\pi - x)^n e^{ix} \, dx = i \int_0^\infty (y - i\pi)^n y^n e^{-y} \, dy + i \int_0^\infty y^n (\pi i + y)^n e^{-y} \, dy =$$

$$= i \int_0^{\infty} y^n [(y + i\pi)^n + (y - i\pi)^n] e^{-y} dy.$$

Podintegralska funkcija zadnjega integrala je očitno realna, zato je desna stran dobljene enakosti čisto imaginarna. Po primerjavi imaginarnih delov obeh strani dobimo enakost

$$\int_0^{\pi} x^n (\pi - x)^n \sin x dx = \int_0^{\infty} y^n [(y + \pi i)^n + (y - \pi i)^n] e^{-y} dy,$$

ki jo je bilo treba dokazati.

### Opomba

Dokazati se da, da obstajajo pozitivni koeficienti  $a_n$  v razvoju

$$\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n (1-x)^n$$

na intervalu  $[0, 1]$ . Dobljeno enakost se da uporabiti pri dokazu, da je  $\pi$  iracionalno število, kar je narejeno v razdelku *Iracionalnost nekaterih števil*.

3. Naj bo  $0 < a < 1$  konstanta. Izračunajte integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}$$

tako, da integrirate funkcijo  $f(z) = z/(a - e^{-iz})$  po pozitivno orientiranem robu pravokotnika z oglišči  $-\pi, \pi, \pi + iR, -\pi + iR$ .

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = z/(a - e^{-iz})$  ima enostavne pole, ki so rešitve enačbe  $e^{-iz} = a$ . To so  $z = i \ln a + 2k\pi$ , kjer je  $k$  poljubno celo število. Ker je  $0 < a < 1$ , je njihova imaginarna komponenta negativna.

Pozitivno orientiran rob pravokotnika z oglišči  $-\pi, \pi, \pi + iR, -\pi + iR$ ,  $R > 1$ , je sklenjena krivulja  $\mathcal{C}$ , ki ne obkroža nobenega pola funkcije in zato je

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Po drugi strani pa lahko zapišemo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x dx}{a - e^{-ix}} + \int_0^R \frac{(\pi + iy)i dy}{a - e^{-i(\pi + iy)}} + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{(x + iR) dx}{a - e^{-i(x + iR)}} + \int_R^0 \frac{(-\pi + iy)i dy}{a - e^{-i(-\pi + iy)}} = 0.$$

Za tretji integral imamo

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(x + iR) dx}{a - e^{-i(x + iR)}} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x + iR| dx}{|a - e^{ix} e^R|} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x + iR| dx}{e^R - a},$$

kar očitno gre proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Za drugi in zadnji integral skupaj je v limiti  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{(\pi + iy)i dy}{a - e^{-i(\pi + iy)}} + \int_{\infty}^0 \frac{(-\pi + iy)i dy}{a - e^{-i(-\pi + iy)}} = \\ & = i \int_0^{\infty} \frac{(\pi + iy) dy}{a + e^y} - i \int_0^{\infty} \frac{(-\pi + iy) dy}{a + e^y} = 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dy}{a + e^y}. \end{aligned}$$

S substitucijo  $u = e^y$  dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{a + e^y} = \int_1^{\infty} \frac{du}{u(u + a)} = \frac{\ln(1 + a)}{a}.$$

Tako smo prispeli do relacije:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x dx}{a - e^{-ix}} + \frac{2\pi i}{a} \ln(1 + a) = 0.$$

Podintegralsko funkcijo še preoblikujemo:

$$\frac{x}{a - e^{-ix}} = \frac{x(a - e^{ix})}{(a - e^{-ix})(a - e^{ix})} = \frac{(a - \cos x - i \sin x)x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

Nazadnje dobimo rezultat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{2\pi}{a} \ln(1 + a), \quad 0 < a < 1.$$

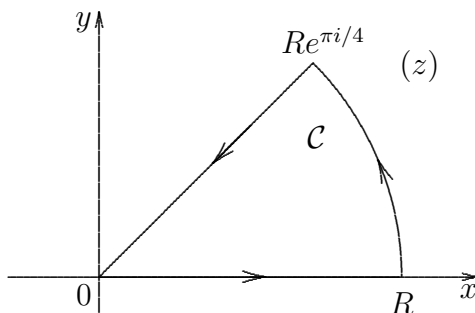
4. Z uporabo Cauchyjevega izreka izračunajte *Fresnelova integrala*

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

tako, da integrirate funkcijo  $f(z) = e^{-z^2}$  po krivulji  $\mathcal{C}$ , ki poteka najprej vzdolž realne osi od točke 0 do točke  $R$ , nato po krožnem loku s središčem v točki 0 do točke  $Re^{i\pi/4}$  in nazadnje od tu naravnost po poltraku do točke 0. Na koncu  $R$  limitirajte proti neskončnosti.

### Rešitev

Na prvem delu krivulje  $\mathcal{C}$  je  $z = x, dz = dx$ , na drugem delu je  $z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi/4, dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$  in nazadnje na tretjem delu še  $z = re^{i\pi/4}, 0 \leq r \leq R, dz = e^{i\pi/4} dr$ .



Ker je funkcija  $f(z)$  cela funkcija, velja po Cauchyjevem izreku:

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi + \int_R^0 e^{-r^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dr = 0.$$

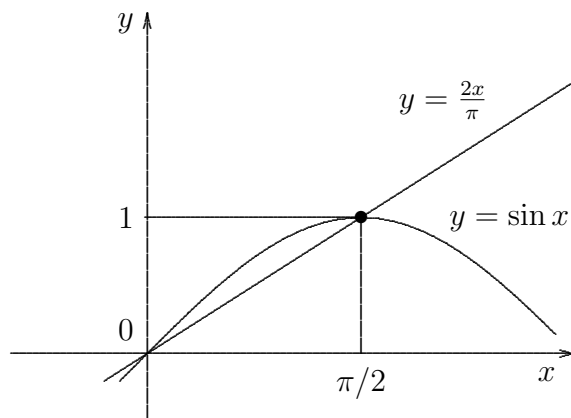
Naj bo drugi integral

$$I(R) = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi.$$

Ocenimo:

$$|I(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos(2\varphi)} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \cos u} du = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin v} dv.$$

Naredili smo najprej substitucijo  $u = 2\varphi$ , nato pa še substitucijo  $v = \pi/2 - u$ . Sedaj uporabimo Jordanovo neenakost:



$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Po njej je  $-R^2 \sin v \leq -2R^2v/\pi$  in zato lahko naprej ocenimo:

$$|I(R)| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2R^2v/\pi} dv \leq \frac{R}{2} \int_0^{\infty} e^{-2R^2v/\pi} dv = \frac{\pi}{4R}.$$

Iz tega sledi, da  $I(R) \rightarrow 0$ , ko  $R \rightarrow \infty$ .

Ko  $R \rightarrow \infty$  v  $\oint f(z) dz$ , dobimo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{-ir^2} e^{i\pi/4} dr = 0.$$

Po preoblikovanju pa nato še

$$\int_0^{\infty} e^{-ir^2} dr = e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

oziroma

$$\int_0^{\infty} (\cos(r^2) - i \sin(r^2)) dr = \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Po primerjavi realnih in imaginarnih delov obeh strani imamo:

$$\int_0^\infty \cos(r^2) dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty \sin(r^2) dr = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Po zamenjavi  $r = x$  imamo končno pred seboj oba Fresnelova integrala:

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}, \quad \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

5. Razvijte v potenčno vrsto funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{1 - 3z + 2z^2}$$

v okolici točke  $z_0 = 0$ . Kaj je konvergenčno območje dobljene vrste? Kje ima funkcija  $f(z)$  singularnosti in kakšne? Izračunajte s Cauchyjevo integralno formulo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz,$$

kjer je  $\mathcal{C}$  pozitivno orientirana krožnica  $|z| = 3/4$ .

### Rešitev

Imenovalcec dane funkcije razstavimo in zapišemo:

$$f(z) = \frac{z}{1 - 3z + 2z^2} = \frac{1}{1 - 2z} - \frac{1}{1 - z}.$$

Nato ulomka razvijemo v geometrijski vrsti:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)z^n.$$

Prva vrsta konvergira, če je  $|2z| < 1$ , druga pa, če je  $|z| < 1$ . Torej iskana vrsta konvergira, če je  $|z| < 1/2$ . Konvergenčno območje je odprti krog s središčem v točki  $z_0 = 0$  in z radijem  $R = 1/2$ . V točkah

$z_1 = 1$  in  $z_2 = 1/2$  ima funkcija  $f(z)$  enostavna pola. Krožnica  $\mathcal{C}$  obkroži pol  $z_2 = 1/2$ , pol  $z_1 = 1$  pa je zunaj nje. Zapišemo:

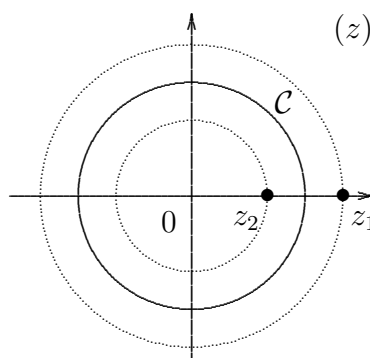
$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z dz}{2(z - 1/2)(z - 1)} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(z) dz}{z - 1/2},$$

kjer je  $g(z) = z/(2z - 2)$ . Po Cauchyjevi integralski formuli

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(z) dz}{z - z_0},$$

kjer krožnica  $\mathcal{C}$  enkrat v pozitivni smeri obkroži točko  $z_0$ , imamo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i g(1/2) = -\pi i.$$



6. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunajte

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z \sin(\pi z) dz}{(z^2 + 1)^2}$$

po pozitivno orientirani sklenjeni krivulji.

**Rešitev**

Najprej zapišimo integral v obliki

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z \sin(\pi z) dz}{(z - i)^2 (z + i)^2}.$$

Podintegralska funkcija ima pola 2. stopnje v točkah  $z = i$  in  $z = -i$ . Krožnica, po kateri integral poteka, ima za središče ravno pol  $z = i$ , zato integral pišemo v obliki

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{g(z) dz}{(z-i)^2},$$

kjer je

$$g(z) = \frac{z \sin(\pi z)}{(z+i)^2}.$$

Ker je funkcija  $g(z)$  analitična na krogu  $|z-i| < 2$ , je po Cauchyjevi integralski formuli

$$g'(i) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-i|=1} \frac{g(z) dz}{(z-i)^2}$$

in zato imamo:

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z \sin(\pi z) dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i g'(i).$$

Ker je

$$g(z) = z \sin(\pi z)(z+i)^{-2},$$

imamo

$$g'(z) = \sin(\pi z)(z+i)^{-2} + \pi \cos(\pi z)(z+i)^{-2} - 2 \sin(\pi z)(z+i)^{-3}$$

in

$$g'(i) = \sin(\pi i)(2i)^{-2} + \pi \cos(\pi i)(2i)^{-2} - 2 \sin(\pi i)(2i)^{-3} = -\frac{\pi i}{4} \operatorname{ch} \pi.$$

Nazadnje dobimo iskani rezultat

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{z \sin(\pi z) dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{ch} \pi.$$

7. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunajte

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1},$$

kjer je  $a > 1$ .

### Rešitev

Najprej zapišimo integral v obliki

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z dz}{(z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)}.$$

Podintegralska funkcija ima enostavne pole v točkah  $z = 1$ ,  $z = -1$ ,  $z = i$  in  $z = -i$ . Krožnica, po kateri integral poteka, pa obkroži pol  $z = 1$ , zato integral pišemo v obliki

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{z-1},$$

kjer je

$$g(z) = \frac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}.$$

Ker je funkcija  $g(z)$  analitična na krogu  $|z-a| < a$ , je po Cauchyjevi integralski formuli

$$g(1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{z-1}$$

in zato imamo:

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1} = 2\pi i g(1).$$

Ker je

$$g(1) = \frac{1}{4},$$

imamo iskani rezultat

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{z dz}{z^4 - 1} = \frac{\pi i}{4}.$$

8. Z uporabo Cauchyjeve integralske formule izračunajte

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3},$$

kjer je  $a > 0$ .

### Rešitev

Najprej prepisimo integral

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{(z-a)^3},$$

kjer je  $g(z) = ze^z$ . Podintegralska funkcija ima pol 3. stopnje v točki  $z = a$ . Krožnica, po kateri integral poteka, pa ta pol obkroži, zato lahko zapišemo

$$g'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{z-a},$$

ker je funkcija  $g(z)$  analitična na krogu  $|z-a| < a$ . Za drugi odvod dobimo:

$$g''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{(z-a)^3}.$$

Ker je  $g''(z) = ze^z + 2e^z$ , imamo

$$g''(a) = ae^a + 2e^a = \frac{1}{\pi i} \oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{(z-a)^3}$$

in zato

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{g(z) dz}{(z-a)^3} = \pi i (ae^a + 2e^a).$$

Torej imamo iskani rezultat

$$\oint_{|z-a|=a} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3} = \pi i e^a (a + 2).$$

9. Z metodo ostankov (residuov) izračunajte

$$\oint_{|z-2|=1/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$$

po pozitivno orientirani krivulji.

### Rešitev

Funkcija  $f(z) = z(z-1)^{-1}(z-2)^{-2}$  pod integralskim znakom ima enostaven pol  $z_1 = 1$ , ki je zunaj dane krivulje  $|z-2| = 1/2$ , in pol druge stopnje  $z_2 = 2$ , ki je znotraj nje. Zato po izreku o ostankih velja:

$$\oint_{|z-2|=1/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2).$$

Očitno je

$$\operatorname{Res}(f(z), 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (f(z)(z-2)^2)' = \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{z}{z-1} \right)' = - \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{(z-1)^2} = -1,$$

tako da je nazadnje:

$$\oint_{|z-2|=1/2} \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2} = -2\pi i.$$

10. Z metodo ostankov (residuov) izračunajte

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5-1)(z-3)}$$

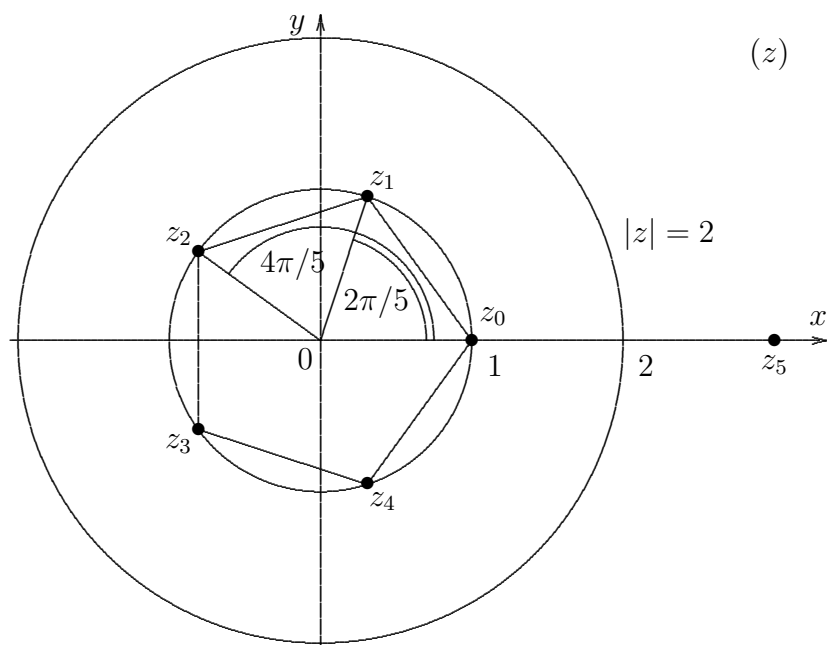
po pozitivno orientirani krivulji.

### Rešitev

Podintegralska funkcija  $f(z) = 1/(z^5-1)^{-1}(z-3)^{-1}$  ima šest enostavnih polov, rešitve binomske enačbe  $z^5 = 1$  in  $z_5 = 3$ . Znotraj integracijske krivulje ležijo

$$z_k = e^{2k\pi i/5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

zunaj pa je pol  $z_5 = 3$ .



Po izreku o ostankih je torej:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5 - 1)(z - 3)} = 2\pi i \sum_{k=0}^4 \text{Res}(f(z), z_k).$$

Ostanke izračunamo po znanem pravilu:

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{5(z_k - 3)z_k^4} = \frac{z_k}{5(z_k - 3)z_k^5} = \frac{z_k}{5(z_k - 3)}.$$

Ker je  $z_0 = 1$  in  $z_4 = \bar{z}_1$  ter  $z_3 = \bar{z}_2$ , lahko zapišemo:

$$\sum_{k=0}^4 \text{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{z_1}{z_1 - 3} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1 - 3} + \frac{z_2}{z_2 - 3} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2 - 3} \right).$$

Očitno je dobro združiti konjugirane člene in dobimo:

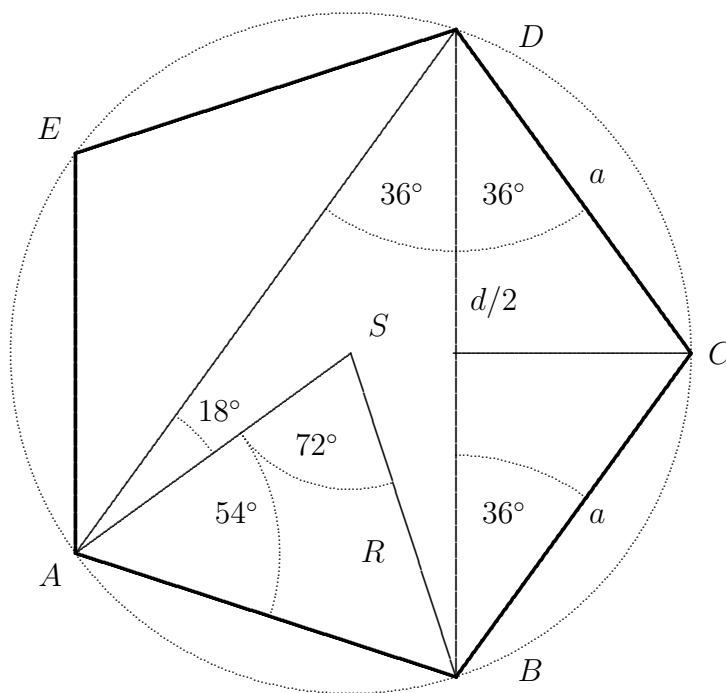
$$\sum_{k=0}^4 \text{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{2 - 6\Re(z_1)}{10 - 6\Re(z_1)} + \frac{2 - 6\Re(z_2)}{10 - 6\Re(z_2)} \right).$$

Pri tem pomeni  $\Re(z)$  realni del kompleksnega števila  $z$ . Sedaj upoštevajmo, relacije  $\Re(z_1) = \cos(2\pi/5) = \cos 72^\circ = \sin 18^\circ$  in  $\Re(z_2) = \cos(4\pi/5) = \cos 144^\circ = -\cos 36^\circ = -\sin 54^\circ$ .

Spomnimo se na nekatere preproste relacije v pravilnem petkotniku in na Ptolemajev izrek, star skoraj 2000 let, ki pove, da je v konveksnem tetivnem štirikotniku vsota produktov nasprotnih stranic enaka produktu diagonal. Če to lastnost uporabimo na trapezu  $ABCD$ , ki očitno je tetivni štirikotnik, takoj dobimo enačbo

$$a^2 + ad = d^2,$$

ki ima seveda pravo rešitev  $d = \tau a$ , pri čemer je  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  tako imenovano *zlato razmerje*, eden od matematičnih biserov. Ima preprosto lastnost:  $\tau^2 = \tau + 1$ .



Pri računanju vsote ostankov sedaj upoštevajmo

$$2\Re(z_1) = 1/\tau, \quad 2\Re(z_2) = -\tau$$

in dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res}(f(z), z_k) &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{2-3/\tau}{10-3/\tau} + \frac{2+3\tau}{10+3\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{2\tau-3}{10\tau-3} + \frac{2+3\tau}{10+3\tau} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{(2\tau-3)(10+3\tau) + (2+3\tau)(10\tau-3)}{(10\tau-3)(10+3\tau)} \right). \end{aligned}$$

Preprost račun, pri katerem upoštevamo enakost  $\tau^2 = \tau + 1$ , nam da:

$$\sum_{k=0}^4 \operatorname{Res}(f(z), z_k) = \frac{1}{5} \left( -\frac{1}{2} + \frac{58}{121} \right) = -\frac{1}{2 \cdot 121} = -\frac{1}{242}.$$

Na koncu najdemo rezultat:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5-1)(z-3)} = 2\pi i \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res}(f(z), z_k) = -2\pi i \cdot \frac{1}{2 \cdot 121} = -\frac{\pi i}{121}.$$

Ali se nemara ne bi dalo izogniti tako dolgemu računu? Bi, če bi vnaprej vedeli, da je vsota vseh ostankov racionalne funkcije  $f(z)$  enaka 0:

$$\sum_{k=0}^5 \operatorname{Res}(f(z), z_k) = \sum_{k=0}^4 \operatorname{Res}(f(z), z_k) + \operatorname{Res}(f(z), z_5) = 0.$$

Ker je

$$\operatorname{Res}(f(z), z_5) = \frac{1}{z_5^5 - 1} = \frac{1}{3^5 - 1} = \frac{1}{242},$$

lahko samo potrdimo prejšnji rezultat:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z^5 - 1)(z - 3)} = -\frac{\pi i}{121}.$$

### Dopolnilo

Kot je lepo razvidno na sliki, lahko zapišemo

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{d/2}{a} = \frac{\tau}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Iz polovice enakokrakega trikotnika  $ABD$  pa najdemo še:

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{a/2}{d} = \frac{1}{2\tau} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Zato lahko lahko povzamemo:

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, & \sin 54^\circ &= \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \\ \cos 72^\circ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, & \sin 18^\circ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \end{aligned}$$

Zato lahko izrazimo vrednosti trigonometričnih funkcij z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in kvadratnim korenjenjem za vse celoštevilске kote, ki so večkratniki kota  $3^\circ$ , ki ga na primer izrazimo kot razliko  $18^\circ - 15^\circ$ , vrednosti trigonometričnih funkcij kotov  $18^\circ$  in  $15^\circ$  pa izrazimo iz znanih vrednosti funkcij kotov  $36^\circ$  in  $30^\circ$ .

11. Poiščite primer racionalne funkcije, katere vsota residuov ni nič.

### Primer

Naj bo

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{2z}{(z + i)(z - i)}.$$

Funkcija  $f(z)$  ima enostavna pola v točkah  $z_1 = -i$  in  $z_2 = i$  in

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{-2i}{-2i} = 1,$$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z-i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{2i}{2i} = 1.$$

Vidimo, da velja

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2) = 2 \neq 0.$$

12. Dokažite, da ima racionalna funkcija

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}, \quad n > 1,$$

kjer so kompleksna števila  $z_1, z_2, \dots, z_n$  med seboj različna, naslednjo lastnost:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k) = 0.$$

**Dokaz**

Števila  $z_1, z_2, \dots, z_n$  so enostavni poli funkcije  $f(z)$ . Očitno je za  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} r_k &= \operatorname{Res}(f(z), z_k) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z - z_k}{(z - z_1) \cdots (z - z_{k-1})(z - z_k)(z - z_{k+1}) \cdots (z - z_n)} = \\ &= \frac{1}{(z_k - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_n)}. \end{aligned}$$

Sedaj integrirajmo funkcijo  $f(z)$  po krožnici  $|z| = R$ , pri čemer vzamemo  $R > \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|\}$ . Tedaj imamo enakost

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}$$

in oceno:

$$\begin{aligned}
 & |r_1 + r_2 + \dots + r_n| = \\
 & = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} d\varphi}{(Re^{i\varphi} - z_1)(Re^{i\varphi} - z_2) \dots (Re^{i\varphi} - z_n)} \right| \leq \\
 & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi}{(R - |z_1|)(R - |z_2|) \dots (R - |z_n|)} \leq \\
 & \leq \frac{R}{(R - |z_1|)(R - |z_2|) \dots (R - |z_n|)}.
 \end{aligned}$$

Sedaj naredimo limitni prehod  $R \rightarrow \infty$  in dobimo:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0.$$

To tudi pomeni, da je

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} = 2\pi i(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = 0$$

za vsako enostavno sklenjeno krivuljo  $\mathcal{C}$ , ki objame vse točke  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

13. Koliko različnih vrednosti ima lahko integral

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)},$$

kjer so  $z_1, z_2, \dots, z_n$  med seboj različne točke v ravnini kompleksnih števil,  $\mathcal{C}$  pa v tej ravnini pozitivno orientirana enostavno sklenjena krivulja, ki ne poteka skozi našteve točke.

### Rešitev

V primeru  $n = 1$  ima podintegralska funkcija enostaven pol v točki  $z_1$  in sta 2 možnosti: ali  $\mathcal{C}$  obkroži  $z_1$  in integral je enak  $2\pi i$  ali pa te točke ne obkroži in je integral enak 0.

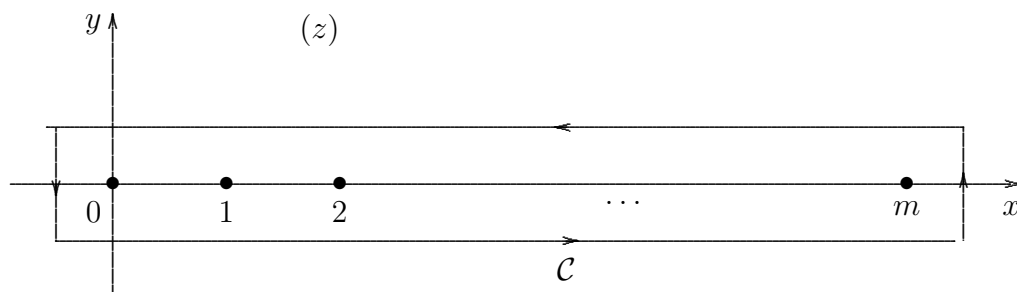
V primeru  $n > 1$  pa lahko  $\mathcal{C}$  obkroži vsako podmnožico množice polov podintegralske funkcije  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Takih podmnožic pa je  $2^n$ , vključno s prazno množico. V slednjem primeru je integral enak 0. Toda integral je 0 tudi v primeru, ko  $\mathcal{C}$  obkroži vse točke  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , kakor je bilo ugotovljeno v prejšnji nalogi. Zato ima dani integral v primeru  $n > 1$  lahko  $2^n - 1$  vrednosti.

14. Za poljubni nenegativni celi števili  $m$  in  $n$  definirajmo integral

$$S(n, m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)}.$$

Pri tem je  $\mathcal{C}$  poljubna enostavna sklenjena krivulja, ki objame vse točke  $0, 1, 2, \dots, m$  v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ). Dokažite naslednje lastnosti števil  $S(n, m)$ :

- (a)  $S(0, 0) = 1$ ;
- (b)  $S(n, 0) = 0$  za vsak  $n \geq 1$ ;
- (c)  $S(0, m) = 0$  za vsak  $m \geq 1$ ;
- (d)  $S(n+1, m) = mS(n, m) + S(n, m-1)$  za vsak  $m \geq 1$  in za vsak  $n \geq 0$ ;
- (e) vsa števila  $S(n, m)$  so nenegativna in cela.



## Rešitev

(a)

$$S(0,0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 1.$$

(b) Za  $n \geq 1$  imamo:

$$S(n,0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n dz}{z} = 0.$$

(c) Za  $m \geq 1$  imamo:

$$S(0,m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} = 0,$$

kakor je dokazano v eni od prejšnjih nalog.

(d) Za vsak  $m \geq 1$  in za vsak  $n \geq 0$  je:

$$\begin{aligned} mS(n,m) + S(n,m-1) &= \frac{m}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^n dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-(m-1))} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{mz^n + (z-m)z^n dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^{n+1} dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-m)} = S(n+1,m). \end{aligned}$$

(e) Da so vsa števila  $S(n,m)$  nenegativna in cela, lahko sklepamo induktivno na podlagi pravkar dokazane rekurzivne zveze.

## Dopolnilo

Števila  $S(n,m)$  imenujemo *Stirlingova števila druge vrste*. Imajo svoj pomen v kombinatoriki. Število  $S(n,m)$  pove, na koliko načinov lahko

množico, ki ima  $n$  elementov, razdelimo na  $m$  paroma tujih nepraznih podmnožic. Nekaj Stirlingovih števil druge vrste je zbranih v tabeli.

| $n \setminus m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----------------|---|---|---|---|---|
| 0               | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1               | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2               | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3               | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 4               | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 |

15. Z metodo ostankov (residuov) izračunajte

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}$$

po pozitivno orientirani krivulji.

### Rešitev

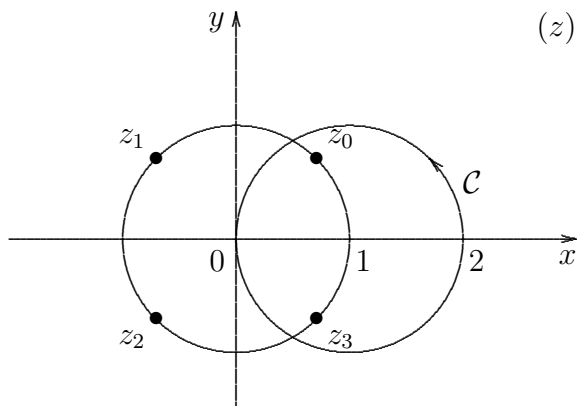
Podintegralska funkcija  $f(z) = 1/(z^4 + 1)$  ima štiri enostavne pole, rešitve binomske enačbe  $z^4 = -1$ . To so:

$$z_k = e^{(2k+1)\pi i/4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Znotraj integracijske krožnice  $|z - 1| = 1$  ležita

$$z_0 = e^{\pi i/4}, \quad z_3 = e^{3\pi i/4} = e^{-\pi i/4}.$$

Ostanka funkcije  $f(z)$  v teh dveh polih sta:



$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}, \quad \operatorname{Res}(f(z), z_3) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{3\pi i/4}.$$

Torej je

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), z_0) + \operatorname{Res}(f(z), z_3)) = \frac{\pi i}{2} (e^{3\pi i/4} + e^{-3\pi i/4}).$$

Ker je  $(e^{3\pi i/4} + e^{-3\pi i/4})/2 = \cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ , imamo končno rezultat:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} = -\frac{\sqrt{2}\pi i}{2}.$$

16. Z uporabo residuov (ostankov) izračunajte

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3} - \cos \varphi}.$$

### Rešitev

V danem integralu postavimo  $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$  in nato vpeljemo kompleksno integracijsko spremenljivko  $z = e^{i\varphi}$ , za katero je  $|z| = 1$ . Ko  $\varphi$  preteče integracijski interval  $[0, 2\pi]$ , točka  $z$  enkrat preteče v pozitivni smeri enotsko krožnico  $|z| = 1$ . Potem imamo še

$$\cos \varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

tako da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3} - \cos \varphi} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( \sqrt{3} - \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} = -\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{3}z + 1}.$$

Podintegralska funkcija  $f(z) = 1/(z^2 - 2\sqrt{3}z + 1)$  ima enostavna realna pola

$$z_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2},$$

od katerih leži samo  $z_1$  znotraj integracijske krivulje  $|z| = 1$ . Po izreku o ostankih (residuih) je potem:

$$-\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{3}z + 1} = -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{-4\pi}{2z_1 - 2\sqrt{3}} = \pi\sqrt{2}.$$

Tako imamo končno rezultat

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{3} - \cos \varphi} = \pi\sqrt{2}.$$

17. Z metodo ostankov (residuov) izračunajte

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi}, \quad a > 1.$$

### Rešitev

V danem integralu postavimo  $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$  in nato vpeljemo kompleksno integracijsko spremenljivko  $z = e^{i\varphi}$ , za katero je  $|z| = 1$ . Ko  $\varphi$  preteče integracijski interval  $[0, 2\pi]$ , točka  $z$  enkrat preteče v pozitivni smeri enotsko krožnico  $|z| = 1$ . Potem imamo še

$$\cos \varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

tako da je

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( a + \frac{z^2 + 1}{2z} \right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Podintegralska funkcija  $f(z) = 1/(z^2 + 2az + 1)$  ima enostavna realna pola

$$z_1 = -a - \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1},$$

od katerih leži samo  $z_2$  znotraj integracijske krivulje  $|z| = 1$ , ker je  $a > 1$ . Po izreku o ostankih (residuih) je potem:

$$\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2) = 4\pi \frac{1}{2z_2 + 2a} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Tako imamo končno rezultat

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

18. Izračunajte z metodo ostankov

$$a_n = \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

kjer je  $n$  nenegativno celo število,  $p$  in  $\varepsilon$  pozitivni konstanti, pri čemer je  $0 < \varepsilon < 1$ .

### Rešitev

Tudi tokrat se lotimo integrala s kompleksnimi funkcijami in izrekom o ostankih (residuih). Očitno je  $a_n$  realni del integrala

$$I_n = \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi} d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Najprej zapišemo  $z = e^{i\varphi}$ , nato  $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2 = (z + 1/z)/2$  ter  $d\varphi = dz/(iz)$ . Integracija po  $z$  poteka v pozitivni smeri po enotski krožnici  $|z| = 1$  v kompleksni ravnini ( $z$ ). Nato zapišemo

$$I_n = \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi} d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^n \frac{dz}{iz}}{1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2p}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon}.$$

Podintegralska racionalna funkcija  $f(z) = z^n/(\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon)$  ima enostavna pola  $z_1 = (-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon$  in  $z_2 = (-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})/\varepsilon$ , od katerih je le  $z_1$  znotraj krožnice  $|z| = 1$ . Kot je znano, je

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{z_1^n}{2(\varepsilon z_1 + 1)}.$$

Nazadnje dobimo z izrekom o ostankih realen rezultat:

$$I_n = \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi} d\varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{2p}{\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), z_1) = 2p \frac{(\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 1)^n}{\varepsilon^n \sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Zato je

$$a_n = \frac{2p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left( \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 1}{\varepsilon} \right)^n.$$

19. Izračunajte z metodo ostankov

$$a_n = \frac{\cos \varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi},$$

pri čemer je  $n$  nenegativno celo število in  $0 < \varepsilon < \pi/2$ .

**Rešitev**

Očitno je  $a_n$  realni del integrala

$$I_n = \frac{\cos \varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi} d\varphi}{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi},$$

ki ga prevedemo, tako kot v prejšnji nalogi, s substitucijo  $z = e^{i\varphi}$  na integral kompleksne funkcije po pozitivno orientirani enotski krožnici, torej

$$I_n = \frac{\cos \varepsilon}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi} d\varphi}{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi} = \frac{\cos \varepsilon}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1} dz}{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon \left(z + \frac{1}{z}\right)^2}.$$

S poenostavljanjem dobimo:

$$I_n = \frac{4 \cos \varepsilon}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{2z^2(2 - \sin^2 \varepsilon) - z^4 \sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon}.$$

Podintegralska funkcija

$$g(z) = \frac{z^{n+1}}{2z^2(2 - \sin^2 \varepsilon) - z^4 \sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varepsilon}$$

ima 4 pole, od katerih sta  $z_1 = \tan(\varepsilon/2)$  in  $z_2 = -\tan(\varepsilon/2)$  znotraj krožnice  $|z| = 1$ . Ni težko izračunati ostanka funkcije  $g(z)$  v točkah  $z_1$  in  $z_2$ :

$$\operatorname{Res}(g(z), z_1) = \frac{\tan^n(\varepsilon/2)}{8 \cos \varepsilon}, \quad \operatorname{Res}(g(z), z_2) = (-1)^n \frac{\tan^n(\varepsilon/2)}{8 \cos \varepsilon}.$$

Nazadnje je pred nami rezultat:

$$I_n = \frac{4 \cos \varepsilon}{\pi i} \cdot 2\pi i (\operatorname{Res}(g(z), z_1) + \operatorname{Res}(g(z), z_2)) = \tan^n(\varepsilon/2)(1 + (-1)^n).$$

Ker je rezultat realen, je  $a_n = I_n$ . Očitno je treba razlikovati med lihimi in sodimi indeksi:

$$a_{2n} = 2 \tan^{2n}(\varepsilon/2), \quad a_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

20. Izračunajte z metodo ostankov

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi,$$

kjer je  $n$  celo število.

### Rešitev

Očitno je  $I_n$  realni del integrala

$$J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} e^{in\varphi - i \sin \varphi} d\varphi,$$

ki ga bomo pretvorili s substitucijo  $z = e^{i\varphi}$ ,  $d\varphi = dz/(iz)$  na integral kompleksne funkcije po enotski krožnici v pozitivni smeri:

$$J_n = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} e^{(z+1/z)/2} z^n e^{-(z-1/z)/2} dz/z = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} z^{n-1} e^{1/z} dz.$$

Podintegralska funkcija

$$f(z) = z^{n-1} e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{k!}$$

ima v točki  $z = 0$  bistveno singularnost. Residuum, koeficient pri potenci  $z^{-1}$ , je enak  $1/n!$ , če je  $n \geq 0$ , in 0 sicer. Torej je po izreku o ostankih

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = \frac{2\pi i}{n!}$$

za  $n \geq 0$  in 0 sicer.

Končno lahko zapišemo:

$$I_n = J_n = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} f(z) dz = \frac{2\pi}{n!}$$

za  $n \geq 0$  in 0 sicer.

21. Z metodo ostankov izračunajte

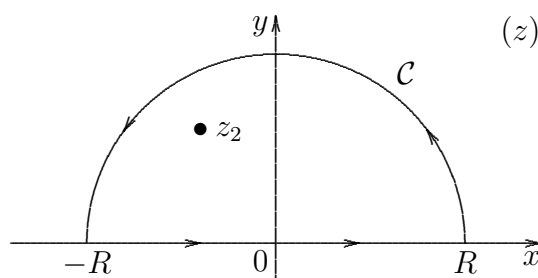
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

## Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 13)^2} = \frac{z}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2},$$

ki ima pola druge stopnje  $z_1 = -2 - 3i$  in  $z_2 = -2 + 3i$ , integriramo v pozitivni smeri po realni osi od  $-R$  do  $R$  in nato po polkrožnici radija  $R$  s središčem v  $z = 0$  na zgornji polravnini kompleksnih števil ( $z$ ). Opisana krivulja naj bo  $\mathcal{C}$ .



Pri tem izberemo  $R$  tako velik, da pol  $z_2$  pade v polkrog, torej  $R > \sqrt{13}$ . Na realni osi je  $z = x$ , na polkrožnici pa  $z = Re^{i\varphi}$  za  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Tako imamo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} + I(R) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Pri tem je

$$I(R) = \int_0^\pi \frac{Re^{i\varphi} Rie^{i\varphi} d\varphi}{(Re^{i\varphi} - z_1)^2(Re^{i\varphi} - z_2)^2}.$$

Ocenimo:

$$|I(R)| \leq \int_0^\pi \frac{R^2 d\varphi}{(R - |z_1|)^2 \cdot (R - |z_2|)^2} = \frac{\pi R^2}{(R - \sqrt{13})^4}.$$

Ko naredimo limitni proces  $R \rightarrow \infty$ , vidimo, da gre  $|I(R)|$  proti 0. S tem gre proti 0 tudi  $I(R)$  in dobimo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2)$$

in s tem dani integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Ostanek funkcije  $f(z)$  izračunamo za pol  $z_2$ , ki je 2. stopnje, po formuli:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (f(z)(z - z_2)^2)' = \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{z}{(z - z_1)^2} \right)' = \\ &= (z_2 - z_1)^{-2} - 2z_2(z_2 - z_1)^{-3}. \end{aligned}$$

Po poenostavitvi dobimo:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{z_1 + z_2}{(z_1 - z_2)^3} = -\frac{1}{54i}.$$

Nazadnje je pred nami rezultat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} = -\frac{\pi}{27}.$$

22. Z metodo ostankov izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

kjer sta  $a$  in  $b$  pozitivni konstanti.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} = \frac{1}{(z - ai)(z + ai)(z - bi)(z + bi)},$$

ki ima enostavne pole  $z_1 = -ai, z_2 = ai, z_3 = -bi, z_4 = bi$ , ko je  $a \neq b$ , in pola druge stopnje  $z_1 = -ai, z_2 = ai$ , ko je  $a = b$ , bomo integrirali po taki krivulji  $\mathcal{C}$  kot v prejšnji nalogi, pri čemer bomo vzeli  $R > \max\{a, b\}$ . Ker je stopnja imenovalca racionalne funkcije  $f(z)$  kar za 4 več (dovolj bi bilo že za 2) kot stopnja števca, in nobenega pola ni na realni osi, ugotovljamo, tako kot pri prejšnji nalogi, da integral po polkrogu z rastočim radijem  $R$  gre proti 0.

1. Za  $a \neq b$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), ai) + \operatorname{Res}(f(z), bi)).$$

Izračunajmo:

$$\operatorname{Res}(f(z), ai) = \frac{1}{(2ai)(ai - bi)(ai + bi)} = \frac{1}{2ai(b^2 - a^2)},$$

$$\operatorname{Res}(f(z), bi) = \frac{1}{(2bi)(bi - ai)(bi + ai)} = \frac{1}{2bi(a^2 - b^2)}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} &= \pi \left( \frac{1}{a(b^2 - a^2)} + \frac{1}{b(a^2 - b^2)} \right) = \\ &= \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi ab}{ab(a + b)}. \end{aligned}$$

2. Za  $a = b$  sicer lahko računamo z ostanki, toda iz dobljenega rezultata dobimo hitreje kar z vstavljanjem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

23. Z uporabo residuov (ostankov) izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4},$$

kjer sta  $a$  in  $b$  pozitivni konstanti.

### Rešitev

Podintegralska funkcija  $f(z) = z^4/(a + bz^2)^4$  ima pola četrte stopnje, rešitvi binomske enačbe  $z^2 = -a/b$ . To sta  $z_1 = -i\sqrt{a/b}$  in  $z_2 = i\sqrt{a/b}$ . S podobno analizo funkcije  $f(z)$  kot v prejšnjem primeru lahko zapišemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Residuum izračunamo takole:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \operatorname{Res}\left(\frac{z^4}{b^4(z - z_1)^4(z - z_2)^4}, z_2\right) = \\ &= \frac{1}{3!b^4} \lim_{z \rightarrow z_2} \left(\frac{z^4}{(z - z_1)^4}\right)''' = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{4z_1 z(z^2 + 3z_1 z + z_1^2)}{b^4(z - z_1)^7} = \frac{-i}{32ab^2\sqrt{ab}}. \end{aligned}$$

Tako smo prispeli do konca:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4} = \frac{\pi}{16ab^2\sqrt{ab}}.$$

24. Z metodo ostankov izračunajte *Laplaceova integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax) dx}{x^2 + b^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^2 + b^2},$$

kjer sta  $a$  in  $b$  pozitivni konstanti.

## Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{ze^{aiz}}{z^2 + b^2} = \frac{ze^{aiz}}{(z - bi)(z + bi)},$$

ki ima enostavna pola  $z_1 = -bi$  in  $z_2 = bi$ , bomo integrirali po taki krivulji  $\mathcal{C}$  kot v prejšnjih nalogah, pri čemer bomo vzeli  $R > b$ . Zopet imamo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x(\cos(ax) + i \sin(ax)) dx}{x^2 + b^2} + I(R) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Sedaj je

$$I(R) = \int_0^\pi \frac{Re^{i\varphi} e^{aiRe^{i\varphi}} iRe^{i\varphi} d\varphi}{R^2 e^{2i\varphi} + b^2}.$$

Nato ocenimo:

$$|I(R)| \leq \int_0^\pi \frac{R^2 e^{-aR \sin \varphi} d\varphi}{R^2 - b^2} \leq \frac{R^2}{R^2 - b^2} \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi.$$

Zadni integral ocenimo z Jordanovo neenakostjo

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

in dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi < 2 \int_0^\infty e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi}{aR}. \end{aligned}$$

Torej velja ocena:

$$|I(R)| < \frac{\pi R}{a(R^2 - b^2)}.$$

To pomeni, tako kot pri prejšnji nalogi, da  $I(R)$  gre proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Torej velja:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-\infty}^\infty \frac{x(\cos(ax) + i \sin(ax)) dx}{x^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Sedaj je

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{z_2 e^{aiz_2}}{2z_2} = \frac{ibe^{-ab}}{2ib} = \frac{e^{-ab}}{2}.$$

Našli smo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos(ax) + i \sin(ax)) dx}{x^2 + b^2} = \pi i e^{-ab}$$

in s tem tudi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(ax) dx}{x^2 + b^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax) dx}{x^2 + b^2} = \pi e^{-ab}.$$

Na koncu imamo zaradi sodosti podintegralske funkcije iskani integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax) dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Drugi integral izračunamo po istem postopku, z integracijo funkcije

$$g(z) = \frac{e^{aiz}}{z^2 + b^2} = \frac{e^{aiz}}{(z - bi)(z + bi)}$$

vzdolž iste krivulje  $\mathcal{C}$  kot prej funkcijo  $f(z)$ . Tudi tokrat ocenimo integral  $I(R)$  po krožnem loku in dobimo

$$|I(R)| < \frac{\pi}{a(R^2 - b^2)}.$$

Torej gre  $I(R)$  proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Ker je

$$\operatorname{Res}(g(z), z_2) = \frac{e^{aiz_2}}{2z_2} = \frac{e^{-ab}}{2ib} = \frac{e^{-ab}}{2ib}.$$

dobimo v limiti, ko  $R \rightarrow \infty$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos(ax) + i \sin(ax)) dx}{x^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(g(z), z_2) = \frac{\pi e^{-ab}}{b}.$$

Torej velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{x^2 + b^2} = 0$$

in zaradi sodosti podintegralske funkcije nazadnje

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi e^{-ab}}{2b}.$$

25. Z metodo ostankov izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2},$$

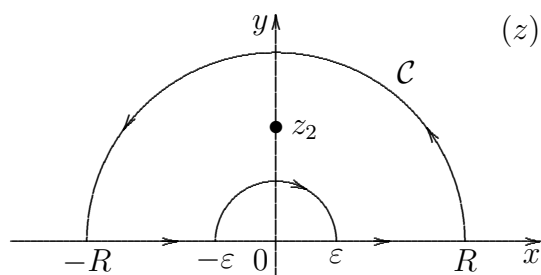
kjer je  $a$  pozitivna konstanta.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2} = \frac{\ln z}{(z - ai)(z + ai)},$$

ki ima enostavna pola  $z_1 = -ai$  in  $z_2 = ai$  ter razvejišče v točki  $z = 0$ , bomo integrirali po taki krivulji kot v prejšnjih dveh nalogah, le da se bomo razvejišču izognili po zgornji polravnini po polkrožnici malega radija  $\varepsilon$ . Vzeli bomo  $R > a$  in  $\varepsilon < a$ . Na negativni polovici realne osi je treba vzeti  $|x| = -x$  in zato  $\ln z = \ln(-x) + \pi i$ .



Sedaj imamo:

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(\ln(-x) + \pi i) dx}{x^2 + a^2} + \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} + I(R) + J(\varepsilon) =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Prvi integral, označimo ga s  $K(\varepsilon, R)$ , je sestavljen iz dveh delov. V prvega naredimo zamenjavo integracijske spremenljivke  $x \mapsto -x$  in dobimo:

$$\begin{aligned} K(\varepsilon, R) &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(\ln(-x) + \pi i) dx}{x^2 + a^2} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln(-x) dx}{x^2 + a^2} + \pi i \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} + \frac{\pi i}{a} (\operatorname{arc tg}(R/a) - \operatorname{arc tg}(\varepsilon/a)). \end{aligned}$$

Ko  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$ , gre  $K(\varepsilon, R)$  proti

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} + \frac{\pi^2 i}{2a}.$$

Sedaj moramo analizirati še integrala  $I(R)$  in  $J(\varepsilon)$ , definirana z izrazoma:

$$I(R) = \int_0^{\pi} \frac{(\ln R + i\varphi) i R e^{i\varphi} d\varphi}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2}, \quad J(\varepsilon) = \int_{\pi}^0 \frac{(\ln \varepsilon + i\varphi) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon^2 e^{2i\varphi} + a^2}.$$

Ocenimo:

$$|I(R)| \leq \int_0^{\pi} \frac{R(\ln R + \pi) d\varphi}{R^2 - a^2} = \frac{R(\ln R + \pi)\pi}{R^2 - a^2}.$$

Očitno gre  $I(R)$  proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Prav tako ocenimo

$$|J(\varepsilon)| \leq \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon(|\ln \varepsilon| + \pi) d\varphi}{a^2 - \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon(|\ln \varepsilon| + \pi)\pi}{a^2 - \varepsilon^2}.$$

Hitro ugotovimo, da tudi  $J(\varepsilon)$  gre proti 0, ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tako po limitnem procesu  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$  najdemo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} + \frac{\pi^2 i}{2a} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Sedaj izračunajmo še

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{\ln(ia)}{2ai} = \frac{\ln a + i\pi/2}{2ai},$$

tako da imamo nazadnje:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2 + a^2} + \frac{\pi^2 i}{2a} = \frac{\pi \ln a}{a} + \frac{\pi^2 i}{2a}.$$

Iskani integral je torej:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

26. Z metodo ostankov izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{x^2 + a^2},$$

kjer je  $a$  pozitivna konstanta.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{z^2 + a^2} = \frac{\ln z}{(z - ai)(z + ai)},$$

ki ima enostavna pola  $z_1 = -ai$  in  $z_2 = ai$  ter razvejišče v točki  $z = 0$ , bomo integrirali po isti krivulji kot v prejšnji nalogi, le da se bomo razvejišču izognili po zgornji polravnini po polkrožnici malega radija  $\varepsilon$ . Vzeli bomo  $R > a$  in  $\varepsilon < a$ . Na negativni polovici realne osi je spet treba vzeti  $|x| = -x$  in zato  $\ln z = \ln(-x) + \pi i$ .

Izračunajmo

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{\ln^2(ia)}{2ai} = \frac{(\ln a + i\pi/2)^2}{2ai} = \frac{\ln^2 a + \pi i \ln a - \pi^2/4}{2ai}.$$

Integrala po obeh krožnih lokih gresta v limitah  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$  proti 0 in kot rezultat obeh limitiranj dobimo:

$$\oint_C f(z) dz = \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{(\ln(-x) + \pi i)^2 dx}{x^2 + a^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_2).$$

Z zamenjavo  $x \rightarrow -x$  v drugem integralu dobimo:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} - \pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \\ &= \frac{4\pi \ln^2 a + 4i\pi^2 \ln a - \pi^3}{4a}. \end{aligned}$$

Upoštevamo znani integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

primerjamo realna dela leve in desne strani, pa dobimo:

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2} - \frac{\pi^3}{2a} = \frac{4\pi \ln^2 a - \pi^4}{4a}.$$

Prenesemo drugi člen na desno stran, delimo z 2, pa imamo rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi(4 \ln^2 a + \pi^2)}{8a}.$$

## Dopolnilo

S primerjavo imaginarnih delov pa bi imeli

$$2\pi \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi^2 \ln a}{a},$$

kar nam zopet da znani integral:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

27. Z metodo ostankov izračunajte *Dirichletov integral*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x}.$$

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

ki ima enostaven pol  $z_1 = 0$ , bomo integrirali po taki krivulji kot v prejšnji nalogi. Najprej je

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz} \, dz}{z} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix} \, dx}{x} + \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} \, d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} \, dx}{x} + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\varphi}} iRe^{i\varphi} \, d\varphi}{Re^{i\varphi}}.$$

V prvi integral na desni strani uvedemo novo spremenljivko  $x \mapsto -x$  in ga združimo s tretjim integralom, ostala dva pa poenostavimo in dobimo:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz} \, dz}{z} = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x \, dx}{x} - i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\varphi}} \, d\varphi + i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\varphi}} \, d\varphi = 0.$$

Drugi integral na desni strani stremi proti  $\pi$ , ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tretji integral pa ocenimo z uporabo Jordanove neenakosti:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\varphi}} \, d\varphi \right| &= \left| \int_0^{\pi} e^{iRe^{\cos \varphi} + i \sin \varphi} \, d\varphi \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{Ri \cos \varphi} e^{-R \sin \varphi} \, d\varphi \right| \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \varphi} \, d\varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\varphi/\pi} \, d\varphi < 2 \int_0^{\infty} e^{-2R\varphi/\pi} \, d\varphi = \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Torej gre tretji integral proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Po limitnem procesu  $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  dobimo:

$$2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} - i\pi = 0.$$

Končno imamo

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

### Dopolnilo

1. Rezultat lahko posplošimo z uvedbo realnega parametra  $a$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \cdot \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Krajše lahko zapišemo tudi:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a).$$

2. Sedaj ni težko izračunati še integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x \, dx}{x^2},$$

ki se ga lotimo kar z metodo per partes:

$$u = \sin^2 x, \quad du = 2 \sin x \cos x \, dx = \sin(2x) \, dx, \quad dv = \frac{dx}{x^2}, \quad v = -\frac{1}{x}.$$

Na koncu dobimo spet Dirichletov integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x \, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \cdot \sin^2 x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin(2x) \, dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultat je torej:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x \, dx}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Izračunajmo še nekoliko splošnejši integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx) \, dx}{x^2},$$

kjer sta  $a$  in  $b$  pozitivni konstanti.

Lotimo se ga spet kar z metodo per partes:

$$\begin{aligned} u &= \sin(ax) \sin(bx), \quad du = [a \cos(ax) \sin(bx) + b \sin(ax) \cos(bx)] dx = \\ &= \frac{a}{2} [\sin((a+b)x) - \sin((a-b)x)] dx + \frac{b}{2} [\sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)] dx, \\ dv &= \frac{dx}{x^2}, \quad v = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Očitno je

$$\frac{1}{x} \cdot \sin(ax) \sin(bx) \Big|_0^\infty = 0$$

in integral lahko izrazimo z Dirichletovim integralom:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(ax) \sin(bx) dx}{x^2} &= \frac{a\pi}{4} [\text{sign}(a+b) - \text{sign}(a-b)] + \\ &+ \frac{b\pi}{4} [\text{sign}(a+b) + \text{sign}(a-b)] = \frac{\pi}{2} \min(a, b). \end{aligned}$$

Našli smo, kar smo iskali:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax) \sin(bx) dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \min(a, b).$$

4. Za pozitivni konstanti  $a$  in  $b$  lahko sedaj izračunamo še:

$$\int_0^\infty \frac{(\cos(2ax) - \cos(2bx)) dx}{x^2}.$$

Najprej faktoriziramo razliko kosinusov, nato pa upoštevamo prejšnji rezultat:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(\cos(2ax) - \cos(2bx)) dx}{x^2} &= 2 \int_0^\infty \frac{\sin((a+b)x) \sin((b-a)x) dx}{x^2} = \\ &= \pi \min(a+b, b-a) = \pi(b-a). \end{aligned}$$

Tako imamo nazadnje rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{(\cos(2ax) - \cos(2bx)) dx}{x^2} = \pi(b - a).$$

5. Izračunajmo na podlagi znanih rezultatov še integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x dx}{x^3}.$$

Poskusimo kar z metodo per partes:

$$u = \sin^3 x, \quad du = 3 \sin^2 x \cos x dx = \frac{3}{2} \sin x \sin(2x) dx, \quad dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2}.$$

Dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \cdot \sin^3 x \Big|_0^\infty + \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\sin x \sin(2x) dx}{x^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \min(1, 2).$$

Torej je:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x dx}{x^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

28. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x},$$

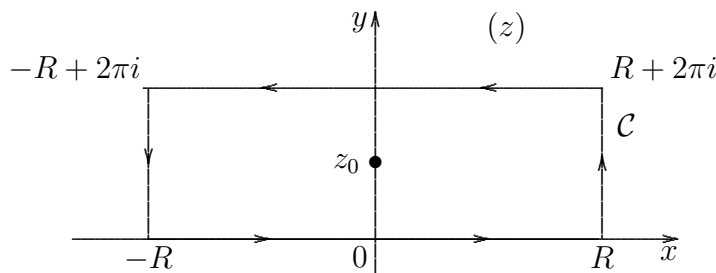
kjer je  $a$  realna konstanta med 0 in 1.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

bomo integrirali v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) v pozitivni smeri vzdolž ograje  $\mathcal{C}$  pravokotnika z oglišči  $-R$ ,  $R$ ,  $R+2\pi i$ ,  $-R+2\pi i$ , v katerem ima funkcija enostaven pol  $z_0 = \pi i$ .



Dobimo:

$$\begin{aligned}
 & \oint_C f(z) dz = \\
 &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)} idy}{1+e^{R+iy}} + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)} dx}{1+e^{x+2\pi i}} + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)} idy}{1+e^{-R+iy}} = \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -2\pi i e^{a\pi i}.
 \end{aligned}$$

Naredili bomo limitni proces, ko  $R \rightarrow \infty$ . Prvi integral na desni strani bo pri tem prešel v iskani integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x},$$

tretji, že izlimitirani integral, pa poenostavimo:

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+2\pi i)} dx}{1+e^{x+2\pi i}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} e^{2a\pi i} dx}{1+e^x} = -e^{2a\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} = -e^{2a\pi i} I.$$

Drugi integral pa ocenimo:

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)} idy}{1+e^{R+iy}} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{aiy} idy}{1+e^R e^{iy}} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR} dy}{e^R - 1} = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1}.$$

Ker je  $0 < a < 1$ , gre očitno integral proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Za tretji integral imamo:

$$\left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)} idy}{1+e^{-R+iy}} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR} e^{aiy} idy}{1+e^{-R} e^{iy}} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-aR} dy}{1-e^{-R}} = \frac{2\pi e^{(1-a)R}}{e^R - 1}.$$

Ker je  $0 < a < 1$ , gre prav tako integral proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Na koncu dobimo:

$$I - e^{2a\pi i} I = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Torej je nazadnje

$$I = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

### Dopolnilo

V pravkar izračunan integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \quad 0 < a < 1,$$

vpeljimo novo integracijsko spremenljivko

$$u = \frac{1}{1 + e^x}, \quad e^x = \frac{1 - u}{u}.$$

Preprost premislek pokaže, da stari integracijski meji  $x = -\infty$  ustreza nova meja  $u = 1$ , meji  $x = \infty$  pa  $u = 0$ . Poleg tega takoj z diferenciranjem dobimo

$$dx = -\frac{du}{u(1-u)}$$

in zato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = -\int_1^0 \frac{u(1-u)^a du}{u^a u(1-u)} = \int_0^1 u^{-a} (1-u)^{a-1} du = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Spomnimo se definicij funkcij

$$\mathbf{B}(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du, \quad p > 0, \quad q > 0,$$

in

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} du, \quad p > 0,$$

ali Eulerjevih integralov ter povezave med njima:

$$\mathbf{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Torej lahko zapišemo, česar nismo uspeli pri realni analizi:

$$\mathbf{B}(a, 1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, \quad 0 < a < 1.$$

V posebnem primeru  $a = 1/2$  dobimo

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi,$$

iz česar najdemo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Posledica tega rezultata je po substituciji  $u = x^2$  Poissonov integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

29. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax) dx}{\operatorname{ch} x},$$

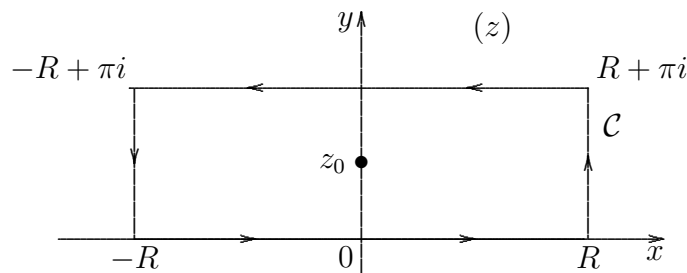
kjer je  $a$  realna konstanta med  $-1$  in  $1$ .

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} z}$$

bomo integrirali v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) v pozitivni smeri vzdolž ograde  $\mathcal{C}$  pravokotnika z oglišči  $-R$ ,  $R$ ,  $R + \pi i$ ,  $-R + \pi i$ , v katerem ima funkcija enostaven pol  $z_0 = \pi i/2$ .



Dobimo:

$$\begin{aligned}
 & \oint_C f(z) dz = \\
 &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{ch} x} + \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(R+iy)} + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+\pi i)} dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} + \int_\pi^0 \frac{e^{a(-R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(-R+iy)} = \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i \frac{e^{a\pi i/2}}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = 2\pi e^{a\pi i/2}.
 \end{aligned}$$

Naredili bomo limitni proces, ko  $R \rightarrow \infty$ . Prvi člen tedaj konvergira proti integralu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{ch} x},$$

tretji pa proti

$$-e^{a\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} = e^{a\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{ch} x} = e^{a\pi i} I.$$

Drugi integral najprej ocenimo:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^\pi \frac{e^{a(R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(R+iy)} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{aR} e^{aiy} idy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y} \right| \leq \\
 & \leq \int_0^\pi \frac{e^{aR} dy}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 R \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R \sin^2 y}} \leq \frac{\pi e^{aR}}{\operatorname{sh} R} = \frac{2\pi e^{-(1-a)R}}{1 - e^{-2R}},
 \end{aligned}$$

ker je vedno  $\operatorname{ch} R \geq \operatorname{sh} R$ . Zaradi pogoja  $-1 < a < 1$  konvergira ta integral proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Isto ugotovimo za četrti integral. Tako najdemo:

$$I + e^{a\pi i} I = (1 + e^{a\pi i})I = 2\pi e^{a\pi i/2}.$$

Primerjajmo realna dela obeh strani dobljene enačbe:

$$(1 + \cos(\pi a))I = 2 \cos^2(\pi a/2)I = 2\pi \cos(\pi a/2).$$

Tako imamo nazadnje:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Če zamenjamo integracijsko spremenljivko  $x$  z  $-x$ , dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Če oba integrala seštejemo in upoštevamo enakost  $2 \operatorname{ch}(ax) = e^{ax} + e^{-ax}$ , lahko končno napišemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

### Dopolnilo

Naj bo  $b$  pozitivno število in  $a$  število med  $-b$  in  $b$ . Potem lahko na podlagi zgornjega rezultata izračunamo še integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch}(bx)} dx$$

z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $u = bx$ ,  $dx = du/b$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch}(bx)} dx = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(au/b)}{\operatorname{ch} u} du = \frac{\pi}{b \cos \frac{\pi a}{2b}}, \quad -b < a < b.$$

Pogoj  $-b < a < b$  oziroma  $-1 < a/b < 1$  mora biti izpolnjen zato, da lahko uporabimo rezultat prejšnje naloge. Izračunali smo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{ch}(bx)} dx = \frac{\pi}{b \cos \frac{\pi a}{2b}}, \quad -b < a < b.$$

30. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x},$$

kjer je  $a$  realna konstanta.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{aiz}}{\operatorname{ch} z}$$

bomo integrirali, tako kakor v prejšnji nalogi, v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) v pozitivni smeri vzdolž ograje  $\mathcal{C}$  pravokotnika, ki ima oglišča v točkah  $-R, R, R + \pi i, -R + \pi i$ , v katerem ima funkcija enostaven pol  $z_0 = \pi i/2$ .

Dobimo:

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch} x} + \int_0^{\pi} \frac{e^{ai(R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(R+iy)} + \int_R^{-R} \frac{e^{ai(x+\pi i)} dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} + \int_{\pi}^0 \frac{e^{ai(-R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(-R+iy)} = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0) = 2\pi i \frac{e^{ai\pi/2}}{\operatorname{sh}(\pi i/2)} = 2\pi e^{-a\pi/2}. \end{aligned}$$

Naredili bomo limitni proces, ko  $R \rightarrow \infty$ . Prvi člen tedaj konvergira proti integralu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch} x},$$

tretji pa proti

$$-e^{-a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}(x+\pi i)} = e^{-a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch} x} = e^{-a\pi} I.$$

Drugi integral najprej ocenimo:

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{ai(R+iy)} idy}{\operatorname{ch}(R+iy)} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{aiR} e^{-ay} idy}{\operatorname{ch} R \cos y + i \operatorname{sh} R \sin y} \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{e^{-ay} dy}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 R \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 R \sin^2 y}} \leq \frac{1}{\operatorname{sh} R} \int_0^\pi e^{-ay} dy,$$

pri čemer smo upoštevali, da je vedno  $\operatorname{ch} R \geq \operatorname{sh} R$ . Ta integral pa konvergira proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Isto ugotovimo za četrti integral. Tako najdemo najprej relacijo

$$I + e^{-a\pi} I = (1 + e^{-a\pi})I = 2\pi e^{-a\pi/2},$$

nato pa še

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{2\pi e^{-\pi a/2}}{1 + e^{-\pi a}}.$$

Nazadnje dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)}.$$

### Dopolnilo

Naj bo  $b$  pozitivno,  $a$  pa poljubno realno število. Potem lahko na podlagi zgornjega rezultata izračunamo še integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}(bx)},$$

in sicer z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $u = bx$ , za katero velja  $dx = du/b$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}(bx)} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(au/b) du}{\operatorname{ch} u} = \frac{\pi}{b \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}}.$$

Našli smo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}(bx)} = \frac{\pi}{b \operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}}.$$

31. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}^2 x},$$

kjer je  $a$  realna konstanta.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{aiz}}{\operatorname{ch}^2 z}$$

bomo integrirali, tako kakor v prejšnji nalogi, v pozitivni smeri vzdolž ograde  $\mathcal{C}$  pravokotnika, ki ima oglišča v točkah  $-R, R, R + \pi i, -R + \pi i$ , v katerem ima funkcija pol druge stopnje v  $z_0 = \pi i/2$ .

Dobimo:

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}^2 x} + \int_0^{\pi} \frac{e^{ai(R+iy)} idy}{\operatorname{ch}^2(R+iy)} + \int_R^{-R} \frac{e^{ai(x+\pi i)} dx}{\operatorname{ch}^2(x+\pi i)} + \int_{\pi}^0 \frac{e^{ai(-R+iy)} idy}{\operatorname{ch}^2(-R+iy)} = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0). \end{aligned}$$

Naredili bomo limitni proces, ko  $R \rightarrow \infty$ . Prvi člen tedaj konvergira proti integralu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}^2 x},$$

tretji pa proti

$$-e^{-a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}^2(x+\pi i)} = -e^{-a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -e^{-a\pi} I.$$

Drugi in četrti integral očitno konvergirata proti 0, kar ugotovimo tako kot v prejšnjih nalogah.

Zato lahko izrazimo:

$$I - e^{-a\pi} I = (1 - e^{-a\pi})I = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Residuum funkcije  $f(z)$  najlaže najdemo iz njenega Laurentovega razvoja okrog točke  $z_0 = \pi i/2$ . V ta namen naredimo zamenjavo spremenljivke:  $w = z - \pi i/2$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{aiz}}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{e^{ai(w+\pi i/2)}}{\operatorname{ch}^2(w+\pi i/2)} = -e^{-a\pi/2} \frac{e^{aiw}}{\operatorname{sh}^2 w} = \\ &= 2e^{-a\pi/2} \frac{e^{aiw}}{1 - \operatorname{ch}(2w)} = 2e^{-a\pi/2} \frac{1 + aiw - a^2w^2/2 + \dots}{-2w^2 - 2w^4/3 + \dots} = \\ &= e^{-a\pi/2} \left( -\frac{1}{w^2} - \frac{ai}{w} + A + Bw + \dots \right) \end{aligned}$$

Torej je  $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = -iae^{-\pi a/2}$  in zato

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{2\pi a e^{-\pi a/2}}{1 - e^{-\pi a}}.$$

Nazadnje dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\pi a}{\operatorname{sh}(\pi a/2)}.$$

### Dopolnilo

Naj bo  $b$  pozitivno,  $a$  pa poljubno realno število. Potem lahko na podlagi zgornjega rezultata izračunamo še integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}^2(bx)}$$

z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $u = bx$ ,  $dx = du/b$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}^2(bx)} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(au/b) du}{\operatorname{ch}^2 u} = \frac{\pi a}{b^2 \operatorname{sh} \frac{\pi a}{2b}}.$$

Rezultat je torej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch}^2(bx)} = \frac{\pi a}{b^2 \operatorname{sh} \frac{\pi a}{2b}}.$$

V posebnem primeru, ko je  $a = t$  in  $b = 1/2$ , dobimo integral, s katerim izrazimo karakteristično funkcijo *logistične verjetnostne porazdelitve*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{\operatorname{ch}^2(x/2)} = \frac{4\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}.$$

32. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{\operatorname{sh} x},$$

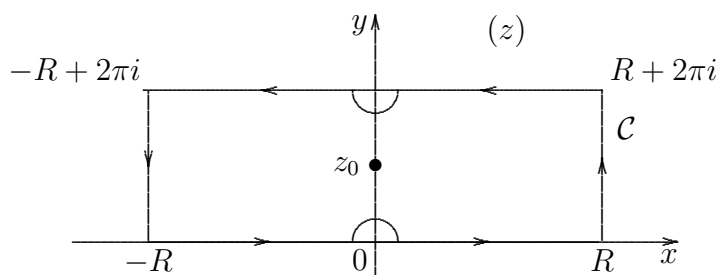
kjer je  $a$  realna konstanta.

### Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{ aiz }}{\operatorname{sh} z}$$

bomo tokrat integrirali v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) v pozitivni smeri vzdolž ograde  $\mathcal{C}$  v točkah  $0$  in  $2\pi i$  obrezanega pravokotnika z oglišči  $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$ , v katerem ima funkcija enostaven pol v  $z_0 = \pi i$ . Polkrožca s središčema v točkah  $0$  in  $2\pi i$  imata polmer  $\varepsilon > 0$ . V limiti bomo spustili  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$ .



Integral funkcije  $f(z)$  po  $\mathcal{C}$  razdelimo na 8 delov. Po spodnji levi polovici stranice imamo

$$I_1 = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ aix }}{\operatorname{sh} x} dx,$$

ki v limiti konvergira proti

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x}.$$

Integral po spodnjem polkrožcu je

$$I_2 = \int_{\pi}^0 \frac{e^{ai\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\operatorname{sh}(\varepsilon e^{i\varphi})},$$

ki očitno v limiti konvergira proti  $-i\pi$ .

Po spodnji desni polovici stranice imamo

$$I_3 = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x},$$

ki v limiti konvergira proti

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x}.$$

Integral po desni stranici pravokotnika je

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ai(R+iy)} i dy}{\operatorname{sh}(R+iy)},$$

ki konvergira proti 0, kar pokažemo na isti način kot v prejšnjih nalogah.

Integral po desni polovici zgornje stranice je

$$I_5 = \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{ai(x+2\pi i)} dx}{\operatorname{sh}(x+2\pi i)},$$

ki konvergira proti

$$-e^{-2a\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x}.$$

Integral po zgornjem polkrožcu je

$$I_6 = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{e^{ai(2\pi i + \varepsilon e^{i\varphi})} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\operatorname{sh}(2\pi i + \varepsilon e^{i\varphi})},$$

ki očitno v limiti konvergira proti  $-i\pi e^{-2\pi a}$ .

Integral po levi polovici zgornje stranice je

$$I_7 = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{ai(x+2\pi i)} dx}{\operatorname{sh}(x+2\pi i)},$$

ki konvergira proti

$$-e^{-2a\pi} \int_0^\infty \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x}.$$

Končno, integral po levi stranici pravokotnika je

$$I_8 = \int_{2\pi}^0 \frac{e^{ai(-R+iy)} i dy}{\operatorname{sh}(-R+iy)},$$

ki konvergira proti 0, kar pokažemo na isti način kot v prejšnjih nalogah.

Ko vse izlimitirane integrale seštejemo, dobimo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x} - i\pi - e^{-2a\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x} - i\pi e^{-2\pi a} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Nič težko ni izračunati:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{e^{aiz}(z - \pi i)}{\operatorname{sh} z} = -e^{-\pi a}.$$

Torej imamo:

$$(1 - e^{-2\pi a}) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x} = \pi i(1 - 2e^{-\pi a} + e^{-2\pi a}) = \pi i(1 - e^{-\pi a})^2.$$

Po krajšanju s faktorjem  $1 - e^{-\pi a}$  in po preureditvi dobimo:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{aix} dx}{\operatorname{sh} x} = \pi i \frac{1 - e^{-\pi a}}{1 + e^{-\pi a}} = \pi i \frac{e^{\pi a/2} - e^{-\pi a/2}}{e^{\pi a/2} + e^{-\pi a/2}} = \pi i \operatorname{th}(\pi a/2).$$

Torej smo končno našli:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(ax) dx}{\operatorname{sh} x} = \pi \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}.$$

## Dopolnilo

Naj bo  $b$  pozitivno,  $a$  pa poljubno realno število. Potem lahko na podlagi zgornjega rezultata izračunamo še integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)}$$

z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $u = bx$ ,  $dx = du/b$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(au/b) du}{\operatorname{sh} u} = \frac{\pi}{b} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b}.$$

Z odvajanjem po parametru  $a$  dobimo še:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{\pi}{b} \frac{\partial}{\partial a} \left( \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} \right) = \frac{\pi^2}{2b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{2b}}.$$

Tako imamo integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{\pi}{b} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2b}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{\pi^2}{2b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi a}{2b}}.$$

33. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh} x},$$

kjer je  $a$  realna konstanta, ki ustreza pogoju  $-1 < a < 1$ .

## Rešitev

Kompleksno funkcijo

$$f(z) = \frac{\operatorname{sh}(az)}{\operatorname{sh} z}$$

bomo tokrat integrirali v ravnini kompleksnih števil ( $z$ ) v pozitivni smeri vzdolž ograde  $\mathcal{C}$  v točki  $2\pi i$  obrezanega pravokotnika z oglišči  $-R$ ,  $R$ ,  $R + 2\pi i$ ,  $-R + 2\pi i$ , v katerem ima funkcija enostaven pol v

$z_0 = \pi i$ . V točki  $z = 0$  ima funkcija odpravljivo singularnost, ker obstaja  $\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{sh}(az)/\operatorname{sh} z = a$ . Polkrožec s središčem v točki  $2\pi i$  naj ima polmer  $\varepsilon > 0$ . V limiti bo  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$ . Pri pogoju  $-1 < a < 1$  integrala po desni in levi stranici pravokotnika gresta proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ . Integral po polkrogu polmera  $0 < \varepsilon < 1$  okoli točke  $2\pi i$  je enak

$$I(\varepsilon) = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sh}(a(2\pi i + \varepsilon e^{i\varphi})) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\operatorname{sh}(2\pi i + \varepsilon e^{i\varphi})} = -i \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\varphi} \operatorname{sh}(2a\pi i + a\varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi}{\operatorname{sh}(\varepsilon e^{i\varphi})}$$

in očitno je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = -i \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sh}(2a\pi i) d\varphi = \pi \sin(2a\pi).$$

Integral funkcije  $f(z)$  po zgornji stranici pravokotnika je

$$\int_R^{\varepsilon} \frac{\operatorname{sh}(a(2\pi i + x)) dx}{\operatorname{sh}(2\pi i + x)} + \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{\operatorname{sh}(a(2\pi i + x)) dx}{\operatorname{sh}(2\pi i + x)},$$

kar strema, z upoštevanjem adicijskega izreka v izrazu  $\operatorname{sh}(2\pi ai + ax)$ , proti

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(a(2\pi i + x)) dx}{\operatorname{sh}(2\pi i + x)} = -\cos(2a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh} x},$$

ko  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tedaj dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh}(x)} - \cos(2a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh} x} + \pi \sin(2a\pi) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i).$$

Residuum lahko hitro izračunamo:

$$\operatorname{Res}(f(z), \pi i) = \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\operatorname{sh}(az)(z - \pi i)}{\operatorname{sh} z} = \frac{\operatorname{sh}(a\pi i)}{\operatorname{ch}(\pi i)} = -i \sin(a\pi).$$

Tako imamo:

$$(1 - \cos(2\pi a)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh}(x)} = -\pi \sin(2a\pi) + 2\pi \sin(a\pi).$$

Z malo trigonometrije izraz poenostavimo:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2(a\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh} x} &= -2\pi \sin(a\pi) \cos(a\pi) + 2\pi \sin(a\pi) = \\ &= 2\pi \sin(a\pi)(1 - \cos(a\pi)) = 4\pi \sin(a\pi) \sin^2(a\pi/2). \end{aligned}$$

Po zadnji poenostavitvi najdemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh} x} = \pi \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2}.$$

### Dopolnilo

Naj bo  $b$  pozitivno število, število  $a$  pa naj bo med  $-b$  in  $b$ . Potem lahko na podlagi zgornjega rezultata izračunamo še integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)}.$$

S substitucijo  $u = bx$ ,  $du = b dx$  namreč dobimo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax) dx}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{\pi}{b} \operatorname{tg} \frac{a\pi}{2b}, \quad -b < a < b.$$

34. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x},$$

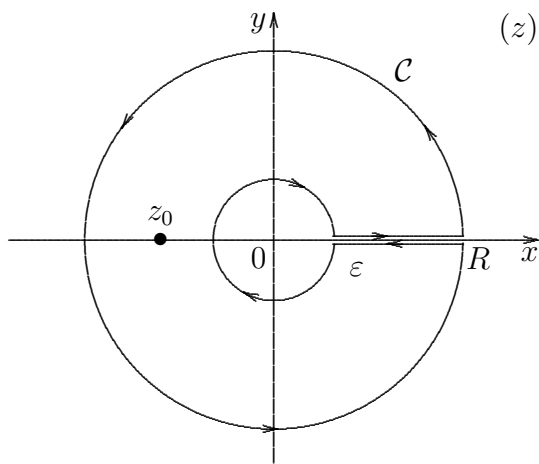
kjer je  $p$  realna konstanta,  $0 < p < 1$ .

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = z^{p-1}/(1+z)$  ima v točki  $z = 0$  razvejišče in v točki  $z_0 = -1 = e^{\pi i}$  enostaven pol. Residuuum funkcije v tej točki je:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{p\pi i} e^{-\pi i} = -e^{p\pi i}.$$

Funkcijo  $f(z)$  integriramo po zgornjem bregu pozitivne realne osi od  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , do  $R$ ,  $R > 1$ , nato po krožnici  $|z| = R$ , nato po spodnjem bregu pozitivne realne osi od  $R$  do  $\varepsilon$  in nazadnje po krožnici  $|z| = \varepsilon$ . Tako prehodimo v pozitivni smeri krivuljo  $\mathcal{C}$ .



Velja:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_0).$$

Naj bo  $I(\varepsilon)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = \varepsilon$  v negativni smeri:

$$I(\varepsilon) = \oint_{|z|=\varepsilon} f(z) dz = -i \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^p e^{(p-1)i\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{1 + \varepsilon e^{i\varphi}}.$$

Očitno zaradi  $0 < p < 1$  velja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 0.$$

Naj bo  $J(R)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = R$  v pozitivni smeri:

$$J(R) = \oint_{|z|=R} f(z) dz = i \int_0^{2\pi} \frac{R^p e^{(p-1)i\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{R e^{i\varphi} + 1}.$$

Očitno velja:

$$|J(R)| \leq \frac{2\pi R^p}{R-1} = \frac{2\pi}{R^{1-p} - R^{-p}}.$$

Zaradi  $0 < p < 1$  potem velja:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = 0.$$

V limiti  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobimo po zgornjem bregu pozitivne realne osi

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x},$$

po spodnjem bregu pozitivne realne osi pa

$$\int_{\infty}^0 \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1} dx}{1+x} = - \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} e^{2\pi i(p-1)} dx}{1+x} = -e^{2p\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x}.$$

Tako smo našli

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} - e^{2p\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = 2\pi i(-e^{p\pi i}).$$

od koder dobimo

$$(1 - e^{2p\pi i}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = -2\pi i e^{p\pi i},$$

Po preureditvi imamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = -2\pi i \frac{e^{p\pi i}}{1 - e^{2p\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Izračunali smo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$$

### Dopolnilo

Če v zgornji integral vstavimo novo integracijsko spremenljivko  $u = 1/(1+x)$ , dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \int_0^1 u^{-p}(1-u)^{p-1} du = \mathbf{B}(1-p, p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

Ponovno smo našli:

$$\mathbf{B}(1-p, p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1.$$

35. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2},$$

kjer sta  $p$  in  $\lambda$  realni konstanti,  $-1 < p < 1$ ,  $-\pi < \lambda < \pi$ .

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = z^p/(1 + 2z \cos \lambda + z^2)$  ima v točki  $z = 0$  razvejišče, v točkah  $z_1 = -e^{\lambda i} = e^{(\pi+\lambda)i}$  in  $z_2 = -e^{-\lambda i} = e^{(\pi-\lambda)i}$  pa enostavna pola, če je  $\lambda \neq 0$ . Residua funkcije v teh točkah sta tedaj

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{z_1^p}{z_1 - z_2}, \quad \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{z_2^p}{z_2 - z_1},$$

njuna vsota pa

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \frac{z_1^p - z_2^p}{z_1 - z_2} = \frac{e^{p(\pi+\lambda)i} - e^{p(\pi-\lambda)i}}{e^{(\pi+\lambda)i} - e^{(\pi-\lambda)i}} = \\ &= -e^{p\pi i} \frac{\sin(p\lambda)}{\sin \lambda}. \end{aligned}$$

V primeru  $\lambda = 0$  dobimo funkcijo  $f(z) = z^p/(z+1)^2$ , ki ima razvejišče v točki  $z = 0$ , v  $z_0 = -1 = e^{\pi i}$  pa pol druge stopnje.

$$\operatorname{Res}(f(z), -1) = \lim_{z \rightarrow e^{\pi i}} (z^p)' = pe^{(p-1)\pi i} = -pe^{p\pi i}.$$

Funkcijo  $f(z)$  integriramo po enaki krivulji  $\mathcal{C}$  kot v prejšnji nalogi in dobimo:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2)) = -2\pi i e^{p\pi i} \frac{\sin(p\lambda)}{\sin \lambda}.$$

Naj bo  $I(\varepsilon)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = \varepsilon$  v negativni smeri:

$$I(\varepsilon) = \oint_{|z|=\varepsilon} f(z) dz = -i \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{p+1} e^{pi\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{1 + 2\varepsilon e^{i\varphi} \cos \lambda + \varepsilon^2 e^{2i\varphi}}.$$

Očitno zaradi  $-1 < p < 1$  velja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 0.$$

Naj bo  $J(R)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = R$  v pozitivni smeri:

$$J(R) = \oint_{|z|=R} f(z) dz = i \int_0^{2\pi} \frac{R^{p+1} e^{pi\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{1 + 2R e^{i\varphi} \cos \lambda + R^2 e^{2i\varphi}}.$$

Očitno velja:

$$|J(R)| \leq \frac{2\pi R^{p+1}}{R^2 - 1} = \frac{2\pi}{R^{1-p} - R^{-p-1}}.$$

Zaradi  $-1 < p < 1$  potem velja:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = 0.$$

V limiti  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobimo po zgornjem bregu pozitivne realne osi

$$\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2},$$

po spodnjem bregu pozitivne realne osi pa

$$\int_\infty^0 \frac{(xe^{2\pi i})^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = -e^{2p\pi i} \int_0^\infty \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2},$$

Tako smo našli:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} - e^{2p\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = -2\pi i e^{p\pi i} \frac{\sin(p\lambda)}{\sin \lambda},$$

od koder dobimo za  $p \neq 0$

$$(1 - e^{2p\pi i}) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = -2\pi i e^{p\pi i} \frac{\sin(p\lambda)}{\sin \lambda},$$

Po preureditvi imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} &= -\frac{2\pi i e^{p\pi i} \sin(p\lambda)}{(1 - e^{2p\pi i}) \sin \lambda} = \\ &= \frac{2\pi i \sin(p\lambda)}{(e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}) \sin \lambda} = \frac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(p\pi)}. \end{aligned}$$

Izračunali smo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(p\pi)}, \quad -1 < p < 1, p \neq 0, -\pi < \lambda < \pi, \lambda \neq 0.$$

V primeru  $\lambda = 0, p \neq 0$  pa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x)^2} = \frac{p\pi}{\sin(p\pi)}, \quad -1 < p < 1, p \neq 0.$$

Enak rezultat bi dobili z limito:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x)^2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(p\pi)} = \frac{p\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Za  $\lambda = 0, p = 0$  imamo

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1,$$

kar je pri  $\lambda = 0$  isto kot

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p\pi}{\sin(p\pi)} = 1.$$

Pri  $p = 0$ ,  $0 < \lambda < \pi$  gre za integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} &= \int_0^\infty \frac{dx}{(x + \cos \lambda)^2 + \sin^2 \lambda} = \\ &= \frac{1}{\sin \lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \cos \lambda}{\sin \lambda} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\sin \lambda} (\pi/2 - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} \lambda)) = \frac{\lambda}{\sin \lambda}. \end{aligned}$$

Enak rezultat bi tedaj dobili tudi z limito:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(p\pi)} = \frac{\lambda}{\sin \lambda}.$$

Pri  $p = 0$ ,  $-\pi < \lambda < 0$  dobimo enak izraz, saj je potem  $0 < -\lambda < \pi$  in zamenjava  $\lambda \rightarrow -\lambda$  obliko rezultata ne spremeni.

Skratka, če v primerih, ko je vsaj en od parametrov  $p$  in  $\lambda$  enak nič, vzamemo ustrezne limite, velja:

$$\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1 + 2x \cos \lambda + x^2} = \frac{\pi \sin(p\lambda)}{\sin \lambda \sin(p\pi)}, \quad -1 < p < 1, -\pi < \lambda < \pi.$$

36. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{x^p dx}{(1 + x^2)^2},$$

kjer je  $p$  realna konstanta,  $-1 < p < 3$ .

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = z^p/(1 + z^2)^2$  ima v točki  $z = 0$  razvejišče, v točkah  $z_1 = -i = e^{3\pi i/2}$  in  $z_2 = i = e^{\pi i/2}$  pa pola druge stopnje. Residua funkcije v teh točkah sta tedaj

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \left( \frac{z^p}{(z - z_2)^2} \right)' = \frac{z_1^{p-1}(pz_1 - pz_2 - 2z_1)}{(z_1 - z_2)^3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{3p\pi i/2}(p-1)}{4i}, \\
\operatorname{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \left( \frac{z^p}{(z-z_1)^2} \right)' = \frac{z_2^{p-1}(pz_2 - pz_1 - 2z_2)}{(z_2 - z_1)^3} = \\
&= -\frac{e^{p\pi i/2}(p-1)}{4i},
\end{aligned}$$

njuna vsota pa je po krajšem računu:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) + \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{(p-1)}{2} \sin(p\pi/2) e^{p\pi i}.$$

Funkcijo  $f(z)$  integriramo po enaki krivulji  $\mathcal{C}$  kot v prejšnji nalogi in dobimo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = (p-1)\pi i \sin(p\pi/2) e^{p\pi i}.$$

Naj bo spet  $I(\varepsilon)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = \varepsilon$  v negativni smeri:

$$I(\varepsilon) = \oint_{|z|=\varepsilon} f(z) dz = -i \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{p+1} e^{pi\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{(1 + \varepsilon^2 e^{2i\varphi})^2}.$$

Očitno zaradi  $-1 < p < 3$  velja:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = 0.$$

Naj bo  $J(R)$  integral funkcije  $f(z)$  po krožnici  $|z| = R$  v pozitivni smeri:

$$J(R) = \oint_{|z|=R} f(z) dz = i \int_0^{2\pi} \frac{R^{p+1} e^{pi\varphi} e^{i\varphi} d\varphi}{(1 + R^2 e^{2i\varphi})^2}.$$

Očitno velja:

$$|J(R)| \leq \frac{2\pi R^{p+1}}{(R^2 - 1)^2} = \frac{2\pi}{(R^{(3-p)/2} - R^{-(p+1)/2})^2}.$$

Zaradi  $-1 < p < 3$  potem velja:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = 0.$$

V limiti  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$  dobimo po zgornjem bregu pozitivne realne osi

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2},$$

po spodnjem bregu pozitivne realne osi pa

$$\int_{\infty}^0 \frac{(xe^{2\pi i})^p dx}{(1+x^2)^2} = -e^{2p\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2}.$$

Tako smo našli:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} - e^{2p\pi i} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} = (p-1)\pi i \sin(p\pi/2)e^{p\pi i}.$$

od koder dobimo

$$(1 - e^{2p\pi i}) \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} = (p-1)\pi i \sin(p\pi/2)e^{p\pi i},$$

Po preureditvi imamo za  $p \notin \{0, 1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{(p-1)\pi i \sin(p\pi/2)e^{p\pi i}}{1 - e^{2p\pi i}} = \\ &= \frac{(p-1)\pi i \sin(p\pi/2)}{e^{-p\pi i} - e^{p\pi i}} = \frac{(p-1)\pi i \sin(p\pi/2)}{-2i \sin(p\pi)} = \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)}. \end{aligned}$$

Izračunali smo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)}, \quad -1 < p < 3, \quad p \notin \{0, 1, 2\}.$$

Izjemne primere pogledamo posebej. Pri  $p = 0$  imamo integral, ki nastopa v eni od prejšnjih nalog:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Isti rezultat bi dobili z limito

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Pri  $p = 1$  gre za integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2},$$

ki ga izračunamo s substitucijo  $u = 1 + x^2$ ,  $du = 2x dx$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

Do enakega rezultata bi prišli tudi z limito

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{-\pi}{-2\pi \sin(p\pi/2)} = \frac{1}{2}.$$

Pri  $p = 2$  pa imamo integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2},$$

v katerem naredimo substitucijo  $x = 1/u$ ,  $dx = -du/u^2$  in dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Popolnoma isti rezultat pa dobimo z limito:

$$\lim_{p \rightarrow 2} \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)} = \frac{-\pi}{-4} = \frac{\pi}{4}.$$

Če v izjemnih primerih  $p \in \{0, 1, 2\}$  vzamemo ustrezne limite, potem velja:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-p)\pi}{4 \cos(p\pi/2)}, \quad -1 < p < 3.$$

37. Izračunajte integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{1+x^3}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = \ln^2 z / (1+z^3)$  ima enostavne pole v točkah  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = e^{\pi i/3}$  in  $z_3 = e^{5\pi i/3}$ . Vzamemo tisto vejo funkcije  $\ln z$ , kjer ima  $z$  argument med 0 in  $2\pi$ . Za residue dobimo:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{\ln^2(-1)}{3(-1)^2} = \frac{(\pi i)^2}{3} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \frac{\ln^2(e^{\pi i/3})}{3(e^{\pi i/3})^2} = -\frac{\pi^2}{27} e^{-2\pi i/3} = \frac{\pi^2}{54} (1 + i\sqrt{3}).$$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_3) = \frac{\ln^2(e^{5\pi i/3})}{3(e^{5\pi i/3})^2} = -\frac{25\pi^2}{27} e^{-4\pi i/3} = \frac{25\pi^2}{54} (1 - i\sqrt{3}).$$

Z integracijo funkcije  $f(z)$  po krivulji  $\mathcal{C}$  iz zadnjih nalog dobimo v limitah  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{1+x^3} - \int_0^{\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx}{1+x^3} = 2\pi \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}(f(z), z_k) = \frac{8\pi^3 i}{27} + \frac{8\pi^3 \sqrt{3}}{9}.$$

S primerjavo realnih in imaginarnih delov najdemo:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{27}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

### Dopolnilo

Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

lahko izračunamo tudi drugače. Vanj vpeljemo novo integracijsko spremenljivko  $u = 1/(1 + x^3)$ . Dobimo

$$dx = -\frac{1}{3}u^{-4/3}(1-u)^{-2/3} du$$

in nato:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} &= \frac{1}{3} \int_0^1 u^{-1/3}(1-u)^{-2/3} du = \frac{1}{3} \mathbf{B}(2/3, 1/3) = \\ &= \frac{\pi}{3 \sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

38. Z metodo ostankov izračunajte integrala

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln^4 x dx}{1+x^2}.$$

### Rešitev

Za integracijsko pot vzamemo enako krivuljo  $\mathcal{C}$  kot v prejšnjem primeru. Za prvi integral vzamemo funkcijo  $f(z) = \ln^3 z/(1+z^2)$ , ki ima v točki  $z = 0$  razvejišče in enostavna pola v točkah  $z_1 = -i$  in  $z_2 = i$  ter zapišemo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f(z), z_1) + \text{Res}(f(z), z_2)).$$

Vzamemo tisto vejo funkcije  $\ln z$ , kjer ima  $z$  argument med 0 in  $2\pi$ .

Brez težav izračunamo:

$$\text{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\ln^3 z}{z - i} = \frac{(3\pi i/2)^3}{-2i} = \frac{27\pi^3}{16},$$

$$\text{Res}(f(z), z_2) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\ln^3 z}{z + i} = \frac{(\pi i/2)^3}{2i} = -\frac{\pi^3}{16}.$$

Integrala po krožnicah gresta proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^3 x dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^3 dx}{1+x^2} = \frac{13\pi^4 i}{4}.$$

Ko poenostavimo levo stran, imamo:

$$-6\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2} + 12\pi^2 \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{1+x^2} + 8i\pi^3 \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{13\pi^4 i}{4}.$$

Od tod sledi

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{1+x^2} = 0,$$

kar lahko izračunamo tudi z razdelitvijo na integrala po intervalih  $(0, 1]$  in  $[1, \infty)$ , nato pa v enega od njiju uvedemo novo integracijsko spremenljivko  $x = 1/u$ , in

$$-6\pi \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2} + 4\pi^4 = \frac{13\pi^4}{4}.$$

Torej imamo prvi rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^3}{8}.$$

Na splošno velja:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2n+1} x dx}{1+x^2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

kar zlahka preverimo z razdelitvijo na integrala po intervalih  $(0, 1]$  in  $[1, \infty)$  in z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $x = 1/u$  v enega izmed njiju.

Za drugi integral v nalogi vzamemo funkcijo  $g(z) = \ln^5 z / (1+z^2)$ , ki ima prav tako v točki  $z = 0$  razvejišče in enostavna pola v točkah  $z_1 = -i$  in  $z_2 = i$  ter zapišemo

$$\oint_C g(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(g(z), z_1) + \operatorname{Res}(g(z), z_2)).$$

Vzamemo tisto vejo funkcije  $\ln z$ , kjer ima  $z$  argument med 0 in  $2\pi$ .

Brez težav izračunamo:

$$\operatorname{Res}(g(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\ln^5 z}{z - i} = \frac{(3\pi i/2)^5}{-2i} = -\frac{243\pi^5}{64},$$

$$\operatorname{Res}(g(z), z_2) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\ln^5 z}{z + i} = \frac{(\pi i/2)^5}{2i} = \frac{\pi^5}{64}.$$

Integrala po krožnicah gresta proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^5 x dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^5 dx}{1+x^2} = -\frac{121\pi^6 i}{16}.$$

Po razvoju binoma imamo:

$$\begin{aligned} & -10\pi i \int_0^\infty \frac{\ln^4 x dx}{1+x^2} + 40\pi^2 \int_0^\infty \frac{\ln^3 x dx}{1+x^2} + 80\pi^3 i \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2} - \\ & -80\pi^4 \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{1+x^2} - 32\pi^5 i \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{121\pi^6 i}{16}. \end{aligned}$$

Po izenačitvi imaginarnih delov in z upoštevanjem prejšnjega rezultata najdemo

$$-10\pi \int_0^\infty \frac{\ln^4 x dx}{1+x^2} + 10\pi^6 - 16\pi^6 = -\frac{121\pi^6}{16}.$$

Od tod končno sledi rezultat:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^4 x dx}{1+x^2} = \frac{5\pi^5}{32}.$$

### Dopolnilo

Na tak način lahko postopoma izračunamo integrale oblike

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2n} x dx}{1+x^2},$$

kjer je  $n$  naravno število ali 0. Funkcija  $g_n(z) = \ln^{2n+1} z / (1 + z^2)$  ima prav tako v točki  $z = 0$  razvejišče in enostavna pola v točkah  $z_1 = -i$  in  $z_2 = i$ , zato lahko zapišemo

$$\oint_{\mathcal{C}} g(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(g(z), z_1) + \text{Res}(g(z), z_2)).$$

Vzamemo tisto vejo funkcije  $\ln z$ , kjer ima  $z$  argument med 0 in  $2\pi$ .

Brez težav izračunamo:

$$\text{Res}(g_n(z), z_1) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\ln^{2n+1} z}{z - i} = \frac{(3\pi i/2)^{2n+1}}{-2i} = -\frac{(3\pi)^{2n+1}(-1)^n}{2^{2n+2}},$$

$$\text{Res}(g_n(z), z_2) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\ln^{2n+1} z}{z + i} = \frac{(\pi i/2)^{2n+1}}{2i} = \frac{\pi^{2n+1}(-1)^n}{2^{2n+2}}.$$

Integrala po krožnicah gresta proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2n+1} x dx}{1+x^2} - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^{2n+1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi^{2n+2}(-1)^{n+1}i}{2^{2n+1}} (3^{2n+1} - 1).$$

Po razvoju binoma imamo:

$$-\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} (2\pi i)^{2n+1-k} \int_0^\infty \frac{\ln^k x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^{2n+2}(-1)^{n+1}i}{2^{2n+1}} (3^{2n+1} - 1).$$

Za lihe  $k$  so integrali enaki 0, preostane pa nam po preureditvi rekurzija za sode  $k$ :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k} (2\pi)^{2n-2k} \int_0^\infty \frac{\ln^{2k} x dx}{1+x^2} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} (3^{2n+1} - 1).$$

Na podlagi rezultatov

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln^2 x dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3, \quad \int_0^\infty \frac{\ln^4 x dx}{1+x^2} = 5 \left(\frac{\pi}{2}\right)^5$$

dobimo iz zgornje rekurzije na primer še

$$\int_0^\infty \frac{\ln^6 x dx}{1+x^2} = 61 \left(\frac{\pi}{2}\right)^7$$

in lahko sklepamo, da velja na splošno:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2n} x dx}{1+x^2} = \varepsilon_{2n} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

kjer so  $\varepsilon_{2n}$  neka naravna števila. Zaporedje teh števil se začne z 1, 1, 5, 61.

Izkaže se, da lahko zapišemo  $\varepsilon_{2n} = |E_{2n}|$ , kjer so  $E_{2n}$  Eulerjeva števila.

Eulerjeva števila  $E_n$  so koeficienti v razvoju

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} z^k \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Iz definicije sledi, da je  $E_{2n+1} = 0$  za  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Torej velja na splošno:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} |E_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Naj bo  $a$  pozitivna konstanta. Potem lahko izračunamo tudi integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{a^2 + x^2}$$

z uvedbo nove integracijske spremenljivke  $x = au$ :

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{a^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{\ln^n(au) a du}{a^2 + a^2 u^2} = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{(\ln a + \ln u)^n du}{1 + u^2}.$$

Ko uporabimo binomsko formulo, dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln^{n-k} a \int_0^\infty \frac{\ln^k u du}{1 + u^2}.$$

Izrazimo z Eulerjevimi števili:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln^{n-k} a \left(\frac{\pi}{2}\right)^{k+1} |E_k|.$$

Ko opustimo člene, ki so enaki 0, dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^n x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \ln^{n-2k} a \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|.$$

V posebnem primeru imamo:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2a} \ln a, \quad \int_0^\infty \frac{\ln^2 x \, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{8a} (4 \ln^2 a + \pi^2).$$

39. Z metodo ostankov izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax) \, dx}{e^{2\pi x} - 1},$$

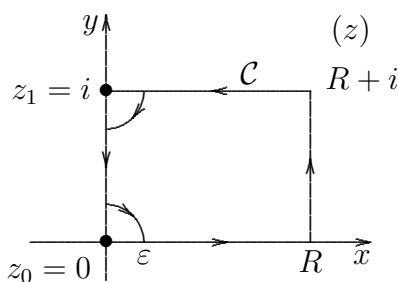
kjer je  $a$  pozitivna konstanta.

### Rešitev

Kompleksna funkcija  $f(z) = e^{iaz}/(e^{2\pi z} - 1)$  ima enostavne pole v točkah  $z_k = ki$ , kjer je  $k$  poljubno celo število. Funkcijo  $f(z)$  integrirajmo po pozitivno orientirani, enostavno sklenjeni krivulji  $\mathcal{C}$ , kot jo kaže slika, pri čemer sta  $R > 1$  in  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Naj bo

$$I(\varepsilon, R) = \int_\varepsilon^R \frac{e^{iax} \, dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

Iskani integral, označimo ga z  $I$ , je imaginarni del tega integrala, potem ko število  $R$  poženemo prek vseh meja,  $\varepsilon$  pa proti 0.



Na območju, ki ga ograjuje krivulja  $\mathcal{C}$ , je funkcija  $f(z)$  analitična in zato je

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) \, dz = 0.$$

Integral po spodnji stranici obrezanega pravokotnika naj bo

$$G(\varepsilon, R) = \int_{\varepsilon}^R f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iax} dx}{e^{2\pi x} - 1} = \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(ax) dx}{e^{2\pi x} - 1} + i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(ax) dx}{e^{2\pi x} - 1},$$

po zgornji stranici pa

$$H(\varepsilon, R) = \int_R^{\varepsilon} f(z) dz = \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{ia(x+i)} dx}{e^{2\pi(x+i)} - 1} = -e^{-a} G(\varepsilon, R).$$

Po desni stranici dobimo integral

$$J(R) = \int_R^{R+i} f(z) dz = \int_0^1 \frac{ie^{ia(R+iy)} dy}{e^{2\pi(R+iy)} - 1} = ie^{iaR} \int_0^1 \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi R} e^{2\pi iy} - 1}.$$

Očitno je

$$|J(R)| \leq \int_0^1 \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi R} - 1} = \frac{1 - e^{-a}}{a(e^{2\pi R} - 1)},$$

kar pa gre proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Po levi stranici pravokotnika je

$$K(\varepsilon) = \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} f(z) dz = \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{ie^{-ay} dy}{e^{2\pi y} - 1} = -i \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi y} - 1}.$$

Ko upoštevamo enakost  $e^{2\pi y} - 1 = 2i \sin(\pi y) e^{\pi y}$ , najdemo:

$$2K(\varepsilon) = - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{e^{-ay} e^{-\pi y} dy}{\sin(\pi y)} = i \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{-ay} dy - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{-ay} \operatorname{ctg}(\pi y) dy.$$

Preostaneta še integrala  $I_0(\varepsilon)$  in  $I_i(\varepsilon)$  po četrtinah krožnic okoli točk 0 oziroma  $i$ . Integral

$$I_0(\varepsilon) = \int_{\pi/2}^0 \frac{e^{ia\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{e^{2\pi\varepsilon e^{i\varphi}} - 1}$$

konvergira proti  $-i/4$ , ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Analogno velja za integral

$$I_i(\varepsilon) = \int_0^{-\pi/2} \frac{e^{ia(i+\varepsilon e^{i\varphi})} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{e^{2\pi(i+\varepsilon e^{i\varphi})} - 1} = e^{-a} \int_0^{-\pi/2} \frac{e^{iaze^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{e^{2\pi\varepsilon e^{i\varphi}} - 1},$$

ki konvergira proti  $-ie^{-a}/4$ , ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ker velja

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = G(\varepsilon, R) + J(R) + H(\varepsilon, R) + I_i(\varepsilon) + K(\varepsilon) + I_0(\varepsilon) = 0,$$

dobimo po primerjavi imaginarnih delov na levi in desni strani relacijo:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(ax) dx}{e^{2\pi x} - 1} + \Im(J(R)) - e^{-a} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(ax) dx}{e^{2\pi x} - 1} + \\ + \Im(I_i(\varepsilon)) + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{-ay} dy + \Im(I_0(\varepsilon)) = 0. \end{aligned}$$

Potem ko  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$ , dobimo z upoštevanjem zveznosti funkcije  $\Im(z)$  enačbo:

$$I - e^{-a}I - \frac{1}{4}e^{-a} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-ay} dy - \frac{1}{4} = 0.$$

Po njenem preoblikovanju pa

$$(1 - e^{-a})I = \frac{1}{4}(1 + e^{-a}) - \frac{1}{2a}(1 - e^{-a}).$$

Torej je

$$I = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \operatorname{cth}(a/2) - \frac{1}{2a}.$$

Tako smo končno izračunali:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{4} \operatorname{cth}(a/2) - \frac{1}{2a}.$$

Dobljeni izraz je pravilen tudi za  $a = 0$ , če priznamo limito

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{2a} \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ae^a + a - 2e^a + 2}{4a(e^a - 1)} = 0$$

za rezultat.

## Dopolnilo

Za pozitivni konstanti  $a$  in  $b$  imamo z uporabo preproste substitucije takoj integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax) dx}{e^{bx} - 1} = \frac{\pi}{2b} \operatorname{cth}(\pi a/b) - \frac{1}{2a}.$$

40. Naj bo  $f(z)$  racionalna funkcija, ki nima polov na pozitivnem delu realne osi, pa tudi ne v točki  $z = 0$ , in stopnja števca funkcije  $f(z)$  naj bo vsaj za 1 manjša od stopnje imenovalca. Dokažite, da je

$$\int_0^\infty \frac{f(x) dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Res} \left( \frac{f(z)}{\ln z - \pi}, a_k \right),$$

pri čemer je  $a_0 = -1$ , v točkah  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ima funkcija  $f(z)$  pole,  $\ln z$  pa je tista veja logaritma, kjer ima  $z$  argument med 0 in  $2\pi$ .

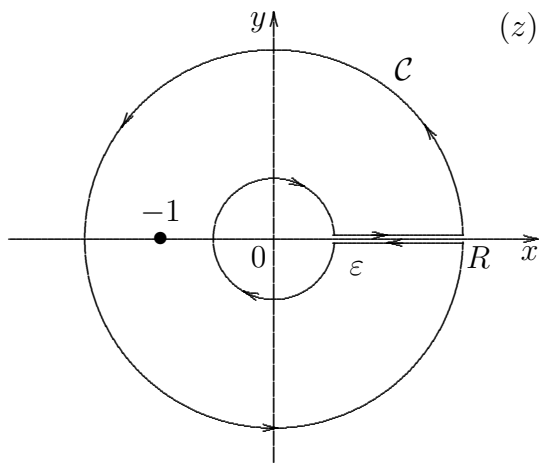
## Dokaz

Integrirali bomo funkcijo  $g(z) = f(z)/(\ln z - \pi i)$  vzdolž krivulje  $\mathcal{C}$  na sliki. Funkcija  $g(z)$  ima razvejišče v točki  $z = 0$ , pol v točki, kjer je  $\ln z = \pi i$ , to se pravi v točki  $a_0 = -1$ , ter pole tam, kjer jih ima racionalna funkcija  $f(z)$ , denimo v točkah  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , ki pa niso na pozitivni polovici realne osi, pa tudi ne v  $z = 0$ . Radij večje krožnice naj bo  $R > \max\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , radij manjše pa  $0 < \varepsilon < \min\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Hitro se vidi, da integral  $I(R)$  funkcije  $g(z)$  po krožnici radija  $R$  z rastočim  $R$  gre proti 0, integral  $J(\varepsilon)$  po manjši krožnici pa prav tako, ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Integrala po zgornjem in spodnjem bregu pozitivne realne osi pa sta

$$\int_\varepsilon^R \frac{f(x) dx}{\ln x - \pi i}, \quad \int_R^\varepsilon \frac{f(x) dx}{(\ln x + 2\pi i) - \pi i} = - \int_\varepsilon^R \frac{f(x) dx}{\ln x + \pi i},$$

tako da je vsota obeh:

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{f(x) dx}{\ln x - \pi i} - \int_{\varepsilon}^R \frac{f(x) dx}{\ln x + \pi i} = 2\pi i \int_{\varepsilon}^R \frac{f(x) dx}{\ln^2 x + \pi^2}.$$



Po izreku o ostankih velja

$$\oint_C g(z) dz = 2\pi i \int_{\varepsilon}^R \frac{f(x) dx}{\ln^2 x + \pi^2} + I(R) + J(\varepsilon) = 2\pi i \sum_{k=0}^n \text{Res}(g(z), a_k).$$

Ko  $R \rightarrow \infty$  in  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dobimo po krajšanju s faktorjem  $2\pi i$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x) dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \sum_{k=0}^n \text{Res}(g(z), a_k) = \sum_{k=0}^n \text{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_k\right).$$

41. Z uporabo pravkar dokazane trditve izračunajte za pozitiven  $a$  integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x + \pi^2)}.$$

### Rešitev

Vzamemo funkcijo  $f(z) = 1/(z+a)$ , ki ima enostaven pol  $a_1 = -a$  in izpolnjuje pogoje trditve. Izračunati moramo residua funkcije  $g(z) =$

$f(z)/(\ln z - \pi i)$  pri  $a_0 = -1$  in  $a_1 = -a$ . Vzemimo primer  $a \neq 1$ . Tedaj je:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_0\right) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{(z+a)(\ln z - \pi i)} = \frac{1}{a-1} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(1/z)} = \frac{1}{1-a}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_1\right) &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{z+a}{(z+a)(\ln z - \pi i)} = \frac{1}{\ln(-a) - \pi i} = \\ &= \frac{1}{(\ln a + \pi i) - \pi i} = \frac{1}{\ln a}. \end{aligned}$$

Torej je

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{\ln a}, \quad a \neq 1.$$

Za  $a = 1$  pa bi dobili rezultat z limitiranjem  $a \rightarrow -1$  zgornjega izraza:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x + \pi^2)} = \lim_{a \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-a} + \frac{1}{\ln a} \right) = \frac{1}{2}.$$

Enak rezultat bi dobili tudi, če upoštevamo, da ima tedaj funkcija  $g(z)$  pol druge stopnje v točki  $a_0 = -1$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, -1\right) &= \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{(z+1)^2}{(z+1)(\ln z - \pi i)} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{z+1}{\ln z - \pi i} \right)' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z \ln z - \pi i z - z - 1}{z(\ln z - \pi i)^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

42. Z uporabo prej dokazane trditve izračunajte za pozitiven  $a$  integral:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(\ln^2 x + \pi^2)}.$$

### Rešitev

Tokrat vzamemo funkcijo  $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ , ki ima enostavna pola  $a_1 = -ai$  in  $a_2 = ai$  in izpolnjuje pogoje trditve. Izračunati moramo

residue funkcije  $g(z) = f(z)/(\ln z - \pi i)$  pri  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -ai$  in  $a_2 = ai$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_0\right) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{(z^2+a^2)(\ln z - \pi i)} = \frac{1}{1+a^2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{\ln z - \pi i} = \\ &= \frac{1}{1+a^2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(1/z)} = -\frac{1}{1+a^2}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_1\right) &= \lim_{z \rightarrow -ai} \frac{z+ai}{(z+ai)(z-ai)(\ln z - \pi i)} = \\ &= \frac{1}{(-2ai)(\ln(-ai) - \pi i)} = \frac{1}{(-2ai)(\ln a + \pi i/2)}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\ln z - \pi i}, a_2\right) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{z-ai}{(z+ai)(z-ai)(\ln z - \pi i)} = \\ &= \frac{1}{(2ai)(\ln(ai) - \pi i)} = \frac{1}{(2ai)(\ln a - \pi i/2)}. \end{aligned}$$

Vsota zadnjih dveh residuov je

$$\frac{1}{2ai} \left( \frac{1}{\ln a - \pi i/2} - \frac{1}{\ln a + \pi i/2} \right) = \frac{\pi}{2a(\ln^2 a + \pi^2/4)}.$$

Torej je nazadnje:

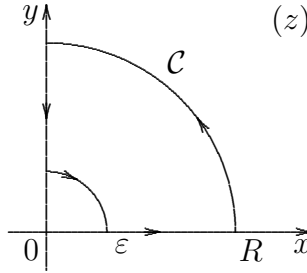
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a(\ln^2 a + \pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

43. Bodita  $a$  in  $p$  konstanti,  $a > 0$  in  $0 < p < 1$ . Izračunajte integrala

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos(ax) dx, \quad \int_0^\infty x^{p-1} \sin(ax) dx.$$

### Rešitev

Integrala bomo izračunali z integracijo funkcije  $f(z) = z^{p-1}e^{-az}$  po krivulji  $\mathcal{C}$ , ki jo vidimo na sliki.



Integral po krožnem loku polmera  $R$  je:

$$I(R) = \int_0^{\pi/2} (Re^{i\varphi})^{p-1} e^{-aRe^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi.$$

Ker za  $0 < \varphi < \pi/2$  velja neenakost  $-\cos \varphi < 2\varphi/\pi - 1$ , lahko ocenimo:

$$|I(R)| \leq R^p \int_0^{\pi/2} e^{-aR \cos \varphi} d\varphi \leq R^p e^{-aR} \int_0^{\pi/2} e^{2aR\varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi R^{p-1}}{2a} (1 - e^{-aR}).$$

Torej gre  $I(R)$  proti 0, ko  $R \rightarrow \infty$ .

Integral po krožnem loku polmera  $\varepsilon$  je:

$$J(\varepsilon) = - \int_0^{\pi/2} (\varepsilon e^{i\varphi})^{p-1} e^{-a\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = -i \int_0^{\pi/2} (\varepsilon e^{i\varphi})^p e^{-a\varepsilon e^{i\varphi}} d\varphi.$$

Iz tega takoj razberemo, da  $J(\varepsilon) \rightarrow 0$ , ko  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Po Cauchyjevem izreku velja:

$$\oint_C f(z) dz = \int_\varepsilon^R x^{p-1} e^{-ax} dx + I(R) + \int_R^\varepsilon y^{p-1} e^{(p-1)i\pi/2} e^{-aiy} i dy + J(\varepsilon) = 0.$$

V limitah  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $R \rightarrow \infty$  dobimo

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} dx - ie^{(p-1)\pi/2} \int_0^\infty y^{p-1} e^{-aiy} dy = 0$$

in nato

$$e^{-p\pi/2} \Gamma(p) a^{-p} = \int_0^\infty y^{p-1} e^{-aiy} dy.$$

Po primerjavi realnega in imaginarnega dela obeh strani imamo:

$$\int_0^\infty y^{p-1} \cos(ay) dy = \frac{\cos(p\pi/2) \Gamma(p)}{a^p}, \quad \int_0^\infty y^{p-1} \sin(ay) dy = \frac{\sin(p\pi/2) \Gamma(p)}{a^p}.$$

44. Naj bo  $f(z)$  omejena in cela funkcija. Z uporabo izreka o residuih dokažite *Liouvillov izrek*, ki pravi, da je taka funkcija lahko samo konstanta.

### Dokaz

Vzemimo poljubno velik  $R > 0$  in različni kompleksni števili  $a$  in  $b$ , ki sta znotraj kroga  $|z| < R$ . Potem velja po izreku o residuih:

$$I(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = \operatorname{Res}(g(z), a) + \operatorname{Res}(g(z), b),$$

kjer je  $g(z) = f(z)/((z-a)(z-b))$ . Funkcija  $g(z)$  ima enostavna pola v točkah  $a$  in  $b$  in residuuma:

$$\operatorname{Res}(g(z), a) = \frac{f(a)}{a-b}, \quad \operatorname{Res}(g(z), b) = \frac{f(b)}{b-a}.$$

Zato je

$$I(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}.$$

Po drugi strani pa z običajno parametrizacijo krožnice  $|z| = R$ , torej z  $z = Re^{i\varphi}$ , ocenimo:

$$|I(R)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) i Re^{i\varphi} d\varphi}{(Re^{i\varphi} - a)(Re^{i\varphi} - b)} \right| \leq \frac{MR}{(R - |a|)(R - |b|)}.$$

Pri tem je  $M > 0$  konstanta omejenosti funkcije  $f(z)$ :  $|f(z)| \leq M$  za vsak kompleksen  $z$ . Če  $R \rightarrow \infty$ , potem  $I(R) \rightarrow 0$  in zato je

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

To pomeni, da je  $f(a) = f(b)$ , ne glede na izbiro različnih točk  $a$  in  $b$  v ravnini kompleksnih števil. Funkcija  $f(z)$  je lahko le konstanta.

45. Izračunajte integrala

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx$$

pri čemer je  $n$  nenegativno celo število.

### Rešitev

Uporabili bomo Eulerjevo formulo

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

iz katere z binomsko formulo dobimo:

$$\begin{aligned} \cos^{2n} x &= \frac{1}{2^{2n}}(e^{ix} + e^{-ix})^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{kix} e^{-(2n-k)ix} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{(2k-2n)ix}. \end{aligned}$$

Ker je

$$\int_0^{2\pi} e^{pix} \, dx = 2\pi i \delta_{p,0},$$

kjer pomeni  $\delta_{p,q}$  pri celih številih  $p$  in  $q$  Kroneckerjev simbol, imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{(2k-2n)ix} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi} e^{(2k-2n)ix} dx = \frac{2\pi}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \delta_{2k-2n,0} = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Analogno dobimo z uporabo Eulerjeve formule

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

in binomske formule tudi:

$$\begin{aligned}\sin^{2n} x &= \frac{1}{(2i)^{2n}} (e^{ix} - e^{-ix})^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} e^{kix} e^{-(2n-k)ix} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} e^{(2k-2n)ix}.\end{aligned}$$

Z integracijo dobimo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} e^{(2k-2n)ix} \right) dx = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi} e^{(2k-2n)ix} dx = \\ &= \frac{(-1)^n 2\pi}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} \binom{2n}{k} \delta_{2k-2n,0} = \frac{(-1)^n 2\pi}{2^{2n}} (-1)^n \binom{2n}{n} = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Torej velja:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

## Dopolnilo

Zaradi simetrijskih lastnosti funkcij sinus in kosinus dobimo *Wallisova integrala*:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Brez težav ju zapišemo tudi v obliki

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pri tem pomeni:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n), \quad (2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1).$$

Posebej definiramo  $0!! = 1$ .

Kako pa je v primeru, ko sta pod integralskim znakom lihi potenci sinusa in kosinusa? Kako je torej z integraloma

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots?$$

Dovolj je izračunati enega od njiju, kajti integrala sta enaka, kar spoznamo po substituciji  $x = \pi/2 - u$ :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = - \int_{\pi/2}^0 \cos^{2n+1}(\pi/2 - u) \, du = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u \, du.$$

Eden od načinov za izračun integrala je uporaba substitucije

$$t = \sin^2 x, \quad x = \arcsin \sqrt{t}, \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}},$$

s katero dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n \, dt = \frac{1}{2} \mathbf{B}(n+1, 1/2) = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n+3/2)} = \frac{n!\sqrt{\pi}}{2(n+1/2)(n-1/2)\cdots(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \end{aligned}$$

Imamo torej rezultat:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sedaj lahko celo izpeljemo *Wallisovo formulo*. Za  $0 \leq x \leq \pi/2$  je  $0 \leq \sin x \leq 1$  in zato je tedaj za vsak naraven  $n$ :

$$0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq 1.$$

Z integracijo po intervalu  $[0, \pi/2]$  dobimo

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx < \frac{\pi}{2}.$$

Z znanimi vrednostmi pa to pomeni:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} < \frac{\pi}{2}.$$

S to relacijo osamimo število  $\pi/2$ :

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

S preoblikovanjem dobimo:

$$\left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n}.$$

Zaporedje  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  s splošnim členom

$$a_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

je očitno navzgor omejeno s  $\pi/2$ , je pa tudi naraščajoče, saj velja:

$$a_{n+1} - a_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)} > 0.$$

Zato je zaporedje  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergentno. Prav tako je konvergentno zaporedje  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  s splošnim členom

$$b_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2n} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n}$$

in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \cdot \frac{2n+1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ker pa je

$$a_n < \frac{\pi}{2} < b_n,$$

velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{2}.$$

Tako smo izpeljali *Wallisovo formulo*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Za izračun števila  $\pi$  ni primerna, ker zaporedji  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  prepočasi konvergirata.

# Bernoullijeva števila

## 1. BERNOULLIJEVI POLINOMI IN BERNOULLIJEVA ŠTEVILA

Sestavimo tako polinomsko zaporedje

$$B_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

pri katerem bo stopnja polinoma  $B_n(x)$  enaka  $n$  in

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{ter} \quad \int_0^1 B_n(x) dx = \delta_{n,0} \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vsako polinomsko zaporedje, v katerem je stopnja člena enaka indeksu, imenujemo *pravilno zaporedje*. Zaporedje Bernoullijevih polinomov je torej pravilno. Ker mora biti  $B_0(x)$  konstanta, imamo takoj:  $B_0(x) = 1$ . Iz pogoja  $B'_1(x) = 1$  dobimo  $B_1(x) = x + c_1$ , konstanto  $c_1$  pa izračunamo iz pogoja  $\int_0^1 B_1(x) dx = 0$  in dobimo:  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ . Podobno razvijemo ostale polinome  $B_n(x)$ . Zapišimo jih nekaj:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Polinomi  $B_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , so *Bernoullijevi polinomi*, imenovani po Jakobu Bernoulliju (1654–1705). Polinomi so *monični*, kar pomeni, da je njihov vodilni koeficient vselej enak 1.

Na krajiščih intervala  $[0, 1]$  ima polinom  $B_n(x)$  enaki vrednosti razen  $B_1(x)$ , pri katerem dobimo:  $B_1(0) = -\frac{1}{2}$  in  $B_1(1) = \frac{1}{2}$ . Za  $B_0(x)$  je seveda  $B_0(0) = B_0(1) = 1$ , za  $n > 1$  pa je

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x) dx = (n-1) \int_0^1 B_{n-1}(x) dx = 0.$$

Na kratko lahko to ugotovitev strnemo v zvezo:

$$B_n(1) - B_n(0) = \delta_{n-1,0}.$$

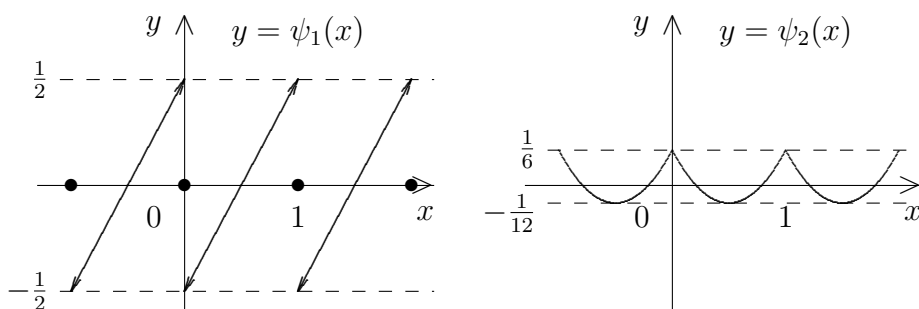
Polinome  $B_n(x)$  razvijmo na intervalu  $[0, 1]$  v trigonometrične Fourierove vrste

$$B_n(x) \sim \frac{1}{2} \alpha_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k^{(n)} \cos(2k\pi x) + \beta_k^{(n)} \sin(2k\pi x) \right),$$

pri čemer Fourierove koeficiente  $\alpha_k^{(n)}$  in  $\beta_k^{(n)}$  izračunamo po formulah:

$$\alpha_k^{(n)} = 2 \int_0^1 B_n(x) \cos(2k\pi x) dx \quad \text{in} \quad \beta_k^{(n)} = 2 \int_0^1 B_n(x) \sin(2k\pi x) dx.$$

Vsote Fourierovih vrst naj bodo funkcije  $\psi_n(x)$ , za katere takoj ugotovimo, da so povsod zvezne, odvedljive pa niso pri vseh celih argumentih  $x$ . Izjema je funkcija  $\psi_1(x)$ , ki ni zvezna pri nobenem celem argumentu  $x$ . Na intervalu  $[0, 1]$  seveda velja:  $\psi_n(x) = B_n(x)$  za vse indekse  $n \neq 1$ . Za  $n = 1$  pa je  $\psi_1(x) = B_1(x)$  za  $0 < x < 1$ . Grafa funkcij  $\psi_1(x)$  in  $\psi_2(x)$  kaže spodnja skica.



Očitno lahko vzamemo:

$$\alpha_k^{(0)} = 2\delta_{n,0} \quad \text{in} \quad \beta_k^{(0)} = 0 \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zaradi zveze  $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$  je dovolj izračunati Fourierove koeficiente za  $\psi_1(x)$ . Dobimo:

$$\alpha_k^{(1)} = 0 \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{in} \quad \beta_k^{(1)} = -\frac{1}{k\pi} \quad \text{za} \quad 1, 2, \dots$$

Tako imamo naslednjo Fourierovo vrsto:

$$\psi_1(x) = -\frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}.$$

Ker je

$$\psi_2'(x) = 2\psi_1(x) \quad \text{za} \quad 0 < x < 1 \quad \text{in} \quad \int_0^1 \psi_2(x) dx = 0,$$

dobimo najprej

$$\psi_2(x) = 2 \frac{2!}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2},$$

nato pa korak za korakom ugotovimo, da se da funkcije  $\psi_n(x)$  sodega indeksa  $n$  razviti po kosinutih, lihega indeksa pa po sinusih:

$$\psi_{2n}(x) = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2n}} \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_{2n+1}(x) = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2n+1}} \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Z Eulerjevima formulama

$$e^{2k\pi xi} = \cos(2k\pi x) + i \sin(2k\pi x) \quad \text{in} \quad e^{-2k\pi xi} = \cos(2k\pi x) - i \sin(2k\pi x)$$

dobimo kompleksno obliko:

$$\psi_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_k' \frac{e^{2k\pi xi}}{k^n},$$

kjer seštevamo po vseh celih številih  $k$ , različnih od 0.

Na prvi pogled vidimo, da so funkcije  $\psi_{2n}(x)$  v točki  $x = 0$  za  $n \geq 1$  dajo izraziti z Riemannovo funkcijo  $\zeta(s)$ , ki je za  $s > 1$  definirana kot vsota vrste:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Bernoullijeva števila  $B_n$  definirajmo sedaj takole:

$$B_n = B_n(0) \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Za prvih nekaj indeksov hitro najdemo:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Ker so funkcije  $\psi_n(x)$  za  $n \neq 1$  povsod zvezne in se na intervalu  $[0, 1]$  ujemajo s polinomi  $B_n(x)$ , lahko tedaj zapišemo tudi:

$$B_n = \psi_n(0).$$

Torej je za vse lihe  $n$  od vključno 3 naprej  $B_n = 0$ . V primeru sodih indeksov pa imamo

$$B_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \quad \text{in} \quad \zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \dots,$$

iz česar lahko izračunamo:

$$\zeta(2) = (-1)^2 \frac{(2\pi)^2}{4} \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = (-1)^3 \frac{(2\pi)^4}{48} \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Ker velja za  $n \geq 1$  relacija

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

to se pravi

$$1 < \zeta(2n) < 2,$$

imamo upoštevaje zvezo med  $B_{2n}$  in  $\zeta(2n)$  oceno:

$$\frac{2}{(2\pi)^{2n}} < \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2n}}.$$

Ker so števila  $B_n$  z lihimi indeksi od vključno 3 naprej enaka 0, imamo zato naslednji rezultat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n!} = 0.$$

Ker je

$$|B_{2n}| > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}},$$

velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |B_{2n}| = \infty.$$

Na intervalu  $[0, 1]$  so Bernoullijevi polinomi sodih indeksov takole omejeni:

$$|B_{2n}(x)| \leq B_{2n}.$$

Do te ocene pridemo s sklepom:

$$|B_{2n}(x)| = |\psi_{2n}(x)| \leq 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) = |B_{2n}|.$$

Rodovna funkcija  $G(x, z)$  v eksponencialni obliki za zaporedje Bernoullijevih polinomov  $B_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , je v splošnem funkcija kompleksnih spremenljivk  $x$  in  $z$ , ki razvita v potenčno vrsto glede na  $z$  generira te polinome:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Podobno vpeljemo rodovno funkcijo  $H(z)$  v eksponencialni obliki, v splošnem kompleksne spremenljivke  $z$ , za številsko zaporedje  $B_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ki

razvita v potenčno vrsto glede na  $z$  generira števila  $B_n$ :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n .$$

Poiščimo eksponencialni obliki rodovnih funkcij  $G(x, z)$  in  $H(z)$  Bernoullijevih polinomov oziroma Bernoullijevih števil. Ker je  $B_n = B_n(0)$ , mora veljati zveza:  $H(z) = G(0, z)$ . Naj bo torej najprej:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n .$$

Za  $n \geq 2$  in  $0 \leq x \leq 1$  velja

$$\left| \frac{B_n(x)}{n!} \right| = \left| \frac{\psi_n(x)}{n!} \right| \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \zeta(n) \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \frac{\pi^2}{6} < \frac{4}{(2\pi)^n}$$

in zato

$$\left| \frac{B_n(x)}{n!} z^n \right| < 4 \left( \frac{|z|}{2\pi} \right)^n .$$

Zato vrsta za funkcijo  $G(x, z)$  absolutno in enakomerno konvergira za  $|z| < 2\pi$  glede na  $x \in [0, 1]$ . Prav tako konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_{n-1}(x)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = z G(x, z) ,$$

in sicer proti  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, z)$ . Torej zadošča  $G(x, z)$  parcialni diferencialni enačbi

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, z) = z G(x, z) ,$$

ki ima splošno rešitev

$$G(x, z) = c(z) e^{xz} ,$$

kjer je  $c(z)$  samo od  $z$  odvisna funkcija. Ker je

$$\int_0^1 G(x, z) dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (x) z^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^1 B_n(x) dx \right) \frac{z^n}{n!} = 1$$

in po drugi strani

$$\int_0^1 G(x, z) dx = \int_0^1 c(z)e^{xz} dx = c(z) \frac{e^z - 1}{z},$$

imamo izraz za  $c(z)$ :

$$c(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Pripomniti je treba, da ima  $c(z)$  pri  $z = 0$  odpravljivo singularnost. Tako smo prišli do rodovnih funkcij:

$$G(x, z) = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

in

$$H(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Vrsti konvergirata za  $|z| < 2\pi$ , to se pravi na odprtem krogu radija  $2\pi$  s središčem v točki 0 v kompleksni ravnini. Ta krog sega do najbližje singularnosti funkcije  $c(z)$ . Vse singularnosti so v točkah  $z = 2m\pi i$ , kjer je  $m$  poljubno celo število. Za  $m = 0$  pa imamo, kot je bilo rečeno, odpravljivo singularnost.

## 2. POTENČNE VRSTE IN BERNOULLIJEVA ŠTEVILA

Videli smo, da je število  $B_1 = -\frac{1}{2}$  nekaj posebnega. Zato prenesimo člen  $B_1 z$  v izrazu za rodovno funkcijo Bernoullijevih števil na drugo stran enačaja in dobimo:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Po preureditvi lahko zapišemo

$$\frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < 2\pi.$$

Po zamenjavi spremenljivke  $z \rightarrow 2z$  pa še:

$$z \operatorname{cth} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \pi.$$

Ker velja preprosta enakost  $\operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z$ , dobimo z zamenjavo  $z \rightarrow iz$ :

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \pi.$$

Iz elementarne enakosti

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \frac{2z}{e^z - 1} - \frac{2z}{e^{2z} - 1}$$

dobimo z rodovno funkcijo:

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \pi$$

in po zamenjavi  $z \rightarrow iz$  z upoštevanjem enakosti  $\operatorname{sh} iz = i \sin z$  še:

$$\frac{z}{\sin z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 - 2^{2n-1}) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \pi.$$

Iz druge elementarne enakosti  $2 \operatorname{cth} 2z = \operatorname{cth} z + \operatorname{th} z$  pa sledi razvoj

$$\operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Ker je  $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$ , velja seveda tudi

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Iz enakosti

$$\left( \ln \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right)' = \operatorname{cth} z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

dobimo po integraciji od 0 do  $z$

$$\ln \frac{\operatorname{sh} z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}$$

in po zamenjavi  $z \rightarrow iz$  še

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n)!} z^{2n} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Pa še kakšna funkcija z Bernoullijevimi števili v razvoju v Maclaurinovo vrsto bi se našla.

### 3. ENAKOSTI Z BERNOULLIJEVIMI POLINOMI IN ŠTEVILI

S preureditvijo enakosti

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

v obliko

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

dobimo s primerjavo koeficientov enakost

$$x^n = \sum_{k=0}^n \frac{B_k(x)}{k!} \frac{n!}{(n-k+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} B_k(x),$$

ki velja za  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Z zamenjavo sumacijskega indeksa  $k \rightarrow n - k$  pa lepše:

$$x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} B_{n-k}(x).$$

Za Bernoullijeva števila takoj dobimo:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} B_{n-k} = \delta_{n,0}.$$

Z odvajanjem izpeljemo enostavnejšo formulo

$$nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} B'_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} B_{n-k-1}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x),$$

ki velja za  $n \geq 1$ . Lepše in enostavneje jo lahko prepisemo v rekurzivno formulo

$$nx^{n-1} + B_n(x) = (1 + B(x))^n, \quad \text{kjer je } B^k(x) \equiv B_k(x), B_0(x) = 1.$$

Podobno dobimo za Bernoullijeva števila rekurzivno formulo:

$$\delta_{n,1} + B_n = (1 + B)^n, \quad \text{kjer je } B^k \equiv B_k, B_0 = 1.$$

Bernoullijevi polinomi premorejo celo adicijsko formulo. Z razvojem funkcije  $G(x + y, z) = G(x, z)e^{yz}$  dobimo najprej

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+y)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} z^n,$$

nato pa s primerjavo koeficientov:

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}.$$

V posebnem primeru  $y = 1$  imamo

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x),$$

v primeru  $x = 0$  pa

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(0) y^{n-k}.$$

Pišimo raje  $x$  namesto  $y$ , pa smo dospeli do naslednje oblike za Bernoullijeve polinome:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Ta pove, da so vsi koeficienti Bernoullijevih polinomov v tesni zvezi z Bernoullijevimi števili. Zgornjo enakost lahko zapišemo simbolično takole:

$$B_n(x) = (x + B)^n, \quad B^n \equiv B_n, B_0 = 1.$$

Z že izpeljano formulo imamo nazadnje

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

Iz enakosti  $G(x, -z) = e^z G(-x, z) = G(1-x, z)$  dobimo tudi enakost

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Z zamenjavo  $x \rightarrow -x$  pridemo do enakosti

$$(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}.$$

V posebnem primeru dobimo za nenegativni celi števili  $x = k$  in  $n$  iz že izpeljane zveze

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$$

enakost

$$B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = (n+1)k^n.$$

Če vse te enakosti seštejemo po  $k$  od 0 do  $m$ , dobimo sumacijsko formulo

$$\sum_{k=0}^m k^n = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}],$$

kjer vzamemo  $0^0 = 1$ .

V primerih  $n = 1$  in  $n = 2$  lahko preverimo znani formuli

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2}m(m+1), \quad \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

Brez težav izpeljemo formulo, ki vsebuje integral:

$$\int_a^x B_n(\xi) d\xi = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)].$$

Pri tem upoštevamo enakost  $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ . Z metodo integracije per partes izračunamo tudi integrale oblike

$$\int_0^1 B_n(x)B_m(x) dx.$$

Za  $m = n = 0$  dobimo 1, za  $m \geq 1, n \geq 1$  imamo

$$\int_0^1 B_n(x)B_m(x) dx = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} B_{m+n}$$

in 0 sicer. V posebnem primeru imamo

$$\int_0^1 B_n^2(x) dx = \frac{2n!^2}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n).$$

Bernoullijevi polinomi imajo tudi formulo, ki jo je odkril W. Raabe, za množenje argumenta z naravnim številom  $m$ :

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right).$$

Dobimo jo iz enakosti

$$\frac{e^{mz} - 1}{e^z - 1} = 1 + e^z + e^{2z} + \dots + e^{(m-1)z},$$

iz katere najprej izpeljemo

$$\frac{mze^{mzx}}{e^z - 1} = \frac{mze^{mzx}}{e^{mz} - 1} + \frac{mze^{mzx}e^z}{e^{mz} - 1} + \frac{mze^{mzx}e^{2z}}{e^{mz} - 1} + \dots + \frac{mze^{mzx}e^{(m-1)z}}{e^{mz} - 1}$$

in

$$mG(mx, z) = G(x, mz) + G\left(x + \frac{1}{m}, mz\right) + \dots + G\left(x + \frac{m-1}{m}, mz\right),$$

nato pa posamezne člene razvijemo v potenčne vrste in primerjamo koeficiente. Če prepisemo formulo za množenje argumenta v obliki

$$\frac{B_n(mx)}{m^n} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right),$$

takoj spoznamo v njej Riemmannovo integralsko vsoto funkcije  $B_n(x+t)$  argumenta  $t$  za delitev intervala  $[0, 1]$  na  $m$  enakih delov. Ker je

$$\frac{B_n(mx)}{m^n} = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{B_k x^{n-k}}{m^k}$$

za  $n > 0$ , imamo po limitnem prehodu  $m \rightarrow \infty$  rezultat

$$x^n = \int_0^1 B_n(x+t) dt,$$

ki pa očitno drži tudi za  $n = 0$ .

To formulo lahko izpeljemo tudi z adicijskim izrekom za Bernoullijeve polinome. D. H. Lehmer pa je dokazal, da je pravilno zaporedje moničnih polinomov, ki ustrezajo Raabejevi enakosti, ravno zaporedje Bernoullijevih polinomov.

#### 4. EULER–MACLAURINOVA SUMACIJSKA FORMULA

Funkcije  $\psi_n(x)$  in števila  $B_n$ , vpeljana na začetku, bomo uporabili v Euler–Maclaurinovi formuli, ki na zanimiv in včasih uporaben način povezuje vsoto in integral.

Privzemimo, da je funkcija  $f(x)$  integrabilna in zadostikrat zvezno odvedljiva na intervalu  $[p, q]$ , kjer sta  $p$  in  $q$  celi nenegativni števili in  $p < q$ . Najprej imamo za celo število  $k \in [p, q]$ :

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x)\psi_0(x) dx = \int_k^{k+1} f(x)\psi_1'(x) dx.$$

Z integracijo per partes dobimo:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = f(k+1)\psi_1(k+1-0) - f(k)\psi_1(k+0) - \int_k^{k+1} f'(x)\psi_1(x) dx.$$

Ker je  $\psi_1(k+1-0) = B_1 = \frac{1}{2}$  in  $\psi_1(k+0) = -B_1 = -\frac{1}{2}$ , imamo:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \frac{1}{2}f(k) + \frac{1}{2}f(k+1) - \int_k^{k+1} f'(x)\psi_1(x) dx.$$

Formula povezuje točno vrednost integrala in njegov približek, dobljen po trapezni formuli. S seštevanjem dobimo splošnejšo formulo:

$$\frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q) = \int_p^q f(x) dx + \int_p^q f'(x)\psi_1(x) dx.$$

Z večkratno integracijo per partes pa dobimo Euler–Maclaurinovo formulo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q) &= \int_p^q f(x) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)] + R_n, \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} R_n &= -\frac{1}{(2n)!} \int_p^q f^{(2n)}(x) \psi_{2n}(x) dx = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_p^q f^{(2n)}(x) \psi'_{2n+1}(x) dx = \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \int_p^q f^{(2n+1)}(x) \psi_{2n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

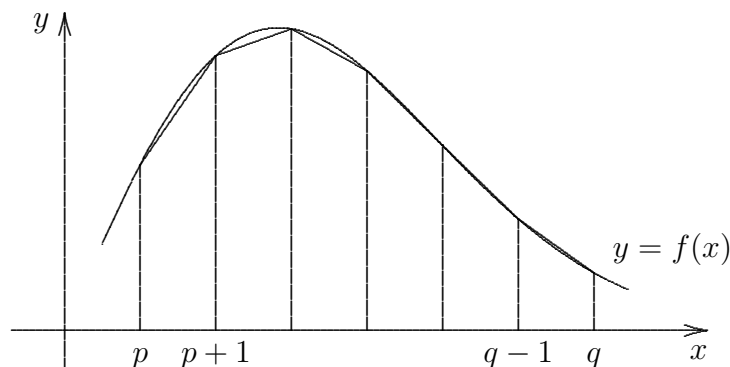
Izkaže se, da je  $R_n$  oblike

$$R_n = \pm \vartheta_n \frac{B_{2n}}{(2n)!} [f^{(2n+1)}(q) - f^{(2n+1)}(p)],$$

kjer je število  $\vartheta_n$  med 0 in 1, če imata odvoda  $f^{(2n-1)}(x)$  in  $f^{(2n+1)}(x)$  na intervalu  $[p, q]$  isti predznak. Obstajajo pa tudi druge oblike za  $R_n$  pri drugačnih pogojih, ki jih mora izpolnjevati funkcija  $f(x)$ .

Z uporabo Euler–Maclaurinove formule lahko na primer najdemo zvezo z Euler–Mascheronijevo konstanto in izpeljemo Stirlingovo formulo.

Euler–Maclaurinova formula za pozitivno funkcijo  $f$  izraža razliko med ploščino lika pod grafom funkcije  $f$  na intervalu  $[p, q]$  in skupno ploščino trapezov, ki so temu liku prirejeni, kot je prikazano na sliki.



Ploščine trapezov so po vrsti:

$$\frac{1}{2}(f(p) + f(p+1)), \frac{1}{2}(f(p+1) + f(p+2)), \dots, \frac{1}{2}(f(q-1) + f(q)).$$

Njihova skupna ploščina pa je približek za integral funkcije  $f$  na intervalu  $[p, q]$ :

$$\frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q).$$

Ta izraz pa imamo v Euler–Maclaurinovi formuli.

1. Vzemimo najprej funkcijo  $f(x) = e^{zx}$ , kjer je  $0 \leq x \leq 1$  in  $z$  kompleksno število, kar ni v dani situaciji nobena ovira, le nazornega geometrijskega pomena nimamo. Vzemimo v Euler–Maclaurinovi formuli  $p = 0$  in  $q = 1$ . Ker je  $f^{(k)}(x) = z^k e^{zx}$ , imamo razvoj

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^z = \int_0^1 e^{zx} dx + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} (e^z - 1) + R_n.$$

Pri tem velja ocena

$$|R_n| = \left| \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 z^{2n} e^{zx} \psi_{2n}(x) dx \right| \leq |z|^{2n} e^{|z|} \frac{4}{(2\pi)^{2n}} = 4e^{|z|} \left( \frac{|z|}{2\pi} \right)^{2n}.$$

Pri tem smo upoštevali neenakost

$$|\psi_{2n}(x)| \leq 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \leq 4 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Za  $|z| < 2\pi$  seveda gre  $R_n$  proti 0, ko  $n$  raste prek vseh meja. Zato po poenostavitvi dobimo najprej

$$\frac{1}{2}(e^z + 1) = \frac{1}{z}(e^z - 1) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \right]$$

in nazadnje že znan razvoj:

$$\frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za} \quad |z| < 2\pi.$$

2. Oglejmo si funkcijo  $f(x) = 1/x$  za  $x \geq 1$  in izberimo  $p = 1$  ter  $q = n$  v predhodnici Euler–Maclaurinove formule. Najprej dobimo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} = \int_1^n \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{1}{x^2} \psi_1(x) dx.$$

Z dodatkom členov  $\frac{1}{2}$  in  $\frac{1}{2n}$  na obeh straneh gornje enakosti dobimo na levi strani  $n$ -to delno vsoto harmonične vrste:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \ln n - \int_1^n \frac{1}{x^2} \psi_1(x) dx.$$

Ni se težko prepričati, da je zaporedje integralov

$$\int_1^n \frac{1}{x^2} \psi_1(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cauchyjevo in zato konvergentno. Zato obstaja

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \psi_1(x) dx.$$

Število  $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\dots$  je znamenita Euler–Mascheronijeva konstanta. Med drugim smo izračunali tudi integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \psi_1(x) dx = \frac{1}{2} - \gamma.$$

3. Podobno dobimo za funkcijo  $f(x) = \ln x$  pri  $x \geq 1$  in pri izbiri  $p = 1$  in  $q = n$ :

$$\frac{1}{2} \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n = \int_1^n \ln x dx + \int_1^n (\ln x)' \psi_1(x) dx.$$

Iz tega takoj sledi

$$\ln n! = \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \frac{1}{x} \psi_1(x) dx.$$

Ker je  $2\psi_1(x) = \psi_2'(x)$ , dobimo z integracijo per partes in z upoštevanjem zveze  $\psi_2(n) = \psi_2(0) = B_2 = 1/6$  enakost

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + R_n,$$

kjer je

$$R_n = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \psi_2(x) dx.$$

Podobno kot pri prejšnjem primeru ugotovimo, da obstaja končna limita

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

zaporedja s splošnim členom

$$R_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$$

in zato tudi končna limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{R_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n} e^{-n}} = e^\alpha = \beta.$$

Konstanto  $\beta$  izračunamo z *Wallisovo formulo*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

in dobimo  $\beta = \sqrt{2\pi}$ . To pomeni, da velja Stirlingova formula

$$n! = c_n n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi},$$

kjer je  $c_n$  neko zaporedje, ki ima limito 1. Za nameček imamo še en integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \psi_2(x) dx = \ln(2\pi) - \frac{11}{6}.$$

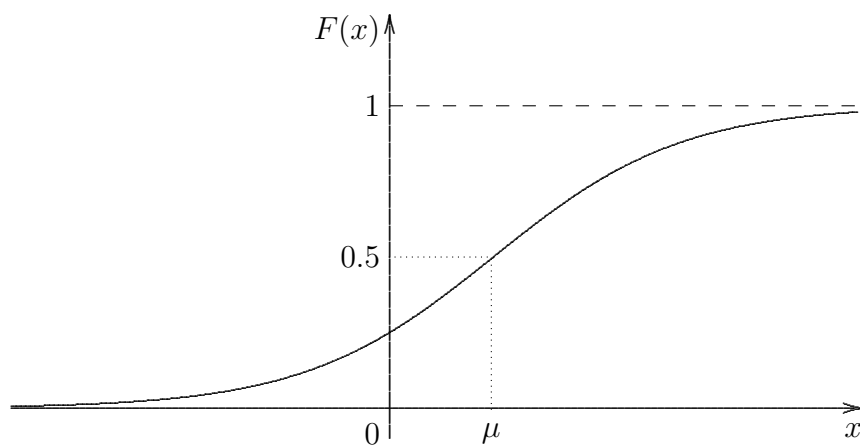
V numerični analizi lahko Euler–Maclaurinovo formulo uporabimo pri izpeljavi formul za približno integracijo.

## 5. BERNOULLIJEVA ŠTEVILA V VERJETNOSTNEM RAČUNU

Pravimo, da je slučajna spremenljivka  $\mathbf{X}$  porazdeljena po *logističnem* zakonu  $L(\alpha, \mu)$ , če je njena porazdelitvena funkcija  $F(x)$  oblike

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(x - \mu)/\alpha)}.$$

Pri tem je  $\alpha$  poljubno pozitivno število, ki mu pravimo *merilo*,  $\mu$  pa poljubno realno število, ki mu pravimo *lokacija* porazdelitve.



V posebnem primeru  $\mu = 0$  in  $\alpha = 1$  govorimo o standardiziranem logističnem zakonu. Slučajna spremenljivka, porazdeljena po zakonu  $L(0, 1)$ , ima verjetnostno funkcijo oblike

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} = \frac{1}{2}(1 + \text{th}(x/2))$$

in gostoto

$$p(x) = F'(x) = \frac{\exp(-x)}{(1 + \exp(-x))^2} = \frac{1}{4 \text{ch}^2(x/2)}.$$

Za karakteristično funkcijo

$$\varphi(t) = E[\exp(it\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(itx) dx$$

standardizirane logistične porazdelitve dobimo

$$\varphi(t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx) dx}{\operatorname{ch}^2(x/2)} = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}.$$

Zadnji integral smo izračunali z ostanki. Začetni momenti  $\mu'_n$  slučajne spremenljivke  $\mathbf{X}$ , porazdeljene po zakonu  $L(0, 1)$ , dobimo po formuli

$$\mu'_n = E[\mathbf{X}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx = i^{-n} \varphi^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zato razvoj funkcije  $\varphi(t)$  v potenčno vrsto da vse momente  $\mu'_n$ . Ker je funkcija  $\varphi$  soda, imamo:  $\mu'_{2n+1} = 0$  za  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Z znanim razvojem

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - 2^{2n}) \pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}, \end{aligned}$$

dobimo:

$$\mu'_{2n} = (-1)^n (2 - 2^{2n}) \pi^{2n} B_{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Nekaj začetnih momentov porazdelitve  $L(0, 1)$

$$\mu'_0 = 1, \quad \mu'_1 = 0, \quad \mu'_2 = \frac{1}{3} \pi^2, \quad \mu'_3 = 0, \quad \mu'_4 = \frac{7}{15} \pi^4.$$

Tako imamo

$$E[\mathbf{X}] = \mu'_1 = 0 \quad \text{in} \quad D[\mathbf{X}] = \mu'_2 - \mu_1'^2 = \frac{1}{3} \pi^2.$$

Za splošno logistično porazdelitev  $L(\mu, \alpha)$  je:

$$\varphi(t) = \exp(i\mu t) \frac{\alpha \pi t}{\operatorname{sh}(\alpha \pi t)}.$$

Označimo njene začetne momente z  $\mu_n$ . Iz izraza

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu^{n-k} \alpha^k \mu'_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

najdemo:

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu^2 + \frac{1}{3}\alpha^2\pi^2.$$

Torej:

$$E[\mathbf{X}] = \mu_1 = \mu \quad \text{in} \quad D[\mathbf{X}] = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{1}{3}\alpha^2\pi^2.$$

Torej je lokacija  $\mu$  matematično upanje slučajne spremenljivke, ki je porazdeljena po zakonu  $L(\mu, \alpha)$ , merilo  $\alpha$  pa lahko izrazimo s formulo

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma[\mathbf{X}],$$

kjer je  $\sigma[\mathbf{X}] = \sqrt{D[\mathbf{X}]}$  standardna deviacija te spremenljivke.

## 6. BERNOULLIJEVA ŠTEVILA V TEORIJI ŠTEVIL

Vsa Bernoullijeva števila so racionalna. Z namenom, da bi rešil Fermatov zadnji izrek, je E. E. Kummer vpeljal pojem *regularno praštevilo*.

Praštevilo  $p$  je regularno, če ne deli števec števil  $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$ . Praštevilo je iregularno, če ni regularno. Od 2 do 100 imamo samo tri iregularna praštevila: 37, 59 in 67. To je vedel že Kummer leta 1847. Vemo tudi, da je vseh praštevil nešteto, ne vemo pa, če je nešteto tudi regularnih praštevil. K. L. Jensen je leta 1915 dokazal, da je iregularnih praštevil nešteto. Kummer je dokazal, da je Fermatov zadnji izrek velja za vsa liha regularna praštevila in za vsa iregularna praštevila, ki jih je poznal. Ugotovili so, da je okrog 60% praštevil regularnih.

Vsako Bernoullijevo število  $B_{2n}$  za  $n > 0$  lahko zapišemo tudi v obliki

$$B_{2n} = C_n - \sum \frac{1}{k+1},$$

kjer je  $C_n$  celo število, seštevamo pa po tistih naravnih številih  $k$ , ki delijo indeks  $2n$  in za katere je  $k+1$  praštevilo. Tako imamo na primer:

$$B_2 = \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= -\frac{1}{30} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right), \\
B_6 &= \frac{1}{42} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right), \\
B_8 &= -\frac{1}{30} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right), \\
B_{10} &= \frac{5}{66} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11}\right), \\
B_{12} &= -\frac{691}{2730} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right), \\
B_{14} &= \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \\
B_{16} &= -\frac{3617}{510} = -6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right).
\end{aligned}$$

## 7. NEKAJ NALOG

1. Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

kjer je  $s > 0$ .

### Rešitev

Zapišimo podintegralsko funkcijo v obliki:

$$\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} = \frac{e^{-x} x^{s-1}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-(k+1)x}.$$

Z integracijo dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(k+1)^s} = \Gamma(s)\zeta(s).$$

2. Izračunajte še integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{\operatorname{sh} x},$$

kjer je  $s > 0$ .

## Rešitev

Zapišimo podintegralsko funkcijo v obliki:

$$\frac{x^{s-1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{2e^{-x}x^{s-1}}{1 - e^{-2x}} = 2e^{-x}x^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kx} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-(2k+1)x}.$$

Z integracijo dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{\operatorname{sh} x} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-(2k+1)x} dx = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{(2k+1)^s} = \\ &= 2\Gamma(s) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^s} \right) = 2\Gamma(s)\zeta(s) \left( 1 - \frac{1}{2^s} \right). \end{aligned}$$

## Eulerjeva števila

Kompleksna funkcija  $f(z) = 1/\operatorname{ch} z$  ima pole v točkah  $z_k = (2k + 1)\pi i/2$ , kjer je  $k$  poljubno celo število. Ker je  $f(z)$  soda funkcija, ima v okolici  $z = 0$  razvoj v potenčno vrsto oblike:

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Konvergenčni krog potenčne vrste namreč sega od središča razvoja do najbližje singularnosti funkcije  $f(z)$ . Koeficienti  $E_{2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , so *Eulerjeva števila*. Lahko sicer definiramo  $E_k$  za vse cele nenegativne indekse  $k$ , toda potem je očitno  $E_k = 0$  za lihe  $k$ .

Z zamenjavo  $z \rightarrow iz$  takoj najdemo tudi razvoj:

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{za } |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Ker je  $f(0) = 1$ , imamo  $E_0 = 1$ . Podobno kot Bernoullijeva števila  $B_n$  premorejo tudi Eulerjeva rekurzivno formulo.

Najprej lahko izrazimo  $E_{2k} = f^{(2k)}(0)$  in z  $2n$ -kratnim odvajanjem enakosti  $f(z) \operatorname{ch} z = 1$  še:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \operatorname{ch}^{(2n-k)}(z) f^{(k)}(z) = 0 \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

Ker ima funkcija  $\operatorname{ch} z$  odvod lihega reda enak  $\operatorname{sh} z$ , ki pa je 0 za  $z = 0$ , za odvod sodega reda pa  $\operatorname{ch} z$ , ki je za  $z = 0$  enak 1, imamo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \operatorname{ch}^{(2n-2k)}(0) f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

To pa pomeni:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0 \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

Tako lahko Eulerjeva števila izračunamo postopoma. Iz

$$\binom{2}{0}E_0 + \binom{2}{2}E_2 = 0$$

dobimo  $E_2 = -1$ . Iz

$$\binom{4}{0}E_0 + \binom{4}{2}E_2 + \binom{4}{4}E_4 = 0$$

pa  $E_4 = 5$ . Na tak način izračunamo še  $E_6 = -61$ ,  $E_8 = 1385$ . Simbolično lahko napišemo rekurzijo za  $n \geq 2$  tudi takole:

$$(E + 1)^n + (E - 1)^n = 0, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Izračunali smo že integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)}.$$

Sedaj pa lahko izrazimo z Eulerjevimi števili:

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi a/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{\pi^{2k+1} a^{2k}}{2^{2k}} \quad \text{za } |a| < 1.$$

Po drugi strani pa lahko tudi zapišemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} a^{2k} x^{2k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} a^{2k} \int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x}.$$

S primerjavo koeficientov pri potenci  $a^{2k}$  dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|.$$

Če pa vpeljemo novo integracijsko spremenljivko  $x = \ln u$  v integral na levi strani, dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2k} dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \int_1^{\infty} \frac{\ln^{2k} u du}{1 + u^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|.$$

Ker je očitno

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln^{2k} u \, du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{\ln^{2k} u \, du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\ln^{2k} u \, du}{1+u^2},$$

imamo nazadnje rezultat:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^{2k} x \, dx}{1+x^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} |E_{2k}|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Našli smo pa tudi

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k} (2\pi)^{2n-2k} \int_0^{\infty} \frac{\ln^{2k} x \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} (3^{2n+1} - 1).$$

Če sedaj integrale v vsoti izrazimo z Eulerjevimi števili, imamo zanje naslednjo rekurzijo:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} \frac{E_{2k}}{4^{2k}} = \frac{3^{2n+1} - 1}{2^{4n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Ker so Eulerjeva števila lihega indeksa enaka 0, lahko zapišemo tudi:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{E_k}{4^k} = \frac{3^{2n+1} - 1}{2^{4n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

in po odpravi ulomkov simbolično:

$$(E+4)^{2n+1} = 2(3^{2n+1} - 1), \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Izpeljava zgornje formule je videti kot streljanje s topom na vrabca. Ali se nemara ne bi dalo priti do nje drugače? Ali ne bi morda rezultat posplošili tako, da bi izrazili  $(E+x)^n$  v neki primerni obliki? Pri tem je  $x$  poljubno število. Poskusimo takole:

$$\mathcal{G}(x, z) = e^{xz} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j}{j!} z^j = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

S tem smo preoblikovali funkcijo  $\mathcal{G}(x, z)$  v obliko

$$\mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < \frac{\pi}{2},$$

kjer so

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k x^{n-k}$$

polinomi, katerih lastnosti moramo raziskati. Njihova rodovna funkcija je ravno  $\mathcal{G}(x, z) = e^{xz} / \operatorname{ch} z$ . Očitno je  $F_0(x) = 1$  in  $F_n(0) = E_n$  za vsak indeks  $n$ . Stopnja polinoma  $F_n(x)$  je ravno njegov indeks  $n$ . S tem smo našli

$$(E + x)^n = F_n(x), \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Radi pa bi imeli postopek, kako polinome  $F_n(x)$  najti brez Eulerjevih števil. Povečajmo v rodovni funkciji  $x$  za 1:

$$\mathcal{G}(x + 1, z) = e^{(x+1)z} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x + 1)}{n!} z^n.$$

Po drugi strani pa velja tudi razvoj:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x + 1, z) &= e^{(x+1)z} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} z} = e^z \mathcal{G}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(x)}{j!} z^j = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{F_k(x)}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(x) \right) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Torej velja enakost

$$F_n(x + 1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k(x).$$

Naj bo  $c_j = 1$  za vse sode indekse  $j$  in 0 sicer. Iz enakosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n z^n}{n!} = e^{xz} = \operatorname{ch} z \cdot \mathcal{G}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(x)}{k!} z^k$$

dobimo po istem postopku

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k F_{n-k}(x),$$

drugače zapisano:

$$x^n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} F_{n-2k}(x).$$

Z odvajanjem dobimo nove relacije. Najprej je

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, z) = z \mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F'_n(x)}{n!} z^n.$$

Nato

$$\mathcal{G}(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(x)}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F'_{n+1}(x)}{n!(n+1)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!} z^n.$$

Torej imamo za odvod relacijo:

$$\frac{F'_{n+1}(x)}{n+1} = F_n(x), \quad n \geq 0,$$

oziroma

$$F'_n(x) = nF_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Ker je  $F_0(x) = 1$ , je  $F'_1(x) = 1$  in zato  $F_1(x) = x + E_1 = x$ . Iz  $F'_2(x) = 2F_1(x) = 2x$  dobimo  $F_2(x) = x^2 + E_2 = x^2 - 1$ . Podobno dobimo iz  $F'_3(x) = 3F_2(x) = 3x^2 - 3$  še  $F_3(x) = x^3 - 3x$ . Zapišimo še  $F_4(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ . Zaporedje polinomov  $F_n$  se prične torej takole:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 1 \\ F_1(x) &= x \\ F_2(x) &= x^2 - 1 \\ F_3(x) &= x^3 - 3x \\ F_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 5 \end{aligned}$$

Oglejmo si še

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \frac{e^{(x-1)z} + e^{(x+1)z}}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{xz}(e^{-z} + e^z)}{\operatorname{ch} z} = 2e^{xz}.$$

Po eni strani je

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(x-1) + F_n(x+1)}{n!} z^n,$$

po drugi strani pa

$$\mathcal{G}(x-1, z) + \mathcal{G}(x+1, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n.$$

Torej velja naslednja enakost:

$$F_n(x-1) + F_n(x+1) = 2x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kaj se zgodi, če zamenjamo v polinomu  $F_n(x)$  spremenljivki  $x$  predznak?

Velja enakost

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{e^{-xz}}{\operatorname{ch} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(-x)}{n!} z^n,$$

pa tudi enakost

$$\mathcal{G}(-x, z) = \frac{e^{x(-z)}}{\operatorname{ch}(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{F_n(x)}{n!} z^n.$$

Imamo novo relacijo:

$$F_n(-x) = (-1)^n F_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Polinomi  $F_n(x)$  so torej sode funkcije, ko je indeks  $n$  sodo število, in lihe funkcije, ko je  $n$  liho število.

Ker je  $(E+x)^n = F_n(x)$ , velja:

$$(E+2)^n = F_n(2) = 2 - F_n(0) = 2 - E_n.$$

To pa pomeni:

$$(E + 2)^{2n+1} = 2 - E_{2n+1} = 2.$$

Našli smo:

$$(E + 2)^{2n+1} = 2, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Sedaj lahko postopek nadaljujemo:

$$(E + 4)^n = F_n(4) = 2 \cdot 3^n - F_n(2) = 2 \cdot 3^n - (2 - F_n(0)) = 2(3^n - 1) + E_n.$$

Zato je

$$(E + 4)^{2n+1} = 2(3^{2n+1} - 1), \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Po istem postopku dobimo korak za korakom:

$$(E + 6)^{2n+1} = 2(5^{2n+1} - 3^{2n+1} + 1), \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1,$$

$$(E + 8)^{2n+1} = 2(7^{2n+1} - 5^{2n+1} + 3^{2n+1} - 1), \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Da bi na tak način izrazili tudi  $(E + 1)^n = F_n(1)$ ,  $(E + 3)^n = F_n(3)$ , ..., si oglejmo

$$\mathcal{G}(1, z) = \frac{e^z}{\operatorname{ch} z} = \frac{2e^z}{e^z + e^{-z}} = \frac{(e^z + e^{-z}) + (e^z - e^{-z})}{e^z + e^{-z}} = 1 + \operatorname{th} z.$$

Iz razvojev

$$\frac{e^z}{\operatorname{ch} z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(1)}{n!} z^n$$

in

$$1 + \operatorname{th} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

sklepamo, da je

$$F_0(1) = 1, \quad F_{2n}(1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

in

$$F_{2n-1}(1) = \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

pri čemer so  $B_m$  Bernoullijeva števila. Zato lahko izrazimo:

$$(E + 1)^{2n-1} = \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1,$$

$$(E + 3)^{2n-1} = 2^{2n} - \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1,$$

$$(E + 5)^{2n-1} = 2^{4n-1} - 2^{2n} + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{2n}, \quad E^k \equiv E_k, \quad E_0 = 1.$$

Pogosto smo postavljeni pred nalogo, kako iz sistema enačb

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

pri znanem zaporedju  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  izraziti zaporedje  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ . Najlaže je to narediti tako, da vpeljemo formalni potenčni vrsti

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

in izračunamo:

$$e^z a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = b(z).$$

Zato je

$$a(z) = e^{-z} b(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Sedaj lahko kar preberemo:

$$a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

# Funkcija Lobačevskega

## 1. VPOLJAVA S FOURIEROVO VRSTO

Oglejmo si kompleksno število

$$z(\varphi) = 1 - e^{i\varphi} = 1 - \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Zapišimo ga v obliki:

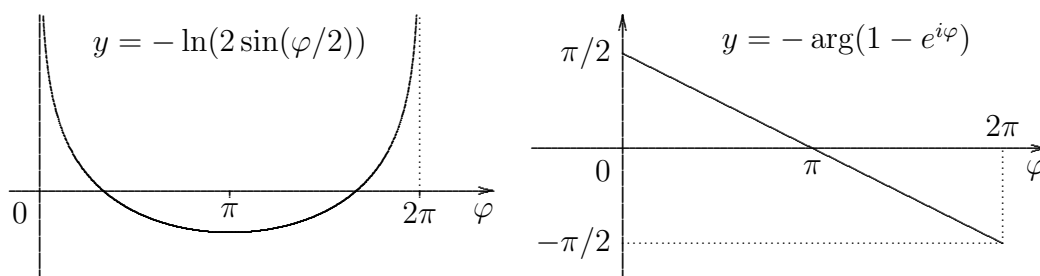
$$z(\varphi) = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left( \cos \frac{\varphi - \pi}{2} + i \sin \frac{\varphi - \pi}{2} \right).$$

Torej je

$$|z(\varphi)| = 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \arg z(\varphi) = \frac{\varphi - \pi}{2}$$

in s tem:

$$\ln z(\varphi) = \ln(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi) = \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) + i \frac{\varphi - \pi}{2}.$$



Iz znanega razvoja

$$\ln(1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1,$$

dobimo po Abelovem izreku:

$$\ln(1 - e^{i\varphi}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{n} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{n} = \ln \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) + i \frac{\varphi - \pi}{2}.$$

Torej veljata razvoja v Fourierovo vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right), \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\varphi)}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Na podoben način ali pa še krajše, z zamenjavo  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ , dobimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\varphi)}{n} = \ln\left(2 \cos \frac{\varphi}{2}\right), \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\varphi)}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Očitno veljata splošnejša razvoja:

$$-\ln\left|2 \sin \frac{\varphi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{n}, \quad \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\ln\left|2 \cos \frac{\varphi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\varphi)}{n}, \quad \varphi \neq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

## 2. LASTNOSTI

Naredimo zamenjavo  $\varphi \rightarrow 2\varphi$  in dobimo razvoj:

$$-\ln|2 \sin \varphi| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\varphi)}{n}, \quad \varphi \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Funkcija na levi strani enačaja ima osnovno periodo  $T = \pi$ . Hitro se da videti, da ima funkcija na desni strani integral

$$-\int_0^{\vartheta} \ln|2 \sin \varphi| \, d\varphi,$$

ki definira neelementarno funkcijo Lobačevskega. Tako jo je imenoval J. Milnor in Lobačevskemu v čast označil z rusko črko Л. Torej:

$$\mathbb{L}(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \ln|2 \sin \varphi| \, d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\vartheta)}{n^2}.$$

Nova funkcija je definirana na vsej realni osi, je liha in ima osnovno periodo  $T = \pi$ :

$$\mathcal{Jl}(-\vartheta) = -\mathcal{Jl}(\vartheta), \quad \mathcal{Jl}(\vartheta + \pi) = \mathcal{Jl}(\vartheta).$$

Ničle ima pri vseh celih mnogokratnikih števila  $\pi/2$ :

$$\mathcal{Jl}(0) = \mathcal{Jl}(\pm\pi/2) = \mathcal{Jl}(\pm\pi) = \mathcal{Jl}(\pm3\pi/2) = \dots = 0.$$

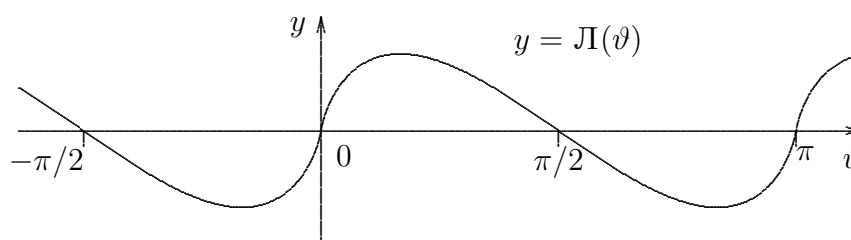
Lokalne ekstreme dobimo iz pogoja stacionarnosti  $\mathcal{Jl}'(\vartheta) = -\ln|2 \sin \vartheta| = 0$ .  
V točkah

$$\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

ima lokalne maksimume, v točkah

$$\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$$

pa lokalne minimume. Pri tem je  $n$  poljubno celo število.



Pri  $\vartheta = \pi/4$  dobimo:

$$\mathcal{Jl}(\pi/4) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx.$$

Z uvedbo tako imenovane Catalanove konstante

$$\mathbf{G} = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x} dx = 0.915965 \dots$$

lahko zapišemo:

$$\mathcal{Jl}(\pi/4) = \frac{1}{2} \mathbf{G}.$$

Funkcija  $\mathcal{J}(\vartheta)$  zadošča funkcionalni enačbi:

$$\mathcal{J}((\pi - \vartheta)/2) = \mathcal{J}(\vartheta/2) - \frac{1}{2}\mathcal{J}(\vartheta).$$

Veljata namreč enakosti:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}((\pi - \vartheta)/2) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(\pi - \vartheta))}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^2}, \\ \mathcal{J}(\vartheta/2) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^2},\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}((\pi - \vartheta)/2) - \mathcal{J}(\vartheta/2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} - 1] \frac{\sin(n\vartheta)}{n^2} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\vartheta)}{n^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{J}(\vartheta).$$

Z zamenjavo  $\vartheta \rightarrow -2\vartheta$  dobimo iz funkcionalne enačbe:

$$\mathcal{J}(\pi/2 + \vartheta) = \mathcal{J}(-\vartheta) - \frac{1}{2}\mathcal{J}(-2\vartheta).$$

Ker je funkcija  $\mathcal{J}(\vartheta)$  liha, imamo takoj

$$\mathcal{J}(\pi/2 + \vartheta) = -\mathcal{J}(\vartheta) + \frac{1}{2}\mathcal{J}(2\vartheta)$$

oziroma

$$\mathcal{J}(2\vartheta) = 2(\mathcal{J}(\vartheta) + \mathcal{J}(\vartheta + \pi/2)).$$

Predvidevamo, da bo za vsako naravno število  $m$  veljala še splošnejša formula:

$$\mathcal{J}(m\vartheta) = m[\mathcal{J}(\vartheta) + \mathcal{J}(\vartheta + \pi/m) + \mathcal{J}(\vartheta + 2\pi/m) + \dots + \mathcal{J}(\vartheta + (m-1)\pi/m)].$$

Bodita  $m$  in  $n$  naravni števili. Izračunajmo

$$\sin(2n\vartheta) + \sin(2n\vartheta + 2n\pi/m) + \sin(2n\vartheta + 4n\pi/m) + \dots + \sin(2n\vartheta + 2(m-1)n\pi/m).$$

Če število  $m$  deli število  $n$ , potem so očitno vsi členi med seboj enaki  $\sin(2n\vartheta)$  in vsota je enaka  $m \sin(2n\vartheta)$ . V nasprotnem primeru pa zgornjo vsoto zapišemo kot imaginarni del kompleksne vsote

$$\begin{aligned}
& e^{2ni\vartheta} + e^{2ni\vartheta+2ni\pi/m} + e^{2ni\vartheta+4ni\pi/m} + \dots + e^{2ni\vartheta+2(m-1)ni\pi/m} = \\
& = e^{2ni\vartheta} \left( 1 + e^{2ni\pi/m} + e^{4ni\pi/m} + \dots + e^{2(m-1)ni\pi/m} \right) = \\
& = e^{2ni\vartheta} \frac{1 - e^{(2ni\pi/m) \cdot m}}{1 - e^{2ni\pi/m}} = e^{2ni\vartheta} \frac{1 - e^{2ni\pi}}{1 - e^{2ni\pi/m}} = 0.
\end{aligned}$$

Torej lahko izrazimo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \mathfrak{Jl}(\vartheta + k\pi/m) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\vartheta + 2nk\pi/m)}{n^2} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{m-1} \sin(2n\vartheta + 2nk\pi/m) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(rm)^2} \cdot m \sin(2rm\vartheta) = \frac{1}{2m} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(2mr\vartheta)}{r^2} = \frac{1}{m} \mathfrak{Jl}(m\vartheta).
\end{aligned}$$

Upoštevali smo tiste člene, pri katerih je  $n$  deljiv z  $m$ . Preostali so enaki nič.

Tako smo izpeljali enakost:

$$\mathfrak{Jl}(m\vartheta) = m \sum_{k=0}^{m-1} \mathfrak{Jl}(\vartheta + k\pi/m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Iz relacije  $\mathfrak{Jl}(\pi) = 0$  dobimo najprej

$$-\int_0^{\pi} \ln(2 \sin \varphi) d\varphi = 0,$$

nato pa iz relacije

$$-\pi \ln 2 - \int_0^{\pi} \ln(\sin \varphi) d\varphi = 0$$

še znana integrala

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi = -\frac{\pi}{2} \ln 2, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos \varphi) d\varphi = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Njuno enakost preverimo s substitucijo  $\vartheta \rightarrow \pi/2 - \vartheta$ . Elementarni račun poteka takole:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(2 \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)) d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin(\varphi/2)) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\cos(\varphi/2)) d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin u) du + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos u) du = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi.
\end{aligned}$$

Iz enakosti

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi$$

nato sledi znani rezultat.

Poiščimo še Fourierov razvoj funkcije  $(1/2) \ln |\operatorname{ctg}(\varphi/2)|$ . Zapišimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right| &= \frac{1}{2} \left( \ln \left| 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right| - \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\varphi)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\varphi)}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\varphi)}{2n-1}.
\end{aligned}$$

Tako imamo Fourierov razvoj:

$$\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\varphi)}{2n-1}, \quad \varphi \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Izračunajmo

$$\int_0^\vartheta \mathbb{I}(\theta) d\theta.$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_0^\vartheta \mathbb{I}(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{n^2} d\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\vartheta \sin(2n\theta) d\theta = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - \cos(2n\vartheta)) = \frac{1}{4} \zeta(3) - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\vartheta)}{n^3}.
\end{aligned}$$

Funkcija  $\mathbb{I}(\vartheta)$  je za  $0 < \vartheta < \pi$  dvakrat odvedljiva:

$$\mathbb{I}'(\vartheta) = -\ln(2 \sin \vartheta), \quad \mathbb{I}''(\vartheta) = -\operatorname{ctg} \vartheta.$$

Iz znanega razvoja

$$\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n} \quad \text{za } |\vartheta| < \pi$$

lahko sedaj poiščemo razvoj funkcije  $\mathcal{I}(\vartheta)$  v vrsto, ki bo vsota logaritemskega člena in potenčne vrste. Najprej prepisimo:

$$\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n}.$$

S tem imamo

$$\mathcal{I}''(\vartheta) = -\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{1}{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n-1}, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

S prvo integracijo dobimo:

$$\mathcal{I}'(\vartheta) = -\ln(2 \sin \vartheta) = -\ln \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n)!} \vartheta^{2n} + C, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Pri tem je  $C$  integracijska konstanta. Torej velja tudi razvoj

$$\ln \frac{\vartheta}{2 \sin \vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n)!} \vartheta^{2n} + C, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

V limiti  $\vartheta \rightarrow 0$  dobimo:

$$\ln \frac{1}{2} = C.$$

Tako smo našli:  $C = -\ln 2$ . Zato velja razvoj:

$$\mathcal{I}'(\vartheta) = -\ln 2 - \ln \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n)!} \vartheta^{2n}, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Z drugo integracijo dobimo:

$$\mathcal{I}(\vartheta) = -\vartheta \ln 2 - \vartheta \ln \vartheta + \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n+1)(2n)!} \vartheta^{2n+1} + D, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Pri tem je  $D$  druga integracijska konstanta. V limiti  $\vartheta \rightarrow 0$  dobimo  $D = 0$  in tako imamo končno:

$$\mathcal{I}(\vartheta) = -\vartheta \ln(2\vartheta) + \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)(2n+1)(2n)!} \vartheta^{2n+1}, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

Sedaj bomo razvili v potenčno vrsto še funkcijo

$$f(\vartheta) = \mathbb{I}(\pi/2 - \vartheta).$$

Očitno imamo sedaj za  $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ :

$$f'(\vartheta) = -\mathbb{I}'(\pi/2 - \vartheta) = \ln(2 \cos \vartheta), \quad f''(\vartheta) = -\operatorname{tg} \vartheta.$$

Iz znanega razvoja

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n-1} \quad \text{za } |\vartheta| < \frac{\pi}{2}$$

imamo sedaj:

$$f''(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n-1} \quad \text{za } |\vartheta| < \frac{\pi}{2}$$

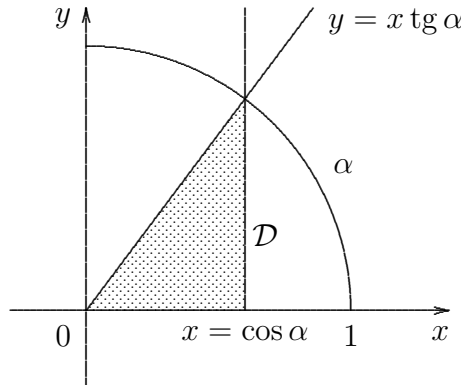
Za funkcijo  $f(\vartheta)$  veljata začetna pogoja  $f(0) = 0$  in  $f'(0) = \ln 2$ , zato z dvema zaporednima integracijama dobimo:

$$\mathbb{I}(\pi/2 - \vartheta) = \theta \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)(2n+1)(2n)!} \vartheta^{2n+1} \quad \text{za } |\vartheta| < \frac{\pi}{2}.$$

### 3. PRIMER UPORABE

Izračunajmo maso  $m$  nehomogenega neomejenega telesa nad ploskro  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , ki je omejeno z ravninami  $y = 0$ ,  $x = \cos \alpha$  in  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ , pri čemer se masna gostota telesa spreminja po zakonu  $\rho = 1/z^3$ . Pri tem je  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Projekcija našega telesa na ravnino  $xy$  je trikotnik  $\mathcal{D}$ .



$$m = \int_{\mathcal{D}} dS \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{dS}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1-x^2-y^2}.$$

Zapišimo posebej notranji integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1-x^2-y^2} &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{(\sqrt{1-x^2}-y) + (\sqrt{1-x^2}+y)}{(\sqrt{1-x^2}+y)(\sqrt{1-x^2}-y)} dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+y} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}-y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} \Big|_{y=0}^{y=x \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2}-x \operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Torej se masa našega telesa izraža v obliki:

$$m = \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2}-x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Sedaj vpeljemo v dobljeni integral novo integracijsko spremenljivko z relacijo

$x = \cos u$ :

$$4m = \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln \frac{\sin u + \cos u \operatorname{tg} \alpha}{\sin u - \cos u \operatorname{tg} \alpha} du = \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln \frac{\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha}{\sin u \cos \alpha - \cos u \sin \alpha} du.$$

Uporabimo adicijska izreka, pa dobimo:

$$\begin{aligned}
 4m &= \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln \frac{\sin(u + \alpha)}{\sin(u - \alpha)} du = \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln(2 \sin(u + \alpha)) du - \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln(2 \sin(u - \alpha)) du = \\
 &= \int_{2\alpha}^{\pi/2 + \alpha} \ln(2 \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/2 - \alpha} \ln(2 \sin \psi) d\psi = \\
 &= \int_0^{\pi/2 + \alpha} \ln(2 \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{2\alpha} \ln(2 \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{\pi/2 - \alpha} \ln(2 \sin \psi) d\psi = \\
 &= -\mathcal{J}(\pi/2 + \alpha) + \mathcal{J}(2\alpha) + \mathcal{J}(\pi/2 - \alpha) = -\mathcal{J}(\pi/2 + \alpha) + \mathcal{J}(2\alpha) - \mathcal{J}(\alpha - \pi/2 + \pi) = \\
 &= -2\mathcal{J}(\pi/2 + \alpha) + \mathcal{J}(2\alpha) = 2\mathcal{J}(\alpha).
 \end{aligned}$$

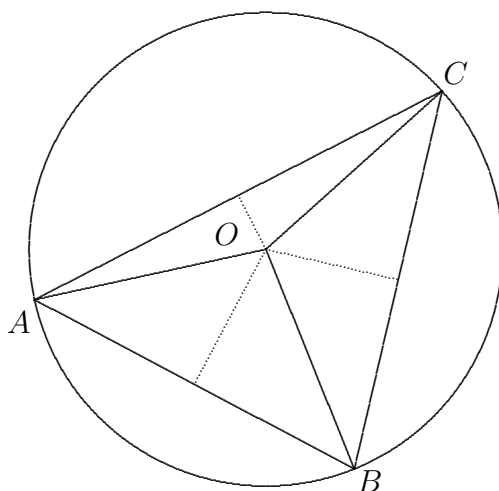
Upoštevali smo identiteto  $\mathcal{J}(2\vartheta) = 2(\mathcal{J}(\vartheta) + \mathcal{J}(\vartheta + \pi/2))$ . Torej imamo rezultat:

$$m = \frac{1}{2} \mathcal{J}(\alpha).$$

Nalogo lahko posplošimo tako, da za integracijsko območje  $\Delta$  vzamemo katerikoli trikotnik  $\triangle ABC$ , ki je včrtan krožnici  $x^2 + y^2 = 1$  v ravnini  $xy$ . Masa telesa je odvisna od kotov

$$\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA, \gamma = \angle ACB.$$

Na skici so vsi koti ostri, kar pa ni nujno, kot se da hitro videti.



Masa telesa je očitno vsota mas teles nad trikotniki  $\triangle ABO$ ,  $\triangle BCO$ ,  $\triangle CAO$ .  
Masa nad prvim trikotnikom je  $\mathcal{I}(\gamma)$ , nad drugim  $\mathcal{I}(\alpha)$  in nad tretjim  $\mathcal{I}(\beta)$ .  
Celotna masa je torej

$$m = \mathcal{I}(\alpha) + \mathcal{I}(\beta) + \mathcal{I}(\gamma).$$

Kdaj je masa  $m = m(\alpha, \beta, \gamma)$  največja? Kote povezuje znana relacija  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Ustrezna Lagrangeva funkcija je:

$$L(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{I}(\alpha) + \mathcal{I}(\beta) + \mathcal{I}(\gamma) - \lambda(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Potrebni pogoji za ekstrem so:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{I}'(\alpha) - \lambda = -\ln(2 \sin \alpha) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{I}'(\beta) - \lambda = -\ln(2 \sin \beta) - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{I}'(\gamma) - \lambda = -\ln(2 \sin \gamma) - \lambda = 0.$$

Takoj vidimo, da morajo biti vsi trije koti med seboj enaki:  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ .

Največja masa je približno  $m = 1.0149416$ .

Dokažimo, da velja:

$$3\mathcal{J}(\pi/3) = 2\mathcal{J}(\pi/6).$$

Najprej imamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(2\pi/3) &= 2\mathcal{J}(\pi/3) + 2\mathcal{J}(\pi/3 + \pi/2) = 2\mathcal{J}(\pi/3) + 2\mathcal{J}(5\pi/6) = \\ &= 2\mathcal{J}(\pi/3) + 2\mathcal{J}(5\pi/6 - \pi) = 2\mathcal{J}(\pi/3) - 2\mathcal{J}(\pi/6).\end{aligned}$$

Velja pa tudi:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(3\pi/3) &= 3\mathcal{J}(\pi/3) + 3\mathcal{J}(\pi/3 + \pi/3) + 3\mathcal{J}(\pi/3 + 2\pi/3) = \\ &= 3\mathcal{J}(\pi/3) + 3\mathcal{J}(2\pi/3) + 3\mathcal{J}(\pi) = 3\mathcal{J}(\pi/3) + 3(2\mathcal{J}(\pi/3) - 2\mathcal{J}(\pi/6)) = \\ &= 9\mathcal{J}(\pi/3) - 6\mathcal{J}(\pi/6) = 0.\end{aligned}$$

It tega sledi po krajšanju s 3 zveza  $3\mathcal{J}(\pi/3) = 2\mathcal{J}(\pi/6)$ .

#### 4. NEKAJ INTEGRALOV S FUNKCIJO GAMA

1. Izračunajte *Raabejev integral*

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

#### Rešitev

Z logaritmiranjem enakosti  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ ,  $0 < x < 1$ , dobimo najprej

$$\ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(1-x) = \ln \pi - \ln(\sin(\pi x)),$$

nato pa z integriranjem

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx = \ln \pi - \int_0^1 \ln(\sin(\pi x)) dx.$$

V drugi integral naredimo substitucijo  $u = 1 - x$ , v tretjega pa  $v = \pi x$ :

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(u) du = \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin v) dv.$$

Zadnji integral je znan in zato imamo

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \pi + \ln 2 = \ln(2\pi).$$

Tako imamo končno:

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}.$$

2. Naj bo  $a > 0$ . Izračunajte

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx.$$

**Rešitev**

Naj bo

$$F(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx.$$

Z odvajanje po parametru  $a$  dobimo:

$$F'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a.$$

Torej je

$$F(a) = \int \ln a da = a \ln a - a + c,$$

kjer je  $c$  integracijska konstanta. Ker je

$$\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = \lim_{a \rightarrow 0} (a \ln a - a) + c = c = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi},$$

je  $c = \ln \sqrt{2\pi}$ . Tako imamo rezultat:

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}.$$

3. Izračunajte integral

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) dx.$$

### Rešitev

Z logaritmiranjem enakosti  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ ,  $0 < x < 1$ , in z množenjem s  $\sin(\pi x)$  dobimo najprej

$$\ln \Gamma(x) \sin(\pi x) + \ln \Gamma(1-x) \sin(\pi x) = \ln \pi \sin(\pi x) - \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x),$$

nato pa z integriranjem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \sin(\pi x) dx &= \\ &= \ln \pi \int_0^1 \sin(\pi x) dx - \int_0^1 \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x) dx. \end{aligned}$$

V drugi integral naredimo substitucijo  $u = 1-x$ , v tretjega in četrtega pa  $v = \pi x$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) dx + \int_0^1 \ln \Gamma(u) \sin(\pi u) du &= \\ &= \frac{\ln \pi}{\pi} \int_0^\pi \sin v dv - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin v) \sin v dv. \end{aligned}$$

Tako imamo

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) dx = \frac{2 \ln \pi}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin v) \sin v dv.$$

Zadnji integral bomo izrazili z uporabo znanega razvoja

$$-\ln(2 \sin v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nv)}{n}, \quad 0 < v < \pi,$$

iz katerega dobimo:

$$-\ln(\sin v) \sin v = \ln 2 \cdot \sin v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nv) \sin v}{n}, \quad 0 < v < \pi,$$

Integrirajmo:

$$\begin{aligned}
 - \int_0^\pi \ln(\sin v) \sin v \, dv &= \ln 2 \int_0^\pi \sin v \, dv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(2nv) \sin v \, dv = \\
 &= 2 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \int_0^\pi (\sin((2n+1)v) - \sin((2n-1)v)) \, dv = \\
 &= 2 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n(2n-1)} \cos((2n-1)v) - \frac{1}{2n(2n+1)} \cos((2n+1)v) \right) \Big|_0^\pi = \\
 &= 2 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n(2n+1)} - \frac{1}{n(2n-1)} \right) = \\
 &= 2 \ln 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).
 \end{aligned}$$

Obe dobljeni vrsti se dasta sešteti:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = 1 - \ln 2, \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.
 \end{aligned}$$

Torej je

$$- \int_0^\pi \ln(\sin v) \sin v \, dv = 2 \ln 2 + 2(1 - \ln 2) - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2$$

in s tem

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) \, dx = \frac{2 \ln \pi}{\pi} + \frac{2 - 2 \ln 2}{\pi},$$

to se pravi

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) \, dx = \frac{\ln \pi}{\pi} + \frac{1 - \ln 2}{\pi}.$$

Nazadnje izrazimo rezultat takole:

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left( 1 + \ln \frac{\pi}{2} \right).$$

4. Izračunajte integral

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx,$$

kjer je  $n$  poljubno naravno število.

### Rešitev

Podobno kot v prejšnji nalogi imamo

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx = \ln \pi \int_0^1 \cos(2n\pi x) dx - \int_0^1 \ln(\sin(\pi x)) \cos(2n\pi x) dx.$$

Prvi integral na desni je 0, v drugega pa vpeljemo novo integracijsko spremenljivko  $v = \pi x$  in dobimo:

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin v) \cos(2nv) dv.$$

Spet uporabimo znani razvoj

$$-\ln(\sin v) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kv)}{k}, \quad 0 < v < \pi,$$

in dobimo:

$$-\int_0^\pi \ln(\sin v) \cos(2nv) dv = \ln 2 \int_0^\pi \cos(2nv) dv + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(2kv) \cos(2nv) dv.$$

Prvi integral na desni je spet 0, integral v vrsti pa je 0, če je  $k \neq n$  in za  $k = n$ :

$$\int_0^\pi \cos^2(2nv) dv = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(4nv)) dv = \frac{\pi}{2}.$$

Torej je

$$-\int_0^\pi \ln(\sin v) \cos(2nv) dv = \frac{\pi}{2n},$$

kar nam da najprej

$$2 \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx = \frac{1}{2n}$$

in na koncu:

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos(2n\pi x) dx = \frac{1}{4n}.$$

## Iracionalnost nekaterih števil

Znan je preprost dokaz, da je število  $\sqrt{2}$  iracionalno, kar pomeni, da se ga ne da zapisati v obliki kvocienta dveh naravnih, tujih si števil. Teže pa je dokazati iracionalnost števil  $e$  in  $\pi$ , ki pogosto nastopata v matematiki in tudi v teh nalogah.

1. Iracionalnost števila  $e$  lahko dokažemo z osnovno vrsto

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$$

Za vsak  $n > 1$  lahko ocenimo vsoto

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

takole:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \\ &= \frac{n+1}{(n+1)!n} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Vzemimo, da je vsemu navkljub število  $e$  racionalno, recimo  $e = a/b$ , kjer sta si  $a$  in  $b$  tuji naravni števili. Imenovalc  $b$  ne more biti 1, ker bi bilo v takem primeru število  $e$  naravno, vemo pa, da je  $2 < e < 3$ . Torej je  $b \geq 2$ . Ravno s številom  $b$  pa sedaj zapišimo:

$$e = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{b!} + r_b.$$

Torej bi veljala relacija:

$$\alpha_b = b! \left( \frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{b!} \right) = b!r_b.$$

Število

$$\alpha_b = (b-1)!a - b! - \frac{b!}{1!} - \frac{b!}{2!} - \dots - 1 = b!r_b$$

bi bilo potemtakem očitno naravno število. Hkrati pa bi veljala relacija

$$b!r_b < b! \cdot \frac{1}{b!b} = \frac{1}{b} < 1.$$

Torej bi imeli relacijo

$$0 < \alpha_b < 1,$$

kateri pa naravno število  $\alpha_b$  ne more ustrezati, saj med 0 in 1 ni nobenega naravnega števila. To pomeni, da je bila predpostavka o racionalnosti števila  $e$  napačna. Število  $e$  je torej iracionalno.

2. Dokaz iracionalnosti števila  $\pi$  pa je dosti bolj zapleten. Če bi bilo število  $\pi$  racionalno, denimo  $\pi = a/b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  tuji si naravni števili, potem bi bilo tudi število  $\pi^2 = a^2/b^2$  racionalno. Toda dokazati se da, da je število  $\pi^2$  iracionalno, tako da je zato tudi  $\pi$  iracionalno število. Pri tem nam pomaga naslednja, že v nalogah dokazana enakost, v kateri je  $n$  poljubno nenegativno celo število:

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi-x)^{2n} \sin x \, dx = \int_0^\infty y^{2n}[(y+\pi i)^{2n} + (y-\pi i)^{2n}]e^{-y} \, dy.$$

Realni izraz  $(y+\pi i)^{2n} + (y-\pi i)^{2n}$  lahko pretvorimo z binomsko formulo takole:

$$(y+\pi i)^{2n} + (y-\pi i)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1+(-1)^k) i^k \pi^k y^{2n-k}.$$

Na desni strani ostanejo samo členi s sodim sumacijskim indeksom, zato lahko zapišemo:

$$(y+\pi i)^{2n} + (y-\pi i)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} \pi^{2k} y^{2n-2k}.$$

Denimo, da bi bilo število  $\pi^2$  vsemu navkljub racionalno število, recimo  $\pi^2 = a/b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  nenegativni tuji si celi števili. Očitno je  $b > 1$ , ker  $\pi^2$  ni celo število. Zato bi imeli enakost

$$\frac{b^n}{(2n)!} [(y + \pi i)^{2n} + (y - \pi i)^{2n}] = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{2k} a^k b^{n-k} y^{2n-2k}.$$

Zato bi lahko zapisali:

$$\begin{aligned} \frac{b^n}{(2n)!} \int_0^\pi x^{2n} (\pi - x)^{2n} \sin x \, dx &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{2k} a^k b^{n-k} \int_0^\infty y^{4n-2k} e^{-y} \, dy = \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(4n - 2k)!}{(2n)!} \binom{2n}{2k} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

Ker je kvocient  $(4n - 2k)! / (2n)! = (2n + (2n - 2k))! / (2n)!$  za  $0 \leq k \leq n$  celo število, binomski koeficient  $\binom{2n}{2k}$  pa tudi, bi bil integral

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!} \int_0^\pi x^{2n} (\pi - x)^{2n} \sin x \, dx$$

pozitivno celo število za vsak  $n$ .

Ker pa je

$$\sqrt{x(\pi - x)} \leq \frac{x + (\pi - x)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

za  $0 \leq x \leq \pi$  in zato

$$x^{2n} (\pi - x)^{2n} \leq \frac{\pi^{4n}}{2^{4n}},$$

velja:

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!} \int_0^\pi x^{2n} (\pi - x)^{2n} \sin x \, dx < \frac{b^n \pi^{4n+1}}{2^{4n} (2n)!} = \frac{\pi \alpha^{2n}}{(2n)!}, \quad \alpha = \frac{\pi^2 \sqrt{b}}{4}.$$

Ker očitno konvergira vrsta

$$\text{ch } \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!},$$

je zadoščeno potrebnemu pogoju za njeno konvergenco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 0.$$

Potemtakem za vse dovolj velike  $n$  velja:

$$0 < I_n < 1,$$

kar pa je v protislovju z ugotovitvijo, da je  $I_n$  celo število za vsak  $n$ . To pa pomeni, da  $\pi^2$  in  $\pi$  ne moreta biti racionalni števili.

Števili  $\pi^2$  in  $\pi$  sta torej iracionalni števili.

## Literatura

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1972.
2. J. Bak, D. J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York 1996.
3. J. B. Dence, T. O. Dence: *Elements of the Theory of Numbers*, Academic Press, San Diego in drugje, 1998.
4. K. Devlin, *Nova zlata doba matematike*, Sigma 53, DMFAS 1993.
5. M. Dobovišek, *Rešene naloge iz analize II*, DMFA, Ljubljana 2001.
6. P. Eymard, J.-P. Lafon, *Autour du nombre  $\pi$* , Hermann, Pariz 1999.
7. Г. М. Фихтенгольц: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Том II, Наука, Москва 1969.
8. V. Karunakaran, *Complex Analysis*, Alpha Science, Pangbourne 2002.
9. I. S. Gradshteyn. I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*, Fifth Edition, Academic Press, San Diego in drugje, 1994.
10. B. Hvala, *Zbirka izpitnih nalog iz analize*, DMFA, Ljubljana 1996.
11. T. Klinc, *Predavanja iz matematike, II. del*, FS, Ljubljana 1997.
12. B. Krušič, *Funkcije kompleksne spremenljivke. Specialne funkcije*, DMFA, Ljubljana 1985.
13. P. Курант: *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Том I, Наука, Москва 1967.
14. D. S. Mitrović, *Kompleksna analiza*, Građevinska knjiga, Beograd 1973.
15. D. H. Lehmer: *A New Approach to Bernoulli Polynomials*, Amer. Math. Monthly, **95** (1988), str. 905–911.
16. P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, III*.

- del*, FS, Ljubljana 1991.
17. B. P. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer–Verlag, New York et al. 1990.
  18. J. Plemelj, *Teorija analitičnih funkcij*, SAZU, Ljubljana 1953.
  19. N. Prijatelj, *Uvod v matematično analizo, 2. del*, DMFA, Ljubljana 1999.
  20. J. B. Reade, *Calculus with Complex Numbers*, Taylor & Francis, London et al. 2003.
  21. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современново анализа. Часть первая. Основные операции анализа*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1963.
  22. I. Vidav, *Eliptične krivulje in eliptične funkcije*, DMFA, Ljubljana 1991.
  23. I. Vidav, *Višja matematika 3*, DZS, Ljubljana 1976.
  24. D. G. Zill, P. D. Shanahan, *A First Course in Complex Analysis*, Jones and Bartlett Publ., Boston et al. 2003.
  25. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович, *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва 1975.