

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis, kopiranje in uporabo gradiva v tem dokumentu za potrebe učiteljev pri pouku, šolskih krožkih in drugih aktivnostih na šoli, povezanimi s tekmovanji v organizaciji DMFA Slovenije. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Referenčna koda datoteke je zapisana ob vsaki strani tega dokumenta.

1. $H = 1,5$ m, $m = 200$ g, $F\Delta t = 0,84$ Ns.

a) Prenosni telefon prosto pada, ohranitev energije da:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgH, \quad v_1 = \sqrt{2gH} = 5,422 \text{ m/s} \approx 5,4 \text{ m/s}.$$

1: pravilen izraz za energijo

1: pravilen izraz za hitrost

1: pravilna vrednost hitrosti

[3 t.]

b) Da se kabel ne iztakne, mora biti gibalna količina telefona manjša od $F\Delta t$:

$$mv \leq F\Delta t,$$

1: pravilna neenačba ali enačba za mejni primer

kar da mejno hitrost v :

$$v = \frac{F\Delta t}{m}.$$

1: izraz za hitrost

Hitrost v ima telefon, ko pade za y :

$$v = \sqrt{2gy}, \quad y = \frac{1}{2g} \left(\frac{F\Delta t}{m} \right)^2 = 0,90 \text{ m}.$$

1: izraz za padec y

Zanima nas višina telefona nad tlemi h :

$$h = H - y, \quad h = H - \frac{1}{2g} \left(\frac{F\Delta t}{m} \right)^2 = 0,60 \text{ m}.$$

1: izraz za višino h

1: vrednost višine h

[5 t.]

c) Ponovimo račun iz vprašanja a) za višino h :

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 3,429 \text{ m/s} \approx 3,4 \text{ m/s}.$$

1: pravilen izraz za hitrost

1: pravilna vrednost hitrosti

[2 t.]

2. $S_1 = 5,0 \text{ dm}^2$, $h_1 = 20 \text{ cm}$, $S_2 = 2,0 \text{ dm}^2$, $h_2 = 25 \text{ cm}$, $m_2 = 1,0 \text{ kg}$, $\Phi_V = 0,050 \text{ L/s}$, $V = 7 \text{ L}$, $\rho = 1 \text{ kg/L}$.

a) Večji lonec ima prostornino $V_1 = S_1 h_1 = 10 \text{ L}$, manjši lonec ima prostornino $V_2 = S_2 h_2 = 5 \text{ L}$. Ko manjši lonec stoji na dnu večjega, je prostornina v večjem, ki je še na voljo vodi,

$$\Delta V = (S_1 - S_2)h_1 = 3 \text{ dm}^2 \cdot 2 \text{ dm} = 6 \text{ L}.$$

1: izračun prostornin obeh loncev in prostornine, ki je na voljo vodi, ko manjši lonec stoji na dnu večjega

Da bo voda začela iztekati iz večjega lonca, se mora najprej napolniti manjši lonec (V_2) in nato še prostor za vodo v večjem (ΔV):

$$\Phi_V t_a = V_2 + \Delta V, \quad t_a = \frac{V_2 + \Delta V}{\Phi_V} = 220 \text{ s}.$$

1: izraz za čas, ki upošteva V_2 in ΔV , in izračunana vrednost časa [2 t.]

b) Ko je v večjem loncu $V = 7 \text{ L}$ vode, bo manjši lonec plaval. Ravnovesje teže in vzgona na prazen manjši lonec da za globino x_0 , do katere se potopi mali lonec pod gladino vode v večjem loncu:

$$x_0 S_2 \rho = V_0 \rho = m_2, \quad x_0 = \frac{m_2}{S_2 \rho} = 5 \text{ cm},$$

kjer $V_0 = m_2 / \rho = 1 \text{ L}$ označuje prostornino vode, ki jo izpodrine prazen manjši lonec, ko plava.

1: izračun x_0 , za koliko je dno manjšega lonca pod gladino, ko manjši lonec plava v vodi

Ko je manjši lonec v večjem, je gladina vode v večjem na višini y

$$y S_1 = V + V_0, \quad y = \frac{V + V_0}{S_1} = 16 \text{ cm}, \quad y > x_0.$$

1: ugotovitev, da prazen manjši lonec plava v večjem in izpodrine prostornino $V_0 = 1 \text{ L}$

Zdaj je potrebno ugotoviti, ali se med natakanjem vode v manjši lonec iz večjega prej začne prelivati vode, ki je že v njem, ali se dno manjšega prej dotakne dna in se mora manjši lonec najprej napolniti do vrha kot v primeru a). Da se gladina v večjem loncu dvigne do roba, mora biti vsota začetne prostornine vode V in prostornine, ki jo izpodrine manjši lonec V' enaka prostornini večjega lonca V_1 . Če manjši lonec plava, ko velja $V' = V_1 - V$, potem bo voda iz večjega lonca začela iztekati, prede se manjši napolni, v nasprotnem primeru se manjši dotakne dna večjega in se mora najprej napolniti manjši in nato še večji, šele nato se začne voda prelivati iz večjega.

Pri danem V moramo v manjši lonec natočiti še V'' vode

$$V' = V'' + V_0, \quad V'' = V_1 - V - V_0 = 2 \text{ L}.$$

Gladina vode v večjem loncu je na zgornjem robu, dno manjšega lonca je potopljeno za x_1 pod gladino

$$x_1 = \frac{V'}{S_2} = \frac{V'' + V_0}{S_2} = 15 \text{ cm} \quad x_1 < h_1.$$

Manjši lonec plava, voda se iz večjega začne prelivati že, ko v manjšega natočimo $V'' = 2 \text{ L}$ vode.

1: ugotovitev, da manjši lonec plava v večjem, ko vanj natočimo V'' vode in je vodna gladina v večjem loncu takrat na zgornjem robu

Zdaj lahko izračunamo čas t_b do takrat, ko se voda začne prelivati iz večjega lonca

$$V'' = \Phi_V t_b, \quad t_b = \frac{V''}{\Phi_V} = \frac{V_1 - V - V_0}{\Phi_V} = 40 \text{ s}.$$

1: izračunan čas t_b [4 t.]

c) Iz vprašanj a) in b) se naučimo, da imamo dva režima, ali kot pri a) najprej napolnimo manjši lonc in nato še večjega ali pa se med natakanjem vode v manjšega gladina vode, ki je v večjem loncu na začetku, že dvigne do roba. Meja med režimoma je pogojena z začetno prostornino vode V v večjem loncu: ali je dovolj velika, da manjši lonc do takrat, ko se voda začne prelivati iz večjega, ves čas plava (režim kot pri b)), ali pa manjši lonc najprej doseže dno, ter se potem napolni do vrha, prede se v večjem vodna gladina dvigne do roba (primer kot pri a)).

1: ugotovitev, da imamo dva režima in da je bistveno to, kaj se zgodi prej: ali se manjši lonc dotakne dna ali začne iztekati iz večjega lonca voda, ki je v njem na začetku

Meja med režimoma je dosežena pri taki začetni prostornini vode v večjem loncu V_m , da se plavajoči manjši lonc ravno dotakne dna večjega lonca, ko je gladina v večjem loncu na vrhu večjega lonca. Temu ustreza spust dna manjšega lonca pod gladino za x_m , ki je enak višini večjega lonca h_1

$$x_m = h_1, \quad V_m'' = h_1 S_2, \quad V_m = V_1 - V_m'' = h_1(S_1 - S_2) = \Delta V = 6 \text{ L}.$$

1: določitev mejne začetne prostornine vode v večjem loncu

Da lahko narišemo graf $t(V)$ imamo torej dva režima, za $V \leq \Delta V$ kot pri a)

$$t = \frac{V_2 + \Delta V - V}{\Phi_V}; \quad V \leq \Delta V$$

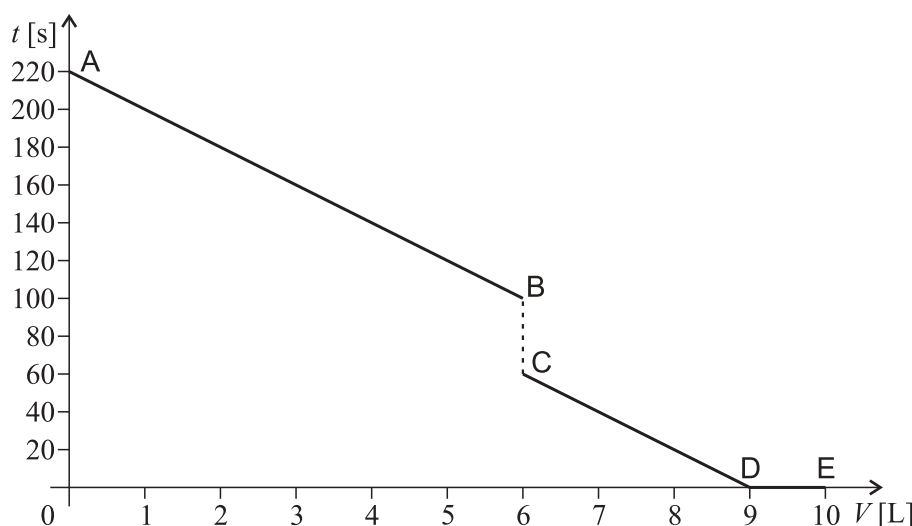
in za $V > \Delta V$ kot pri b)

$$t = \frac{V_1 - V_0 - V}{\Phi_V}; \quad V > \Delta V.$$

1: zapis izraza za $t(V)$ za oba režima ali nedvoumno pokazano, da imamo pri $V_m = \Delta V = 6 \text{ L}$ v grafu skok med dvema vzporednima linearnima funkcijama.

Značilne točke na grafu so:

$$A = (0 \text{ L}, 220 \text{ s}), \quad B = (6 \text{ L}, 100 \text{ s}), \quad C = (6 \text{ L}, 60 \text{ s}), \quad D = (9 \text{ L}, 0 \text{ s}), \quad E = (10 \text{ L}, 0 \text{ s}).$$



1: Narisan graf z opremljenima osema - oznaki V [L] in t [s] ter jasno označene vsaj prve 4 značilne točke: A, B, C in D.

[4 t.]

Opomba: Če je graf narisano kvantitativno pravilno (imajo vse značilne točke pravilne vrednosti), dobi tekmovalec vse 4 točke tudi, če kateri od vmesnih korakov pri c) delu ni izrecno napisan.

3. $v_1 = 10 \text{ m/s}$, $v_2 = 20 \text{ m/s}$, $h = 56 \text{ m}$, $d = 30 \text{ m}$.

a) Koordinatno izhodišče postavimo v točko, kjer je Vincenzo, koordinatna os x kaže stran od stolpa, os y kaže navzgor. Koordinati prvega (Galileo) in drugega (Vincenzo) kamna po izmetu so:

$$x_1 = v_1 t, \quad y_1 = h - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = v_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

1: koordinati lege prvega kamna v odvisnosti od časa

1: koordinati lege drugega kamna v odvisnosti od časa

Ista višina obeh kamnov ob času t_a pomeni

$$y_1(t_a) = y_2(t_a), \quad h - \frac{gt_a^2}{2} = v_2 t_a - \frac{gt_a^2}{2}, \quad t_a = \frac{h}{v_2} = 2,8 \text{ s}.$$

1: iz izenačitve višin izračunan čas t_a

[3 t.]

b) Po Pitagori izrazimo kvadrat razdalje med kamnoma $d^2(t)$ med letom

$$x(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad y(t) = y_2(t) - y_1(t), \quad d^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = v_1^2 t^2 + (h - v_2 t)^2.$$

1: zapis $d^2(t)$ ali $d(t)$

Za dano razdaljo d dobimo kvadratno enačbo za čas $t = t_b$

$$(v_1^2 + v_2^2)t_b^2 - 2hv_2 t_b + (h^2 - d^2) = 0$$

1: zapis kvadratne enačbe

z rešitvama

$$t_{b1,b2} = \frac{hv_2 \pm \sqrt{h^2 v_2^2 - (h^2 - d^2)(v_1^2 + v_2^2)}}{v_1^2 + v_2^2}$$

oziroma zapisano malo bolj brezdimenzijsko

$$t_{b1,b2} = t_a \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(1 - (d/h)^2\right) \left(1 + (v_1/v_2)^2\right)} \right].$$

Za časa t_b dobimo $t_{b1} = 1,501 \text{ s} \approx 1,5 \text{ s}$ in $t_{b2} = 2,979 \text{ s} \approx 2,98 \text{ s} \approx 3,0 \text{ s}$.

1: zapis in izračun obeh rešitev kvadratne enačbe

Preverimo, da sta obe rešitvi smiselni oziroma da sta pri obeh izračunanih časih t_b kamna še v zraku. Prvi kamen pada na tla ob času $t_1 = \sqrt{2h/g} = 3,38 \text{ s}$, drugi kamen je v zraku $t_2 = 2v_2/g = 4,08 \text{ s}$. Ker sta časa leta obeh kamnov večja od obeh izračunanih časov t_b , sta obe rešitvi pravilni.

1: kontrola smislenosti obeh izračunanih časov

[4 t.]

c) Iz očitne resnice, da je razdalja $d(t)$ med kamnoma na začetku $d(0) = h = 56$ m, in iz spoznanja iz dela b), da je $d^2(t)$ parabola, ki da ob časih t_{b1} in t_{b2} vrednosti $d(t_b) = 30$ m, sklepamo, da bo minimalna razdalja dosežena ob času, ki je aritmetična sredina časov t_{b1} in t_{b2} (teme parabole)

$$t_{\min} = \frac{1}{2} (t_{b1} + t_{b2}) = \frac{hv_2}{v_1^2 + v_2^2} = t_a \frac{v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} (= t_a \frac{4}{5} = 2,24 \text{ s}).$$

Prav tako je pravilno, če čas, ko je razdalja med kamnoma minimalna, določijo s pomočjo znanih koordinat temena parabole

$$y(t) = at^2 + bt + c, \quad t_{\text{teme}} = -\frac{b}{2a}, \quad t_{\min} = \frac{hv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

1: ugotovitev, da je čas minimalne razdalje med kamnoma aritmetična sredina časov iz b) ali uporaba enačbe za določitev temena parabole

1: izraz za čas $t_{\min}$

Čas vstavimo v izraz za $d^2(t)$ in od tu izračunamo najmanjšo razdaljo med kamnoma med letom

$$d^2(t_{\min}) = h^2 \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad d_{\min} = h \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = h \frac{1}{\sqrt{5}} = 25,04 \text{ m} \approx 25 \text{ m}.$$

1: pravilno izračunana vrednost najmanjše razdalje $d_{\min}$

[3 t.]

Če tekmovalec do rezultata $d_{\min} = h \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ pride kako drugače, pri c) prav tako dobi vse točke.

1. $S = 10 \text{ dm}^2$, $d_{AB} = 1,0 \text{ cm}$, $d_{BC} = 1,6 \text{ cm}$, $e = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ As}$, $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$.

a) Naboj $-e$ in e se nahajata na skrajnih dveh ploščah, zato je situacija enaka, kot bi imeli kondenzator iz plošč A in C na razdalji $d = d_{AB} + d_{BC}$.

1: ugotovitev, da se sistem obnaša kot kondenzator

Uporabimo lahko

$$e = CU, \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad U_{AC,1} = \frac{ed}{\varepsilon_0 S} = \frac{e(d_{AB} + d_{BC})}{\varepsilon_0 S} = 29,21 \text{ V} \approx 29,2 \text{ V} \approx 29 \text{ V}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi drugače, z uporabo električnega polja neskončne enakomerno nabite plošče (gostota naboja $\sigma = e/S$): $E = \sigma/2\varepsilon_0$ in relacije $U = -Ed$.

1: pravilen rezultat

[2 t.]

b) Konfiguracijo lahko enačimo kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, katerih sosednji plošči se stikata. Na levem imamo na ploščah po vrsti naboja $e(\text{A}) = -e$ in $e(\text{B}) = e$, na desnem pa $e(\text{B}) = e$ in $e(\text{C}) = -e$.

1: ugotovitev, da se sistem obnaša kot dva zaporedna kondenzatorja

Za vsakega posebej velja enako kot pri a)

$$U_{AB,2} = \frac{ed_{AB}}{\varepsilon_0 S}, \quad U_{BC,2} = \frac{-ed_{BC}}{\varepsilon_0 S},$$

kjer je $-e$ v drugem izrazu posledica menjave predznakov nabojev na levi in desni plošči glede na levi kondenzator. Iskana napetost je

$$U_{AC,2} = U_{AB,2} + U_{BC,2} = \frac{e}{\varepsilon_0 S}(d_{AB} - d_{BC}) = -6,74 \text{ V} \approx -6,7 \text{ V}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi drugače, z uporabo električnega polja neskončne enakomerno nabite plošče (gostota naboja $\sigma = e/S$): $E = \sigma/2\varepsilon_0$ in relacije $U = -Ed$.

1: pravilen rezultat

[2 t.]

c) Gre za isto konfiguracijo kot pri b), zanima nas napetost na levem kondenzatorju

$$U_{AB,2} = \frac{ed_{AB}}{\varepsilon_0 S} = 11,24 \text{ V} \approx 11,2 \text{ V} \approx 11 \text{ V}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi drugače, z uporabo električnega polja neskončne enakomerno nabite plošče (gostota naboja $\sigma = e/S$): $E = \sigma/2\varepsilon_0$ in relacije $U = -Ed$.

1: pravilen rezultat

[1 t.]

č) Konfiguracijo lahko ponovno enačimo z dvema zaporedno vezanima kondenzatorjema, katerih sosednji plošči se stikata. Na levem imamo na ploščah po vrsti naboja $e(A) = -e$ in $e(B) = e$, na desnem pa $e(B) = -2e$ in $e(C) = 2e$.

1: ugotovitev, da se sistem obnaša kot dva zaporedna kondenzatorja z ustreznima porazdelitvama nabojev

Za vsakega posebej velja podobno kot pri a)

$$U_{AB,3} = \frac{ed_{AB}}{\varepsilon_0 S}, \quad U_{BC,3} = \frac{2ed_{BC}}{\varepsilon_0 S},$$

kjer sta obe napetosti enakega predznaka, saj imata oba kondenzatorja na levi plošči negativni in na desni pozitivni naboj. Iskana napetost je

$$U_{AC,3} = U_{AB,3} + U_{BC,3} = \frac{e}{\varepsilon_0 S}(d_{AB} + 2d_{BC}) = 47,19 \text{ V} \approx 47,2 \text{ V} \approx 47 \text{ V}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi drugače, z uporabo električnega polja neskončne enakomerno nabite plošče (gostota naboja $\sigma = e/S$): $E = \sigma/2\varepsilon_0$ in relacije $U = -Ed$.

1: pravilen rezultat

[2 t.]

d) Ker vsota nabojev v tem primeru ni enaka nič, sistema ne moremo obravnavati kot sistem zaporednih kondenzatorjev, ampak moramo nujno uporabiti izraze za električno polje neskončne enakomerno nabite plošče.

1: ugotovitev, da moramo reševati nalogo s pomočjo električnih polj za neskončno enakomerno nabito ploščo

Plošča A tako med ploščama A in B kot tudi med ploščama B in C ustvarja enako električno polje

$$E_A = -\frac{e}{2\varepsilon_0 S}.$$

Podobno plošča C tako med ploščama A in B kot tudi med ploščama B in C ustvarja enako električno polje

$$E_C = -\frac{e}{2\varepsilon_0 S}.$$

Enak predznak je posledica naboja, ki je nasprotno predznačen kot naboj na plošči A, a nas zanima polje levo od plošče, medtem ko nas je za ploščo A zanimalo polje desno od plošče. Srednja plošča B nosi enak naboj kot plošča A, zato v prostoru med ploščama B in C (desno od plošče) ustvarja enako polje kot plošča A

$$E_{B,\text{desno}} = -\frac{e}{2\varepsilon_0 S},$$

medtem ko v prostoru med ploščama A in B (levo od plošče) ustvarja električno polje nasprotnega predznaka

$$E_{B,\text{levo}} = +\frac{e}{2\varepsilon_0 S}.$$

1: določitev električnih polj vseh treh plošč v obeh prostorih, tako med ploščama A in B, kot med B in C

K napetosti med ploščama A in C prispevajo vse tri plošče, njihove prispevke seštevamo, posamezni prispevek pa izračunamo po enačbi

$$U = -Ed.$$

Med ploščama A in B plošči A in C prispevata pozitivno napetost, plošča B pa negativno, medtem ko med ploščama B in C vse tri plošče prispevajo pozitivno napetost. Na koncu dobimo

$$\begin{aligned} U_{AC,4} &= \frac{e}{2\varepsilon_0 S}(d_{AB} - d_{AB} + d_{AB} + d_{BC} + d_{BC} + d_{BC}) \\ &= \frac{e}{2\varepsilon_0 S}(d_{AB} + 3d_{BC}) = 32,58 \text{ V} \approx 32,6 \text{ V} \approx 33 \text{ V}. \end{aligned}$$

1: pravilen rezultat

[3 t.]

2. $l = 0,50 \text{ m}$, $d = 5,0 \text{ mm}$, $r = 0,50 \text{ mm}$, $\zeta = 1,72 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$, $\rho = 8,94 \text{ kg/dm}^3$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) Upor posamezne žice je

$$R = \frac{l\zeta}{\pi r^2}.$$

Magnetna sila med vzporednimi vodniki, po katerih teče tok v isto smer, je privlačna. Velikost magnetne sile, ko sta žici razmaknjeni za x (x je razdalja med središči obeh žic), je

$$F_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi x}.$$

1: ugotovitev, da je sila med katerimakoli žicama v senčilu privlačna

Žice v senčilu so vezane vzporedno, tok po vsaki od njih je enak

$$I = \frac{U_a}{R},$$

kjer je U_a napetost vira.

1: ugotovitev, da so žice v senčilu vezane vzporedno

Očitno je, da se bo senčilo začelo dvigati tako, da se bo najprej začela dvigati spodnja žica, saj nanjo navzdol deluje le teža, medtem ko na žice nad njo delujejo navzdol poleg lastne teže še sile vrvic, na katerih visijo žice, ki so pod žico, ki jo trenutno opazujemo.

1: ugotovitev, da se začne najprej dvigati spodnja žica

Da se bo spodnja žica začela dvigati, mora biti vsota magnetnih sil zgornjih treh žic na spodnjo večja od teže spodnje.

1: ugotovitev, da težo spodnje žice v mejnem primeru uravnovesi vsota magnetnih sil vseh treh zgornjih žic

Tokovi po vseh žicah so enaki, prav tako njihove dolžine in upori, v izrazu za silo med spodnjo in eno od zgornjih treh žic se spreminja le razdalja med njimi in zavzema vrednosti $x = d$ za spodnjo žico in prvo žico nad njo, $x = 2d$ za silo med spodnjo in naslednjo žico ter na koncu $x = 3d$ za silo med spodnjo in najvišjo žico. Vsota vseh treh magnetnih sil je v mejnem primeru enaka teži

$$\sum_i F_{\text{mag},i} = mg, \quad \frac{\mu_0 l I^2}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} + \frac{1}{3d} \right) = l\pi r^2 \rho g$$

kar da hkrati z izrazom za tok

$$I = \frac{U_a}{R} = \frac{U_a \pi r^2}{\zeta l}$$

enačbo

$$\frac{\mu_0 l U_a^2 \pi^2 r^4}{2\pi d \zeta^2 l^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = g\pi r^2 l \rho,$$

kar nazadnje da

$$U_a = \frac{2l\zeta}{r} \sqrt{\frac{3g\rho d}{11\mu_0}} = 0,3354 \text{ V} \approx 335 \text{ mV} \approx 0,34 \text{ V}.$$

1: pravilno upoštevanje razdalj med žicami za vse tri žice

1: enačba za U_a , ki vsebuje vse začetne podatke

1: pravi rezultat, za pravilno štejemo ali 335 mV ali 340 mV = 0,34 V

[7 t.]

b) Zdaj je situacija na nek način obratna kot pri a). Ko napetost počasi zmanjšujemo, se bo senčilo najprej spustilo tako, da bo “popustil” stik med najvišjo žico in žico pod njo.

1: ugotovitev, da se bodo najprej spustile med seboj stisnjene spodnje tri žice glede na zgornjo

V mejnem primeru mora biti magnetna sila med zgornjo žico in preostalimi tremi pod njo enaka teži vseh treh žic pod njo.

1: ugotovitev, da mora v mejnem primeru vsota magnetnih sil zgornje žice na spodnje tri uravnovestiti težo vseh treh spodnjih žic

Do končnega izraza za mejno napetost U_b pridemo tako, da razmislimo, kako se spremeni izraz za napetost iz vprašanja a). Maso m ene žice moramo nadomestiti s trojno maso $3m$, razdaljo med središči sosednjih žic d pa s premerom žic $2r$. Končni izraz za napetost je

$$U_b = 6l\zeta\sqrt{\frac{2g\rho}{11\mu_0 r}} = 0,2598 \text{ V} \approx 260 \text{ mV} \approx 0,26 \text{ V}.$$

1: pravilen izraz oziroma rezultat

[3 t.]

3. $S = 300 \text{ cm}^2$, $V_1 = 20 \text{ mL}$, $V_2 = 20 \text{ L}$, $M = 18 \text{ kg/kmol}$, $M_z = 29 \text{ kg/kmol}$, $q_i = 2,3 \text{ MJ/kg}$, $\rho = 1,0 \text{ kg/L}$, $c_p = 2,0 \text{ kJ/kg K}$, $c_z = 1,0 \text{ kJ/kg K}$, $c = 4,2 \text{ kJ/kg K}$, $R = 8,3 \text{ kJ/kmol K}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $p_0 = 1,0 \text{ bar}$, $v_z = 1,0 \text{ mm/s}$.

a) Zaradi delovanja grelca se na začetku segrevata tekoča voda in zrak. Zaradi segrevanja se opazno spreminja samo prostornina zraka, saj je temperaturno raztezanje tekoče vode v primerjavi s plini zanemarljivo. V času dt prejme sistem toploto dQ in se segreje za dT . Prostornina zraka v cevi se zato spremeni za dV . Plinska enačba pri konstantnem tlaku nam da

$$\frac{V}{T} = \frac{V_2}{T_0}, \quad dV = \frac{V_2}{T_0} dT,$$

kjer velja še $dV = Sdz$ in je $dz = v_z dt$ ter v_z začetna hitrost dviganja zgornjega bata. Energijska bilanca da

$$dQ = Pdt = (m_v c + m_z c_z) dT \quad Pdt = (m_v c + m_z c_z) \frac{T_0}{V_0} Sdz,$$

kjer je $m_z = p_0 M_z V_2 / RT_0$ in $m_v = \rho V_1$. Iz tega izraza izračunamo moč grelca P

$$P = \left(\rho V_1 c + \frac{p_0 M_z V_2 c_z}{RT_0} \right) \frac{ST_0 v_z}{V_z} = 47,4 \text{ W}.$$

1: zveza med spremembo temperature zraka in spremembo prostornine zraka oziroma premika zgornjega bata

1: povezava toplotnega toka grelca in energijske bilance za vodo in zrak

1: izraz in vrednost za moč grelca

[3 t.]

b) Sistem se segreva po enačbi $Pdt = (m_v c + m_z c_z)dT$, dokler temperatura vode ne doseže vrelišča $T_1 = 100^\circ\text{C}$, kar nam da

$$t_1 = \left(\rho V_1 c + \frac{p_0 M_z V_2 c_z}{RT_0} \right) \frac{T_1 - T_0}{P} = \frac{(T_1 - T_0)V_z}{S v_z T_0} = 182,03 \text{ s} \approx 182 \text{ s} \approx 3,0 \text{ min}.$$

Od časa t_1 naprej se temperatura ne spreminja, pač pa izpareva voda toliko časa Δt_i , da vsa izpari. Ta proces traja

$$\Delta t_i = \frac{m_v q_i}{P} = 970,47 \text{ s} \approx 970 \text{ s} \approx 16,2 \text{ min} \approx 16 \text{ min}.$$

Ob času $t_2 = t_1 + \Delta t_i = 1152,5 \text{ s}$ imamo v cevi v spodnjem delu samo vodno paro pri $T_1 = 100^\circ\text{C}$, in v zgornjem delu zrak pri isti temperaturi. Od časa t_2 naprej se segrevata zrak in vodna para s hitrostjo dT/dt

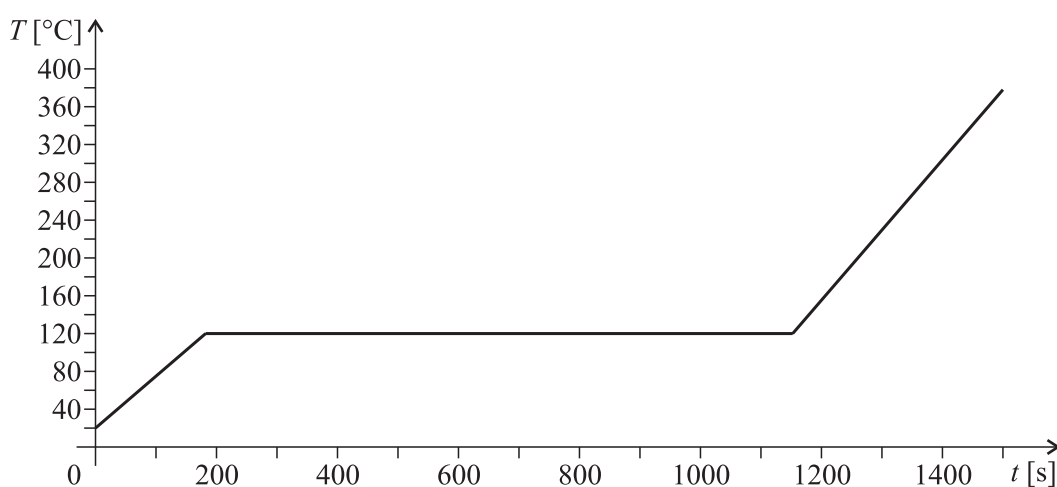
$$Pdt = (m_v c_p + m_z c_z)dT, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{P}{m_v c_p + m_z c_z} = 0,7423 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \approx 0,74 \frac{\text{K}}{\text{s}}.$$

Iz vseh izračunanih podatkov lahko narišemo graf $T(t)$ za prvih $t_k = 25 \text{ min}$ oziroma $t_k = 1500 \text{ s}$. Končna temperatura je takrat

$$T_k = T(t_k) = T_1 + \frac{dT}{dt} (t_k - t_2) = 357,98^\circ\text{C} \approx 358^\circ\text{C} \approx 360^\circ\text{C}.$$

1: izračun časov t_1 in t_2

1: izračun hitrosti segrevanja pare in zraka dT/dt ter končne temperature po času t_k



1: graf ustrezne oblike: linearno naraščanje; nato konstantna temperatura in na koncu hitrejše linearno naraščanje kot na začetku

1: kvantitativno pravilen graf s pravilnimi "koleni" pri času t_1 in t_2

[4 t.]

c) V časovnem intervalu od 0 do t_1 spodnji bat miruje, zgornji se dviga s konstantno hitrostjo $v_z = 1 \text{ mm/s}$. V času od t_1 do t_2 se zraku na spreminja prostornina in se oba bata dvigata z enako hitrostjo v_2 , ki jo določa izparevanje vode in plinska enačba za vodno paro

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P}{q_i} \quad p dV = p S dz_p = \frac{RT_1 dm}{M} \quad v_2 = \frac{dz_p}{dt} = \frac{PRT_1}{p_0 M S q_i} = 1,182 \text{ mm/s} \approx 1,2 \text{ mm/s}.$$

1: izračun hitrosti $v_{s,2} = v_{z,2} = v_2$

Za izračun hitrosti dviganja batov v zadnjem režimu $t > t_2$ uporabimo pri b) izračunano naraščanje temperature $dT/dt = 0,74 \text{ K/s}$ in dejstvo, da imamo v obeh delih cevi plina, torej v dobrem približku velja

$$dV = S dz = \frac{V}{T} dT = \frac{V}{T} \frac{dT}{dt} dt \quad \frac{dz}{dt} = \frac{V}{ST} \frac{dT}{dt} = \frac{mR}{pMS} \frac{dT}{dt}$$

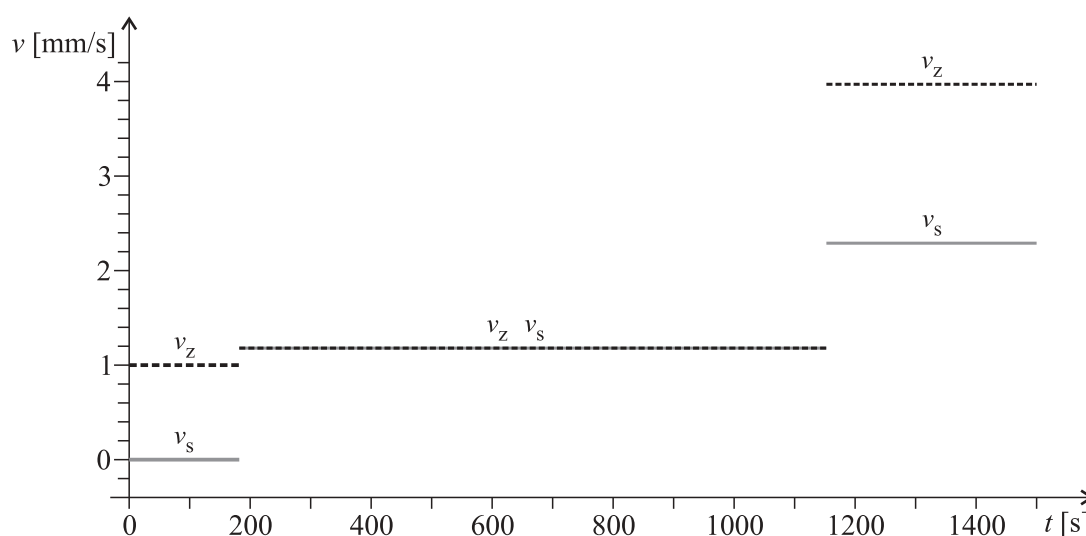
Za spodnji bat dobimo

$$v_{s,3} = \frac{\rho V_1 R}{p_0 M S} \frac{dT}{dt} = 2,282 \text{ mm/s} \approx 2,3 \text{ mm/s}.$$

Zgornji bat se dviga zaradi raztezanje zraka in zato, ker se dviga spodnji bat

$$v_{z,3} = v_s + \frac{V_2}{T_0 S} \frac{dT}{dt} = v_s + 1,689 \text{ mm/s} = 3,971 \text{ mm/s} \approx 4,0 \text{ mm/s}.$$

1: izračun obeh hitrosti $v_{s,3}$ in $v_{z,3}$



1: skiciran graf

[3 t.]

1. $M = 4,0$ kg, $m = 1,0$ kg, $R = 2,0$ dm, $r = 1,0$ dm, $F = 1,0$ N.

a) Vrta se samo zgornji disk okoli osi v točki B, gibalna enačba se glasi

$$Fr = J_a \alpha_a = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_a \quad a_a = r \alpha_a = \frac{2F}{m} = 2,0 \text{ m/s}^2,$$

kjer je $J_a = \frac{1}{2} m r^2$ vztrajnostni moment zgornjega diska okoli osi skozi težišče B.

1: ugotovitev, da je pospešek roke enak obodnemu pospešku vrtenja zgornjega diska

1: zapis gibalne enačbe z navorom

1: pravilen rezultat

[3 t.]

b) V tem primeru se oba diska vrtita skupaj kot togo telo, vrtljivo okoli osi skozi točko A. Za izračun vztrajnostnega momenta J_b sistema obeh togo spetih diskov uporabimo za zgornji disk Steinerjev izrek $\Delta J = m d^2$, kar da v našem primeru prispevek $\Delta J = m r^2 = 2 J_a$, ker je razdalja d med A in B enaka $d = R - r = r$. Upoštevamo še, da velja $M = 4m$ in $R = 2r$, tako da vztrajnostni moment spodnjega diska izrazimo kot $J_s = \frac{1}{2} 4M (2r)^2 = 8m r^2 = 16 J_a$. Vse skupaj nam da vztrajnostni moment

$$J_b = J_s + \Delta J + J_a = 16 J_a + 2 J_a + J_a = 19 J_a = \frac{19}{2} m r^2.$$

1: izračun vztrajnostnega momenta

Gibalna enačba se glasi

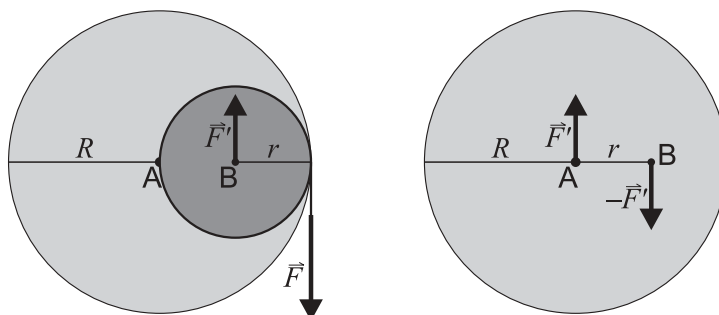
$$FR = J_b \alpha_b = \frac{19 m r^2 \alpha_b}{2} \quad a_b = 2r \alpha_b = \frac{8F}{19m} = 0,42 \text{ m/s}^2$$

1: zapis gibalne enačbe z navorom

1: pravilen rezultat

[3 t.]

c) Ker sta oba diska vrtljiva, moramo v tem delu zares zapisati gibalne enačbe za vrtenje in translacijo za vsak disk posebej. Na levi sliki so za ta primer narisane sile na zgornji disk, na desni pa sile na spodnji disk.



V osi B deluje na zgornji disk sila F' v nasprotni smeri od sile F . Po 3. Newtonovem zakonu zato na spodnji disk deluje v B nasprotna sila $-F'$. Ker se težišče spodnjega diska ne premika, mora v osi delovati sila, ki po 1. Newtonovem zakonu uravnovesi silo v B. Sila $-F'$ pospešeno vrta spodnji disk v smeri urinih kazalcev, kar opiše gibalna enačba, ki nam da pospešek a_B točke B v smeri sile F

$$J_s \alpha_M = r F' \quad a_B = r \alpha_M = \frac{F'}{8m} \quad \text{ozioroma} \quad F' = 8ma_B.$$

Po drugi strani je pospešek a_B pospešek težišča zgornjega diska, za katerega mora veljati 2. Newtonov zakon

$$ma_B = F - F'$$

Iz prve enačbe izrazimo F' in rezultat nesemo v drugo enačbo, da dobimo

$$ma_B = F - 8ma_B \quad a_B = \frac{F}{9m}.$$

Zgornji disk se tudi v tej postavitvi začne vrteti okoli osi B skozi težišče in zanj velja gibalna enačba kot pri a)

$$Fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha_a \quad a_a = r\alpha_a = \frac{2F}{m} = 2,0 \text{ m/s}^2,$$

Pospešek roke je vsota obeh pospeškov, pospeška osi v točki B in obodnega pospeška zgornjega valja okoli svoje osi

$$a_c = a_a + a_B = \frac{2F}{m} + \frac{F}{9m} = \frac{19F}{9m} = 2,1 \text{ m/s}^2.$$

1: razmislek o silah, podan na obeh slikah

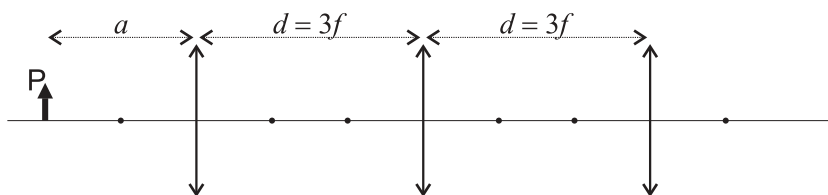
1: zapis 3 gibalnih enačb za vrtenje in translacijo obeh diskov

1: izraza za a_B in a_a

1: pravilen rezultat

[4 t.]

2. $f = 10 \text{ cm}$, $d = 3f = 30 \text{ cm}$, $a = 20 \text{ cm}$, $p = 5,0 \text{ cm}$.



a) Naloge se najprej lotimo povsem numerično. Za prvo lečo izračunamo lego slike (med prvo in drugo lečo)

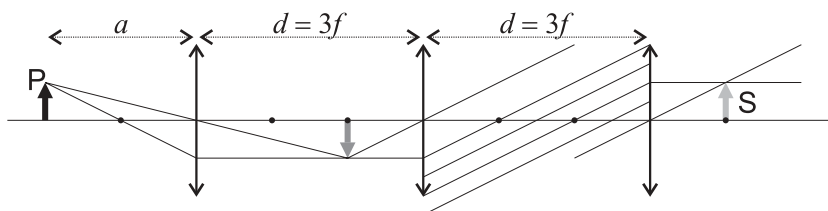
$$a_1 = a, \quad b_1 = f \frac{a_1}{a_1 - f} = 20 \text{ cm}.$$

Od tu dobimo a_2 , to je oddaljenost prve slike od druge leče

$$a_2 = d - b_1 = 10 \text{ cm} \quad \text{in} \quad b_2 = f \frac{a_2}{a_2 - f} = \infty.$$

Vidimo, da je a_3 , torej položaj druge slike glede na tretjo lečo

$$a_3 = d - b_2 = -\infty \quad \text{in} \quad b = b_3 = f \frac{a_3}{a_3 - f} = f = 10 \text{ cm}.$$



S pomočjo konstrukcije ugotovimo, da je prva slika realna in obrnjena, nastane pa v gorišču druge leče. Po prehodu žarkov, ki izhajajo iz vrha predmeta, skozi drugo lečo, so ti žarki vzporedni in se širijo v isti polprostor, kjer je predmet P. Če od tega snopa vzporednih žarkov izberemo tistega, ki gre skozi gorišče tretje leče, je ta žarek po prehodu skozi tretjo lečo vzporeden optični osi in seka natančno na oddaljenosti f za tretjo lečo temenski žarek, ki ga za konstrukcijo slike izberemo kot drugi žarek izmed vseh vzporednih žarkov, ki izhajajo iz prve slike predmeta. Slika S je torej pokončna in realna. Določanje velikosti slike lahko prav tako opremo na način, kako smo sliko konstruirali. Iz potekov žarkov med drugo in tretjo lečo je iz simetrije očitno, da bo za tretjo lečo nastala slika na enaki razdalji za tretjo lečo, kot je predmet (to je slika po preslikavi skozi prvo lečo) pred drugo lečo. Ker so žarki s katerekoli točke s predmeta med drugo in tretjo lečo vzporedni, to pomeni, da slika po prehodu skozi tretjo lečo nastane v goriščni ravnini tretje leče. Vidi se, da je situacija povsem simetrična, kar vodi do sklepa, da se velikost slike pri preslikavi skozi drugo in tretjo lečo ne spremeni. Ker je tudi preslikava preko prve leče taka, da ohrani velikost slike glede na predmet ($a_1 = b_1$), se velikost slike po preslikavi preko sistema leč ne spremeni in je velikost slike s enaka velikosti predmeta p .

2: ugotovitev, da lahko računamo z zaporedjem preslikav z enačbo leče $1/f = 1/a + 1/b$

1: pravilna interpretacija pozicije slike in predmeta v primeru, ko računsko dobimo neskončno

1: izračunana vrednost oddaljenosti b za zadnjo lečo

1: premislek o tem, da je končna slika pokončna in da je realna, lahko opisno ali s pomočjo skice in značilnih žarkov

1: določena velikost slike

[6 t.]

b) Če naj po premiku za x v desno sistem leč preslika predmet na isto mesto, to pomeni, moramo iz podatka $a_1 = a - x$ po preslikavi skozi vse tri leče dobiti na koncu rezultat $b_3 = b + x$, kjer z b označujemo rešitev iz a).

Po drugi strani iskanje x pomeni, da iščemo take a_1 in b_3 , da bo veljalo $a_1 + b_3 = a + b$, kjer sta a in b po vrsti vhodni podatek in rezultat pri vprašanju a).

1: pravilna formulacija problema na enega od načinov, opisanih zgoraj

Kako dobiti enačbo, ki nam bo dala x , ni enolično. V nadaljevanju opišemo eno od možnosti.

Sistem leč premaknemo v levo (torej proti predmetu) za x in ponovno računamo numerično, pri čemer vse vrednosti izražamo v centimetrih. Po preslikavi skozi prvo lečo dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= a - x = 20 - x, & b_1 &= f \frac{a_1}{a_1 - f} = 10 \frac{20 - x}{10 - x}, \\ a_2 &= d - b_1 = 30 - 10 \frac{20 - x}{10 - x} = 10 \frac{10 - 2x}{10 - x}, \\ b_2 &= f \frac{a_2}{a_2 - f} = 10 \frac{10 \frac{10 - 2x}{10 - x}}{10 \frac{10 - 2x}{10 - x} - 10} = 10 \frac{\frac{10 - 2x}{10 - x}}{\frac{10 - 2x - 10 + x}{10 - x}} = 10 \frac{2x - 10}{x}, \\ a_3 &= d - b_2 = 30 - 10 \frac{2x - 10}{x} = 10 \left(3 - \frac{2x - 10}{x} \right) = 10 \frac{10 + x}{x}, \\ b_3 &= f \frac{a_3}{a_3 - f} = 10 \frac{10 + x}{10 + x - x} = 10 + x. \end{aligned}$$

Kot vidimo, je pogoj $a_1 + b_3 = a + b = 30$ izpolnjen za vsak x

$$a_1 + b_3 = 20 - x + 10 + x = 30 = a + b.$$

To pomeni, da ta sistem leč predmet P preslika na isto mesto, ne glede kje se predmet nahaja, edini pogoj je, da se predmet nahaja pred prvo lečo. To nam da omejitev za x , saj mora biti $a - x > 0$. Dovoljeni so vsi $x < a = 20$ cm, pri čemer negativni x pomeni, da sistem leč oddaljujemo od predmeta dobimo pri premikih za več kot 10 cm v desno navidezno sliko predmeta, ki je še vedno na istem mestu kot pri vprašanju a).

1: računanje zaporednih preslikav, tudi če tekmovalac ne pride do konca

1: izračun, ki pokaže, da je $a_1 + b_3 = a + b$ za poljuben a_1

1: komentar in določitev omejitve, da smemo v levo sistem leč premakniti največ za začetni a , torej do predmeta

[4 t.]

3. $V_0 = 1,0 \text{ L}$, $P_0 = 1,0 \text{ bar}$, $T = 20^\circ\text{C}$, membrana 1 prepušča molekule plina A, membrana 2 prepušča molekule plina A in B.

a) Ker vsakič gledamo stanje po dolgem času, je dogajanje izotermno. Prostornine vseh treh prekatov so enake V_0 . Ko se zapori pred membranama odpreta, se za plin A prostornina, kjer se lahko nahaja, poveča z V_0 na $3V_0$. Gre za izotermno spremembo in parcialni tlak $p_{A,a}$ je zato v vseh treh prekatih enak

$$p_{A,a} = \frac{1}{3}p_0.$$

Ker v levi prekat (kjer je bil na začetku plin A) molekule preostalih dveh plinov ne morejo, je tam sedaj tlak

$$p_{1a} = \frac{p_0}{3} = 0,33 \text{ bar}.$$

Molekule plina B lahko prosto prehajajo med srednjim in desnim prekatom, prostornina plina B se izotermno poveča z V_0 na $2V_0$, tlak plina B je zato

$$p_{B,a} = \frac{1}{2}p_0.$$

Srednji prekat napolnjujeta plina A in B, zato je tam tlak

$$p_{2a} = p_{A,a} + p_{B,a} = \frac{p_0}{3} + \frac{p_0}{2} = \frac{5p_0}{6} = 0,83 \text{ bar}.$$

Plin C ostaja samo v desnem prekatu in zato je tlak, ki ga v desni posodi povzročajo molekule plina C enak $p_{C,a} = p_0$. Celoten tlak v desnem prekatu je seštevek parcialnih tlakov vseh treh plinov in je enak

$$p_{3a} = p_{A,a} + p_{B,a} + p_{C,a} = \frac{p_0}{3} + \frac{p_0}{2} + p_0 = \frac{11p_0}{6} = 1,83 \text{ bar}.$$

1: ugotovitev, da posamezni plin napolni: A $3V_0$; B $2V_0$ in C V_0

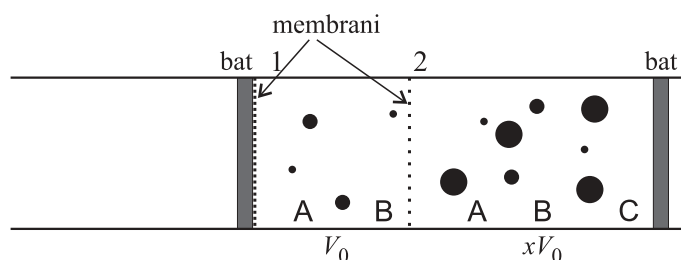
1: izračun vseh treh parcialnih tlakov

1: pravilno seštevanje parcialnih tlakov glede na to, kateri plini so v katerem prekatu

1: pravilno izračunani tlaki v vseh treh prekatih

[4 t.]

b) Ko sta bata premična, ju razlike tlakov premikajo, levega razlika med tlakom v levem prekatu in zunanjim tlakom p_0 , desnega razlika med tlakom v desnem prekatu in zunanjim tlakom p_0 . Iz rezultatov a) je očitno, da se levi in desni bat oba začneta premikati v desno. Ker lahko molekule plina A prehajajo skozi membrano 1, bo zunanji tlak levi bat potiskal v desno toliko časa, da bo iztisnil iz levega prekata ves plin A in ga bo zaustavila šele membrana 1. Od tu ugotovimo, da bo tlak v levi komori (če sploh še lahko govorimo o tlaku, enak p_0 , prostornina levega prekata bo 0. Končno stanje bo tako, da bo srednji prekat imel prostornino V_0 , ker ga omejujeta obe membrani, desni prekat pa se bo povečal, recimo, da je njegova končna prostornina enaka xV_0 , kjer je število $x > 1$.



Kot shematsko kaže slika, se v srednjem prekatu nahajata plin A in B, desnem prekatu pa vsi trije plini. Parcialni tlaki plinov so zato po vrsti

$$p_{A,b} = p_{B,b} = p_0 \frac{V_0}{V_0 + xV_0} = \frac{p_0}{1+x}.$$

in

$$p_{C,b} = p_0 \frac{V_0}{xV_0} = \frac{p_0}{x}.$$

Neznano vrednost x določimo iz pogoja, da se desni prekat neha večati, ko je tlak v njem enak zunanjemu tlaku p_0 , kar pomeni

$$p_0 = p_{A,b} + p_{B,b} + p_{C,b} = 2 \frac{p_0}{1+x} + \frac{p_0}{x},$$

kar nam da za x kvadratno enačbo

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

z rešitvama $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Rešitev $x = 1 - \sqrt{2} < 0$, kar bi pomenilo negativno prostornino desnega prekata, kar je fizikalno nesmiselno. Edina smiselna rešitev je torej

$$x = 1 + \sqrt{2}, \quad xV_0 = 2,41V_0 = 2,41 \text{ L}.$$

tlak v desnem prekatu je seveda $p_{3b} = p_0 = 1,0$ bar. Zdaj izračunamo še tlak v srednjem prekatu

$$p_{2b} = p_{A,b} + p_{B,b} = 2 \frac{p_0}{1+x} = p_0 \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 0,5858p_0 = 0,5858 \text{ bar} \approx 0,59 \text{ bar} \approx 0,6 \text{ bar}.$$

1: ugotovitev, da se levi bat premakne do membrane 1

1: ugotovitev, da se plina A in B razporedita enakomerno po obeh preostalih prekatih

1: zapis parcialnih tlakov ali s številom x ali s prostorninama srednjega prekata V_0 in desnega prekata V_d

1: izračun prostornine desnega prekata V_d in tlaka p_{2b} v srednjem prekatu

[4 t.]

c) Ker vse dogajanje poteka pri konstantnem tlaku, je delo plinov v prekatih enako kar $A = -p\Delta V$, kjer je stalni tlak $p = p_0$ potiskal sem ali tja oba bata. Ker je v nalogi povedano, da gledamo stanje po dolgem času, je tudi temperatura plinov na koncu enaka začetni in s tem zunanji $T = 20^\circ\text{C}$, se ne spremeni notranja energija plinov. Energijski zakon vodi do končnega rezultata

$$\Delta W_n = Q + A = 0, \quad Q = -A = p_0\Delta V.$$

$$Q = p_0(V_0 + xV_0 - 3V_0) = p_0V_0(1 + 1 + \sqrt{2} - 3) = p_0V_0(\sqrt{2} - 1) = 41 \text{ J},$$

pri čemer pozitivni znak pomeni, da je plin toploto prejel (in je oddal delo, ker se je razpel (povečana končna prostornina).

1: ugotovitev, da je delo plina nasprotno enako prejeti toploti in da izotermna sprememba vodi do $\Delta W_n = 0$

1: izračun toplote vključno z interpretacijo predznaka: plin je toploto prejel

[2 t.]