

Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo
Katedra za algebro in analizo

Tadej Starčič
**NALOGE IZ OSNOV MATEMATIČNE
ANALIZE Z REŠITVAMI**
Učno gradivo

Ljubljana, 2015

Predgovor

Znanje matematike se lahko utrdi ali poglobi le tako, da se matematične koncepte in računske postopke preizkusi in vadi z reševanjem večjega števila nalog. To znanje je potrebno obvladati na vseh področjih, še posebno pa v naravoslovnih vedah.

Pričujoča zbirka vsebuje naloge z rešitvami oziroma z nasveti za reševanje. Obsega snov matematične analize pred diferencialnim in infinitezimalnim računom, torej indukcijo, realna in kompleksna števila, zaporedja in vrste, realne funkcije ene spremenljivke, ter limite in zveznost funkcij. To so osnovni koncepti, ki jih je nujno razumeti na področju matematične analize. Nastajala je od študijskega leta 2009/10 do sedaj, v tem času namreč na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani med drugim vodim vaje iz predmeta Osnove matematične analize. V veliki večini zato vsebuje naloge z vaj, izpitov in kolokvijev pri omenjenem predmetu. Vrstni red nalog, njihova struktura, težavnost in oblika naravno sledijo toku premišljevanja študenta. Večinoma so samostojne in se praviloma ne sklicujejo na ostale naloge. Zelo malo nalog zahteva znanje iz kasnejšega razdelka. Rešitve, večinoma rezultati in uporabni nasveti, pa tudi precej v celoti rešenih nalog, so na koncu.

Zbirka je tako še posebej pisana na kožo študentom Pedagoške fakultete, študijskega programa dvopredmetnega učitelja matematike, ki analizo poslušajo v prvem letniku študija. Gotovo pa bo prav prišla tudi študentom, ki poslušajo sorodna predavanja na drugih fakultetah. Njen osnovni namen pa je pomoč pri študiju. Zbirka sama seveda ni dovolj za popolno razumevanje vsebovanih snovi. Pravi pomen bo dobila šele v povezavi s celotnim študijskim procesom.

Pa veliko veselja pri reševanju!

Kazalo

1	Matematična indukcija	4
2	Realna števila	6
3	Kompleksna števila	9
4	Zaporedja	12
5	Vrste	17
6	Realne funkcije	21
7	Limite funkcij	24
8	Zveznost	27
9	Rešitve	31
9.1	Matematična indukcija	31
9.2	Realna števila	32
9.3	Kompleksna števila	34
9.4	Zaporedja	37
9.5	Vrste	39
9.6	Realne funkcije	41
9.7	Limite funkcij	43
9.8	Zveznost	44

1 Matematična indukcija

1. Z indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ veljajo naslednje enakosti:

(a) $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2},$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (2n - 2)2^n + 2,$

(d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1,$

(e) $1(1^2 - 1) + 2(2^2 - 1) + \dots + n(n^2 - 1) = \frac{(n^2-1)n(n+2)}{4}.$

2. Z indukcijo dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\cos(x) \cos(2x) \cdots \cos(2^{n-1}x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin(x)}, \quad x \in (0, \pi).$$

3. Z indukcijo dokaži, da za vse $n \in \mathbb{N}$ veljajo neenakosti:

(a) $1^2 \cdot 2^1 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \dots + n^2 \cdot 2^n \geq 2n(n - 2) \cdot 2^n,$

(b) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n},$

(c) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{n}{2}.$

4. Z indukcijo dokaži, da za vse $n \in \mathbb{N}$ in $x > -1$ velja neenakost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Bernoullijeva neenakost}).$$

5. Z indukcijo dokaži, da je za vsako naravno številno n število

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{12 + \sqrt{12}}}}}} \quad (n \text{ korenov})$$

manjše od 4.

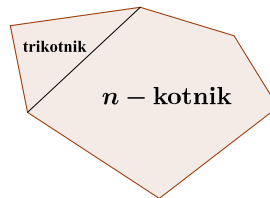
6. Z indukcijo dokaži naslednje trditve o deljivosti izrazov:

(a) Število 6 deli izraz $n^3 + 5n$ za vsako naravno število n .

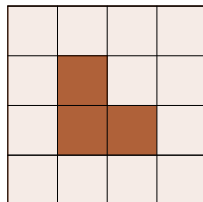
(b) Izraz $2^{2n+1} + 3n - 2$ je deljiv z 9 za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- (c) Izraz $5^n + 2 \cdot 11^n$ deljiv s 3 za vsako naravno število n .
- (d) Izraz $3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n - 5$ je deljiv z 8 za vsako naravno število n .
- (e) Število $2^{2^n} - 1$ je deljivo s 15 za $n \geq 2$. (Nasvet: Upoštevaj, da je $2^{2^{n+1}} = (2^n)^2$.)

- 7. Z indukcijo dokaži, da je zadnja števka števila 2^{2^n} za $n \geq 2$ enaka 6.
- 8. Z indukcijo dokaži, da je izraz $\frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6}$ naravno število za vse $n \in \mathbb{N}$.
- 9. Z indukcijo dokaži, da je vsota notranjih kotov konveksnega n -kotnika ($n \geq 3$) enaka $(n - 2)\pi$.



- 10. Za vsako naravno število $n > 23$ obstajata nenegativni celi števili x, y , ki rešita enačbo $7x + 5y = n$.
- 11. Na nekem otoku se plačuje le s kovanci po 12 in 5 centov. Z indukcijo pokaži, da lahko plačamo vse zneske nad 48 centov.
- 12. Z indukcijo dokaži, da lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ šahovnico dimenzij $2^n \times 2^n$ brez enega vogala pokrijemo z majhnimi L -dominami, ki pokrijejo tri polja.



- 13. Z indukcijo dokaži, da n paroma nevzporednih premic, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

2 Realna števila

1. Ulomka $\frac{114}{399}$ in $\frac{9455}{5673}$ najprej okrajšaj, nato pa ju zapiši v decimalni obliki.
2. Ali se vsak ulomek zapiše kot periodično decimalno število? Ali je decimalno število enolično določeno?
3. Število $11,2\overline{65}$ zapiši kot ulomek. Razloži, zakaj lahko vsako periodično decimalno število zapišemo kot ulomek? Ali je tak ulomek morda enolično določen?
4. Naj bosta x in y dve števki. Periodično decimalno število $0,\overline{xy}$ zapiši v obliki ulomka.
5. Dokaži, da se v decimalnem zapisu iracionalnega števila vsaj ena števka pojavi neskončnokrat.
6. Pokaži, ali so naslednja števila iracionalna:
 - (a) $\sqrt{5}$,
 - (b) $\sqrt{2\sqrt{2}}$,
 - (c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
 - (d) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$,
 - (e) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$,
 - (f) $\frac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$,
 - (g) $\sqrt{\sqrt{5}-3} + \sqrt{\sqrt{5}+3}$,
 - (h) $\log_5(7)$,
 - (i) $\log_8(7)$,
 - (j) $\log_{\frac{1}{2}}(7)$.

7. Ali je katero od števil iracionalno za vsako (kakšno) naravno število n :

$$\sqrt[3]{n - \sqrt{n}}, \quad \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+2}, \quad \sqrt[n]{1 + \sqrt{n}}.$$

(Če ne gre v splošnem, premisli vsaj za $n = 3$.)

8. Naj bo $\frac{p}{q} > 0$ približek za $\sqrt{2}$. Dokaži, da je potem $\frac{p+2q}{p+q}$ še boljši približek za $\sqrt{2}$.
9. Naj bo $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in $y, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Dokaži, da velja $x + y, x \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - Kaj lahko poveš o številih $y + z, y \cdot z, z^2$ in \sqrt{z} ? Ali so vsa dobro definirana?
10. S pomočjo aksiomov za množenje dokaži, da za realna števila x, y in z velja:
- Če je $x \neq 0$ in $xy = 1$, potem je y natanko določen. (*enoličnost obratne vrednosti*)
 - Če je $x \neq 0$ in $xy = xz$, potem je $y = z$. (*pravilo krajšanja*)
11. Analitično in grafično reši naslednje neenačbe oziroma enačbe:
- $|3x + 2| > 2$,
 - $|x + 1| \leq |2x| - 1$,
 - $|2x + 3| \leq |4x - 3|$,
 - $|2x + 1| \leq |x - 1| + x$,
 - $|1 - |x - 1|| = 2$,
 - $|\frac{2x+1}{x-2}| \leq 1$,
 - $|x^2 - x - 1| = 1$.
12. Dokaži, da veljajo naslednje enakosti oziroma neenakosti:
- $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 - $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$
13. Naslednjim množicam najprej poišči nekaj zgornjih in spodnjih mej, nato pa jim poišči še supremum in infimum oziroma maksimum in minimum, če obstajajo.
- $\mathcal{A} = [0, 1) \cup \{-4, -3, -1\}$,
 - $\mathcal{C} = \mathbb{R}^+ \cup (-3, 5]$,

- (c) $\mathcal{B} = \{(-\frac{1}{2})^m \mid m \in \mathbb{N}\}$,
 (d) $\mathcal{C} = \{(-1)^m + \frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

14. Dana je množica $\mathcal{B} = \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$.

- (a) Utemelji, zakaj sta 0 in -1 spodnji meji množice \mathcal{B} . Razmisli, da je 0 natančna spodnja meja množice \mathcal{B} .
 (b) Ali je 10000 zgornja meja množice \mathcal{B} ? Ali obstaja kakšna zgornja meja množice \mathcal{B} ? Kaj pa maksimum množice?

15. Dana je množica $\mathcal{A} = \{\frac{2m}{1+2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

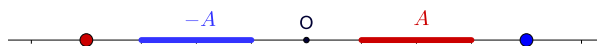
- (a) Utemelji najprej, zakaj je 0 spodnja meja množice \mathcal{A} . Nato razloži, zakaj je $\frac{2}{3}$ minimum oziroma natančna spodnja meja množice \mathcal{A} .
 (b) Pokaži, da števili 0.9 in 0.99 nista zgornji meji množice \mathcal{A} .
 (c) Utemelji najprej, zakaj je 1 zgornja meja množice \mathcal{A} , nato pa pokaži, da je 1 tudi natančna zgornja meja množice \mathcal{A} .

16. Naj bo A omejena podmnožica realnih števil, ter naj bo

$$-A := \{-a \mid a \in A\}.$$

Naslednje trditve najprej ilustriraj na preprostem primeru, ko je množica $A = [1, 3) \cup \{4\}$, nato pa napravi še splošni dokaz:

- (a) $-\sup A$ je spodnja meja za $-A$, $-\inf A$ pa zgornja meja za $-A$.
 (b) $\inf(-A) = -\sup A$.
 (c) $\sup(-A) = -\inf A$.



3 Kompleksna števila

1. Dano je kompleksno število $z = 3 + 4i$. Izračunaj oziroma določi realne in imaginarne dele naslednjih števil:

$$(2 - 3i)(z - 1 - 3i) + i^3, \quad \frac{\bar{z} - 2 + 2i}{2 + i}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1 - i}{|z| + 1}\right).$$

2. (a) Dokaži, da za kompleksna števila $z \neq 1$ z absolutno vrednostjo 1, t.j. $|z| = 1$, velja $\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$. Natančneje, dokaži

$$\frac{z + 1}{z - 1} = i \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 - \operatorname{Re}(z)}.$$

- (b) Reši enačbo $\frac{z+1}{z-1} = 2i$. Ali ima rešitev absolutno vrednost 1? Kaj pa rešitev enačbe $\frac{z+1}{z-1} = ci$, kjer je $c \in \mathbb{R}$?

3. V kompleksni ravnini predstavi naslednje množice:

- (a) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 2, \operatorname{Im}(z) \geq -1\}$,
- (b) $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \frac{\pi}{4} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}\}$,
- (c) $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$,
- (d) $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1 + i| \leq 4, \operatorname{Im}(z) > -2\}$,
- (e) $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = |z + 1|\}$,
- (f) $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| + |z + 3| = 10\}$,
- (g) $\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C} \mid (2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} = 2\}$,
- (h) $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z}z - i\bar{z} + iz = 3\}$.

4. Dokaži, da velja

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{i}{2}\right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2i| = 2\}.$$

Kaj geometrijsko predstavlja zgornja množica? Nariši jo.

5. V kompleksni notaciji zapiši pogoj, da je množica

- (a) polkrog z robom s središčem v 0 in z radijem 3, ki leži v 'spodnji' polravnini.

(b) kolobar brez roba z radijema 1 in 3 ter s središčem v $1 + i$.

6. Dokaži ali ovrzi naslednje enakosti:

(a) $i \operatorname{Im}(\bar{w} z) + z \operatorname{Im}(-iw) + w \operatorname{Im}(i\bar{z}) = 0, \quad z, w \in \mathbb{C},$

(b) $i \operatorname{Re}(\bar{w} z) + z \operatorname{Re}(-iw) + w \operatorname{Re}(i\bar{z}) = 0, \quad z, w \in \mathbb{C},$

(c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2, \quad z, w \in \mathbb{C}.$

(paralelogramska enakost)

(d) $||z| - |w|| \leq |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}$

7. Izračunaj vse kvadratne korene

$$\sqrt[2]{3 - 4i}, \quad \sqrt[2]{-6 - 8i}.$$

(Nasvet: Zapiši $a + ib = \sqrt[2]{3 - 4i}$, kvadriraj in reši dobljeni sistem enačb.)

8. Dano je oglišče $z_1 = \sqrt{3} + i$ pravilnega sedemkotnika s središčem v 0. Poišči še ostala oglišča tega sedemkotnika, ki jih je dovolj podati v polarni obliki.

(Nasvet: Opazi, da z vrtenjem oglišča okrog središča za ustrezne kote dobimo ostala oglišča, polarni zapis dveh sosednjih oglišč se torej razlikuje le za kot $\frac{2\pi}{7}$.)

9. Dana so kompleksna števila z_1, z_2 in z_3 , ki pripadajo ogliščem enakostraničnega trikotnika.

(a) Dokaži, da je $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, če je težišče trikotnika v 0.

(b) Naj bo $z_1 = 1 - 2i$ in težišče enakostraničnega trikotnika v 1. Določi še ostali dve oglišči tega trikotnika.

10. Z uporabo polarne zapisa poenostavi naslednje izraze, t.j. vsa števila podaj v obliki z realnim in imaginarnim delom:

(a) $(1 - i)^{100},$

(b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2000},$

(c) $(1 - i\sqrt{3})^{2015},$

(d) $(2\sqrt{3} + 2i)^{2015}.$

11. Opiši preslikavo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ki je podana s predpisom $f(z) = iz + 2$. Preslikavi poišči tudi njeno inverzno preslikavo.

12. Z uporabo Moivreove formule

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^7 = (\cos(7\alpha) + i \sin(7\alpha))$$

izrazi $\sin(7\alpha)$ in $\cos(7\alpha)$ le s $\sin(\alpha)$ ter $\cos(\alpha)$.

13. Dana kompleksna števila z zapiši v polarni obliki in v polarni obliki nato zapiši vse njihove kubične in vse pete korene (t.j. reši enačbi $w^3 = z$ oziroma $w^5 = z$), ter jih označi v kompleksni ravnini:

- (a) $-i$,
- (b) $-2 - 2i$,
- (c) $\sqrt{3} - i$,
- (d) $-1 + i\sqrt{3}$.

Poskusi še izračunati kubične korene katerega od števil (t.j. podati z realnim in imaginarnim delom).

14. Poišči vsa kompleksna števila $z \in \mathbb{C}$, ki rešijo enačbe

- (a) $z^2 + z + 2 = 0$,
- (b) $z^2 + (1 - i)z - i = 0$,
- (c) $\operatorname{Re}(z + iz) = 0$,
- (d) $|z| + \bar{z} = 2 + i$.
- (e) $z^2 + \operatorname{Im}(z) = 2\bar{z} + 3$,
- (f) $\operatorname{Im}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{3+i}{2-i}\right)$.
- (g) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$
- (h) $z^4 = -16$,
- (i) $z^2 \bar{z} = \frac{1+i}{4}$.
- (j) $\bar{z} = z^3$. (Nasvet: Pomagaj si s polarno obliko kompleksnega števila.)

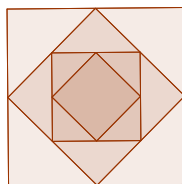
4 Zaporedja

1. Neka banka ponuja 0.1% letno obrestno mero in mesečni pripis obresti. Z zaporedjem opiši, koliko denarja imamo na banki po n -tem mesecu, $n \in \mathbb{N}$, če

- (a) le na začetku položimo 100 EUR.
- (b) na banko vsak mesec položimo obrok po 100 EUR.

Ali je katero od zaporedij geometrijsko? Koliko denarja imamo po dveh letih? V kolikšnem času se nam vloženi denar podvoji?

2. Kvadratu s stranico 2 včrtamo manjši kvadrat tako, da njegova oglišča ležijo na razpoloviščih stranic večjega kvadrata, manjšemu kvadratu nato spet včrtamo kvadrat, itd. Dolžine stranic, ploščin in obsege kvadratov zapiši v zaporedja in določi splošne člene. Ali je katero od zaporedij geometrijsko?



3. Izračunaj obseg in ploščino *trikotnika Sierpinskega*. Trikotnik Sierpinskega dobimo z naslednjim postopkom. Začnemo s trikotnikom, v katerem med seboj povežemo razpolovišča stranic. Dobimo štiri manjše trikotnike in srednjega izrežemo. Postopek ponovimo na preostalih manjših treh trikotnikih. To ponavljamo na vsakem novonastalem manjšem trikotniku.

4. Dana so zaporedja:

- (a) $a_n = \frac{n^2+1}{n+2}$,
- (b) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$,
- (c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$
- (d) $\sqrt{\frac{2}{1}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{5}{4}}, \dots$

- Izračunaj nekaj začetnih členov zaporedja oziroma določi splošni člen. Ali je kak člen zaporedja enak $\frac{6}{5}$ oziroma $\frac{1}{2}$?

- Ali je katero zaporedje monotono (padajoče oziroma naraščajoče)? (Nasvet: Opazuj predznak razlike $a_{n+1} - a_n$ oziroma kvocient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ primerjaj z 1.)
 - Ali je katero zaporedje navzgor oziroma navzdol omejeno? Če je odgovor pritrdilen, poskusi določiti tudi infimum in supremum zaporedja.
5. Par zajčkov v enem mesecu odraste. Po dveh mesecih in nato vsak naslednji mesec ima par odraslih zajcev po dva potomca različnega spola. Pari potomcev spet po enem mesecu odrastejo in imajo vsak naslednji mesec prav tako dva potomca različnega spola itd. Z zaporedji O_n , M_n oziroma F_n predstavi številčnost odraslih, mladih oziroma vseh zajcev v n -generaciji, ter poišči rekurzivne zveze zaporedij.
6. Zaporedje F_n je podano z rekurzivno formulo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ in začetnima členoma $F_1 = 1$ in $F_2 = 1$. (*Fibonaccijevo zaporedje*.) Z indukcijo dokaži:
- (a) $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$,
 - (b) $\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, $\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}$,
 - (c) F_{3n} je sodo število za vse $n \in \mathbb{N}$,
 - (d) F_{4n} je deljivo s 3 za vse $n \in \mathbb{N}$.
7. Dano je zaporedje $a_n = 1 + \frac{1}{3^{n+1}}$.
- (a) Ugotovi, od kod naprej se členi zaporedja od števila 1 razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$.
 - (b) Po definiciji limite zaporedja pokaži $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, t.j. za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči N (odvisen od ε), da bo $|a_n - 1| < \varepsilon$ za $n > N$.
8. Izračunaj naslednje limite:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 2}{n^2 + n + 2}$,
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n + \sqrt{2n^2 - 1}}{1 + n + \sqrt[3]{2n^2 - 1}}$,
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,
 - (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$,
 - (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^2}{3^n + 2^n}$,
 - (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^3}$,
 - (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$,
 - (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^{5n+1}$,
 - (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{-4n+3}$,
 - (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{-n+3}$,

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$,	(n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{2^n}}$,
(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos(2n)$,	(o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n^2+1}$,
(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$,	(p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n}$.

9. Poišči vsa stekališča zaporedij $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ in $b_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

10. Poišči primere zaporedij z naslednjimi lastnostmi:

- omejeno zaporedje z vsaj dvema stekališčema,
- strogo monotono konvergentno zaporedje z limito 1 in natančno spodnjo mejo -1 ,
- nekonvergentno (neomejeno) zaporedje z natanko enim stekališčem,
- zaporedje z neskončno stekališči.

11. Dana so zaporedja

(a) $a_n = \frac{2n+3}{n^2+n}$,	(i) $a_n = \frac{3^n+n}{4^n}$,
(b) $a_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n}$,	(j) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3^n-1}{3^n+n}$,
(c) $a_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+\sqrt[3]{2n^3+1}}$,	(k) $a_n = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+2}$,
(d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2n^2+1}+5n}{3n+2}$,	(l) $a_n = \frac{n^2+1}{2^n-n}$,
(e) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$,	(m) $a_n = n + e^{-n}$,
(f) $a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$,	(n) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}$.
(g) $a_n = \frac{2n-1}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$,	(o) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
(h) $a_n = (n^2+1) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$,	

- Če zaporedje konvergira, mu poišči limito. V nasprotnem primeru pa poišči vsa stekališča danega zaporedja, nato pa za vsako stekališče poskusi najti kakšno konvergentno podzaporedje, ki konvergira k temu stekališču.
- Razišči omejenost zaporedij. Če je katero zaporedje omejeno, mu določi natančno zgornjo oziroma natančno spodnjo mejo.
- Ali je katero od zaporedij monotono (t. j. naraščajoče oziroma padajoče)?

12. Dani sta zaporedji s splošnima členoma

$$a_n = \frac{100^n}{n!}, \quad b_n = \frac{n^2}{(1.01)^n}.$$

- (a) Dokaži, da sta zaporedji prvih 99 členov naraščajoči, od nekega člena naprej pa strogo padajoči. (Nasvet: Opazuj kvocient dveh zaporednih členov.)
- (b) Utemelji, da je zaporedje omejeno, ter ima natanko eno stekališče (limito). Določi to limito.

13. Dana so zaporedja vsot:

- (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$,
- (b) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$,
- (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

- Pokaži, da je vsako od zaporedij monotono (t.j. naraščajoče oziroma padajoče).
- Ali je katero od zaporedij omejeno oziroma konvergentno?

14. S pomočjo definicije dokaži, da zaporedje $a_n = \frac{n+2}{n}$ je Cauchyovo, zaporedje $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ pa ni. (Nasvet: Opazuj $b_{2n} - b_n$.)

15. Poišči limite oziroma stekališča kompleksnih zaporedij:

- (a) $a_n = i^n$,
- (b) $b_n = \frac{1+3ni}{n(1+i)}$,
- (c) $c_n = \frac{n+1}{n}(\cos(\frac{n\pi}{2}) + i \sin(\frac{n\pi}{2}))$,
- (d) $d_n = n \cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{3n}{2n+1}i$.

16. Zaporedje je podano z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$ in začetnim členom $a_1 = 1$. Ugotovi, ali je zaporedje monotono ali konvergentno oziroma izračunaj limito.

17. Zaporedje b_n je podano z rekurzivno formulo $b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}$ in prvim členom $b_1 = 1$.

- (a) Dokaži, da je podzaporedje lihih členov padajoče in omejeno, podzaporedje sodih členov pa naraščajoče in omejeno.
- (b) Izračunaj nekaj členov zaporedja. Kaj opaziš? Kako bi opisal splošni člen?
18. Zaporedje je podano z rekurzivno formulo $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2 + 1$ in prvim členom $a_1 = 1$.
- (a) Z indukcijo dokaži, da je zaporedje navzgor omejeno z 2 in naraščajoče.
- (b) Ugotovi, da zaporedje konvergira in izračunaj limito.
19. Dano je zaporedje

$$x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ korenov}).$$

- (a) Z indukcijo dokaži, da je zaporedje x_n navzgor omejeno z 2 in naraščajoče. Ali je to zaporedje konvergentno? V primeru, da je odgovor pritrdilen, izračunaj limito zaporedja.
- (b) Z indukcijo dokaži, da so vsi členi zaporedja iracionalna števila. Pokaži tudi, da je $x_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

5 Vrste

1. Izračunaj vsote naslednjih vrst:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots, & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{2^{2n}}, \\ \text{(b)} \quad \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots, & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+3}}{3^{2n-1}}, \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n+3}+1}{3^{2n-1}}. \end{array}$$

(Nasvet: Pri prvih treh vrstah gani formulo za n -to delno vsoto vrste in jo nato potrdi z indukcijo, ali pa si pomagaj s parcialnimi ulomki. Pri drugih treh vrstah pa uporabi geometrijsko vrsto.)

2. Naj bo C_1 razpolovišče intervala $[0, 1]$. S C_2 označimo razpolovišče $0C_1$, s C_3 označimo razpolovišče C_2C_1 , s C_4 označimo razpolovišče C_2C_3 in tako naprej. Kateri točki se približuje zaporedje C_n ?

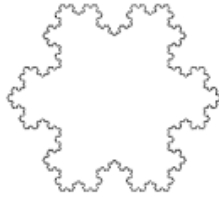
3. Polž prične svojo pot v koordinatnem izhodišču ravnine. Najprej gre za 3 v desno, nato gor za $\frac{9}{4}$, potem za $\frac{27}{16}$ v levo, nato za $\frac{81}{64}$ dol, potem pa spet desno za $\frac{243}{256}$, itd. (Na n -tem 'koraku' preleže za $\frac{3^n}{4^{n-1}}$.) Kateri točki se približuje polž?

(Nasvet: Posebej opazuj gibanje polža v smeri x -osi oziroma v smeri y -osi.)

4. Izračunaj ploščino in obseg Kochove snežinke \mathcal{K} . Kochova snežinka je ravninski lik, ki ga dobimo z naslednjim postopkom. Začnemo z enakostraničnim trikotnikom \mathcal{K}_0 s tremi ($N_0 = 3$) stranicami dolžine $d_0 = 1$, nato pa nad srednjo tretjino vsake od njegovih treh stranic nalepimo enakostranični trikotnik s stranico dolžine $\frac{1}{3}$. Dobimo lik \mathcal{K}_1 z $N_1 = 12$ stranicami dolžine $d_1 = \frac{1}{3}$. Nato spet nad srednjo tretjino vsake od dvanajstih stranic lika \mathcal{K}_1 nalepimo enakostranični trikotnik s stranico dolžine $\frac{1}{9}$, tako dobimo lik \mathcal{K}_2 z $N_2 = 48$ stranicami dolžine $d_2 = \frac{1}{9}$. Postopek nato ponavljamo in ponavljamo...

- Skiciraj like $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ in \mathcal{K}_3 .
- Dokaži, da je število stranic \mathcal{K}_n enako $N_n = 3 \cdot 4^n$.
- Pokaži, da je dolžina stranice \mathcal{K}_n enaka $d_n = (\frac{1}{3})^n$.
- Izračunaj obseg $o_n = N_n \cdot d_n$ lika \mathcal{K}_n , ki ga dobimo po n -korakih, ter določi $o(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} o_n$, če obstaja.

- (e) Izpelji formulo za ploščino $p_m = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{n=1}^m (\frac{4}{9})^n$ lika \mathcal{K}_n , ter izračunaj $p(\mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_m$, če obstaja.



5. Dokaži, da za delne vsote harmonične vrste velja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Odtod vidimo, kako hitro harmonična vrsta divergira.) Ali poznaš kakšen enostavnejši dokaz, ki dokazuje le divergenco harmonične vrste?

6. Ugotovi, ali vrsti konvergirata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

7. S primerjanjem z znanimi vrstami razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n+n^2}, & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{3n})^n, \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n-1}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}, \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(2n+1)}, & \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}. \end{array}$$

8. S pomočjo korenskega in kvocientnega kriterija razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n+1}}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{3n})^{n^2}, \\ \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)5^n}, & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)2^n}{n!}, \\ \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+3n}{4^n-2n}, & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(2n)!}, \\ \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-3n}{2^{n+1}+n^2}, & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}. \end{array}$$

9. Iz zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s pozitivnimi členi sestavimo vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n} a_n$.

- (a) Dokaži: Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergirata.
(Nasvet: Najprej razmisli, da so členi zaporedja a_n od nekega naprej po absolutni vrednosti manjši od 1.)
- (b) Poišči primer zaporedja a_n s pozitivnimi členi, da bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pa ne.

10. Razišči pogojno in absolutno konvergenco naslednjih vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n}$,
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+n^2}$,
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{3}{n})^{n^2}$,
 (e) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5^4} + \dots$,
 (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\arctan(n)}$,
 (Nasvet: Upoštevaj, da je \arctan naraščajoča in $\arctan(x) \leq x$ za $x \geq 0$.)

11. Huda mravljica prične svojo pot v koordinatnem izhodišču ravnine. Najprej gre za 1 v desno, nato za $\frac{1}{2}$ navzgor, zatem za $\frac{1}{3}$ v levo, nato za $\frac{1}{4}$ navzdol, potem pa spet desno za $\frac{1}{5}$, itd. Dokaži, da je mravljica namenjena proti neki točki? (Ni potrebno ugotoviti, kateri točki se bliža.)
(Nasvet: Posebej opazuj gibanje mravljice v smeri x -osi ter nato v smeri y -osi.)

12. Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}^+$ naslednje vrste konvergirajo absolutno oziroma pogojno, ter kdaj ne konvergirajo:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{n})^n$,
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{na^n}{2^n}$,
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^3 a^n}$,
 (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(n+1)^3 (a+2)^n}$.

13. Dani sta vrsti $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ in njena preureditev, kjer dvema pozitivnima členoma vedno sledi negativen:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

(a) Pokaži, da je podzaporedje lihih členov vrste

$$s_{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right)$$

konvergira k številu, ki je manjše od $\frac{5}{6}$. Še več, $S = \frac{5}{6} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$.

(b) Pokaži, da je podzaporedje vsakega tretjega člena delnih vsot preureditve

$$s'_{3n} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

naraščajoče, ter sklepaj, da preureditev vrste ne more konvergirati k $\frac{5}{6}$. Ali S' sploh konvergira?

14. Razišči konvergenco naslednjih vrst kompleksnih števil:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{n}i\right)$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+in(-1)^n}{n^2}$,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n}$,
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3+4i)^n}{6^n}$,
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

6 Realne funkcije

1. Določi definicijska območja, poišči ničle, pole in asimptote, ter nariši grafe osnovnih funkcij:

(a) $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$,

(b) $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}$,

(c) $f(x) = 2^{-x} - 1$,

(d) $g(x) = \log_2(x+2) + 1$,

(e) $f(x) = 3 \sin(2x) + 1$,

(f) $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Katere izmed naštetih funkcij so omejene in katere so naraščajoče oziroma padajoče?

2. Določi definicijska območja naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{|x+3| - 2 + 2x}$,

(b) $g(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-2}{2}\right)$,

(c) $f(x) = \arccos(x+1) \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$,

(d) $h(x) = \frac{x \arcsin 3x}{\sin(2x)}$,

(e) $f(x) = \log_{10}(x^2 - 3x - 4)$,

(f) $g(x) = \log(\log(x))$,

(g) $g(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,

(h) $f(x) = \frac{-4 + \sqrt{4^x - 2}}{2^x - 4}$,

(i) $g(x) = \sqrt{-1 + \ln(x+2)}$,

3. Temperaturo lahko merimo v stopinjah Celzija oziroma v stopinjah Fahrenheita. Temperaturo v stopinjah Fahrenheita dobimo, če temperaturo v stopinjah Celzija pomnožimo z $\frac{9}{5}$ in prištejemo 32. Zapiši splošni predpis, ki pretvori temperaturo iz stopinj Celzija v stopinje Fahrenheita. Kaj pa obratno? V kakšni zvezi sta predpisa?

4. Danim funkcijam določi definicijsko območje in zalogo vrednosti. Katere izmed danih funkcij so injektivne? Injektivnim funkcijam nato poišči tudi inverzne funkcije. Za neinjektivne funkcije pa poišči dve različni točki x_1 in x_2 , da bosta vrednosti $f(x_1)$ in $f(x_2)$ enaki.

- (a) $h(x) = e^{x-3} - 1$,
- (b) $g(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{12})$,
- (c) $f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{3x + 2})$,
- (d) $f(x) = \log \frac{2x+1}{x-3}$,
- (e) $g(x) = \arcsin(\frac{x-1}{2x})$,
- (f) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-1}}$,
- (g) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x+7}$,
- (h) $f(x) = \frac{2e^{3x}+1}{e^{3x}-2}$.

5. Funkcija f je podana s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(x), & -1 \leq x < 1 \\ 2 + 2 \log(x), & x \geq 1 \end{cases}.$$

- (a) Zakaj f , kot funkcija $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ni surjektivna? Ugotovi, kaj je potrebno namesto \mathbb{R} vzeti za kodomeno funkcije f , da bo surjektivna. (Nasvet: Določi zalogo vrednosti funkcije f .)
- (b) Dokaži, da je funkcija f injektivna in ji poišči inverzno funkcijo.

6. Dani sta funkciji $f(x) = 1 - \cos(x)$ in $g(x) = \sqrt[3]{2x}$.

- (a) Izračunaj kompozitume $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g \circ g$. Ali velja $f \circ g = g \circ f$?
- (b) Ugotovi še, katere izmed funkcij f , g , $f \circ g$, $g \circ f$ in $f \circ f$ so lihe oziroma katere sode. (Navet: Če funkcija ni soda, potem poišči točko x_1 , da bo $f(x_1) \neq f(-x_1)$. Če funkcija ni liha, pa poišči točko x_1 , da bo $f(x_1) \neq -f(x_1)$.)

7. Naj bosta $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ in $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ taki funkciji, da je njun kompozitum $f \circ g$ dobro definirana funkcija. Dokaži spodaj podane trditve. (Če ne gre v splošnem, jih preveri vsaj na primerih $y = x^3$ in $y = \cos x$, $y = x^2$ in $y = -x$.)

- (a) Če sta f in g (strogo) naraščajoči funkciji, potem je tudi $f \circ g$ (strogo) naraščajoča funkcija. Če pa sta f in g (strogo) padajoči, je $f \circ g$ (strogo) padajoča.

- (b) Če sta f in g injektivni, potem je tudi $f \circ g$ injektivna. Če pa sta f in g surjektivni, potem je tudi $f \circ g$ surjektivna.
 - (c) Če je funkcija $f \circ g$ injektivna, potem je g injektivna funkcija. Če pa je $f \circ g$ surjektivna funkcija, potem je f surjektivna.
 - (d) Če je ena izmed funkcij f oziroma g soda, druga pa liha funkcija, potem je kompozitum $f \circ g$ soda funkcija. Če pa sta f in g obe lihi (oziroma sodi) funkciji, potem je njun kompozituma $f \circ g$ liha (oziroma soda) funkcija.
8. Naj bosta f in g funkciji z istim definicijskim območjem. Dokaži ali ovrzi spodnji trditvi. (Če katera od trditev ne drži, jo popravi tako, da bo veljala.)
- (a) Če sta f in g obe sodi funkciji, potem sta njuna vsota $f + g$ in produkt $f \cdot g$ sodi funkciji.
 - (b) Če pa sta f in g obe lihi funkciji, potem sta njuna vsota $f + g$ in njun produkt $f \cdot g$ sodi funkciji.

7 Limite funkcij

- Dana je funkcija $f(x) = 3x + 1$.
 - Ugotovi, za katere $x \neq 1$ se vrednosti funkcije $f(x)$ od 4 razlikujejo za manj kot $\frac{1}{100}$, ter določi kakšno punktirano okolico točke 1, da se bodo vrednost $f(x)$ od 4 razlikovale za manj kot $\frac{1}{100}$.
 - Pokaži s pomočjo definicije limite funkcije, da je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$, tj. za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, da bo $|f(x) - 4| < \varepsilon$, če bo le $|x - 1| < \delta$, $x \neq 1$.
- Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x^2-1}{2x^2+3}$.
 - Poišči M , da bodo vrednosti funkcije f za $x > M$ vsebovane v $\frac{1}{100}$ -okolici števila 1, t.j. $|f(x) - 1| < \frac{1}{100}$ za $x > M$.
 - Pokaži s pomočjo definicije limite zaporedja, da je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
- Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$.
 - Izberi si neko (čim bolj enostavno) strogo naraščajoče zaporedje a_n z limito 1, ki ga podaj tudi s splošnim členom. Nato izračunaj limito zaporedja $f(a_n)$, torej $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2+a_n-2}{a_n^2-1}$, če ta obstaja.
 - Ali se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ spremeni, če vzameš katero drugo zaporedje $a_n \neq 1$ z limito 1? Limito $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ primerjaj z limito $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Poišči vodoravne asimptote naslednjih funkcij

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1+x)(x-2)}, \quad g(x) = 2^{-x} + 2, \quad h(x) = -\arctan x, \quad i(x) = xe^x.$$

Funkcija $A(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ v neskončnosti (za $x \rightarrow \pm\infty$), če je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - A(x)) = 0$.

- Izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x^2-4x}{x^2-2x-3}$,

(č) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+x+x}-\sqrt[3]{x^2}}{x-3\sqrt{x}}$,

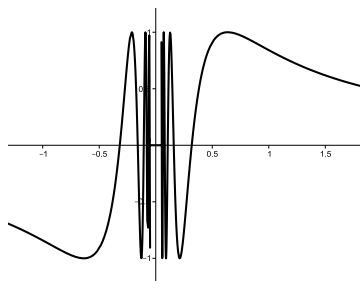
- (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$, (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2x})^{-x}$,
(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x+1}}$, (q) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{4x^2})^{x^2}$,
(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x+x^3}{3^x+x^2}$, (r) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{3}{4x})^{-x}$,
(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x-2}{3^x+1}$, (s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3+\frac{4}{x}}$,
(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x+3}{2^x-x^2}$, (š) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{3x}{2})^{\frac{1}{4x}}$,
(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, (t) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-2}{x})^{3x}$,
(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}$, (u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,
(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x) \cos(2x)}{x \sin(3x)}$, (v) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$,
(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan(3x)}{\sin^2(2x)}$, (w) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}$,
(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x \sin(x)}$, (x) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\frac{1}{x})$,
(n) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan(\frac{\pi x}{2})$, (y) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(\frac{1}{x})$,
(o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$, (z) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(\frac{1}{x})$.

6. Razišči obstoj naslednjih limit:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x})$,
(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin(x)$,
(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(x)e^{-x})$.

7. Obravnava j limito $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$:

- (a) Ugotovi, kako velika je funkcija $\sin \frac{1}{x}$ za x blizu 0.
(Nasvet: Poišči kar vse maksimume in minimume dane funkcije.)
(b) Ali obstaja $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$?



8. Naj bo $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ monotona funkcija (naraščajoča ali padajoča). Dokaži, da velja:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = L \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = L.$$

8 Zveznost

1. Dana je funkcija $f(x) = x^2$.

- (a) Poišči kakšen $\delta > 0$, da bodo vrednosti $f(x)$ za vse $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ od 4 razlikovale za manj kot $\frac{1}{100}$.
- (b) Po definiciji limite preveri, da je $f(x) = x^2$ zvezna v točki $x = 2$. (Za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, da bo iz $|x - 2| < \delta$ sledilo $|x^2 - 4| < \varepsilon$.)

2. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 1 \\ 2 - x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{3x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}.$$

- (a) Izračunaj tiste limite $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ in $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, ki obstajajo.
- (b) Določi območje zveznosti in točke nezveznosti funkcije f . Utemelji, zakaj funkcija g pri vrednosti parametra $a = 3$ ni zvezna v točki 0. Poišči tak parameter a , da bo funkcija g zvezna povsod.

3. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 4, & x \leq -1 \\ a \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} + b, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{\sin(3x) \tan(\frac{x}{2})}{2x \sin(2x)}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

kjer sta a in b realna parametra. Izračunaj limiti $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, ter določi parametra a in b , da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana.

4. Določi realna parametra a in b , da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x) \sin(ax)}{4x^2}, & x < 0 \\ xe^{x-1} + b, & 0 \leq x \leq 1 \\ a \arctan(\frac{2}{(1-x)^3}), & 1 < x \end{cases},$$

zvezna povsod, kjer je definirana.

5. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} (1 - 2x)^{\frac{3}{5x}}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\sin^2(bx)}{x \tan(\frac{x}{3})}, & 0 < x < \pi \end{cases},$$

kjer sta a in b realna parametra. Določi a in b , da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana.

6. Za katera realna števila a , b in c je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x-1}) + a, & x > 1 \\ (1 - 2x)^{\frac{1}{3x}}, & 1 \geq x > 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin^2(cx) \cos(3x)}{x^2}, & x < 0 \end{cases},$$

zvezna povsod, kjer je definirana?

7. Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ x^{\frac{1}{x}}, & x \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- Določi točke zveznosti in točke nezveznosti funkcije f . Ali v kateri točki $c \in \mathbb{R}$ ne obstaja niti limita $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$?
- Utemelji, zakaj je funkcija g zvezna v točki $x = 1$. (Nasvet: Opazi, da g preslika člene poljubnega konvergentega zaporedja a_n z limito 1 tako, da racionalne člene preslika v 2, iracionalne pa v $2a_n$, torej v zaporedje z limito 2.)
- Pokaži, da funkcija g ni zvezna nikjer drugod (razen v 1). (Nasvet: Poišči konvergentni zaporedji racionalnih števil a_n in iracionalnih števil b_n z limito 3, ki ju f preslika v zaporedji z različnima limitama.) ter določi limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n)$.

8. Ugotovi, ali imajo dane funkcije na danih intervalih kakšno ničlo. V primeru pritrdilnega odgovora potem z metodo bisekcije poišči kakšen približek za ničlo, ter razmisli, kako natančen je. (Napravi vsaj štiri korake metode.)

- $f(x) = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $[1, 2]$,

- (b) $g(x) = -x^4 + 3x + 2$ na intervalih $[-1, 0]$ in $[2, 3]$,
 (c) $f(x) = x - 2 \sin(x)$ na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$?

9. Z metodo bisekcije poišči približne rešitve naslednjih nalog:

- (a) Poišči kakšen približek rešitve enačbe $x^3 + 2x + 4 = 0$ na intervalu $[-2, -1]$.
 (b) Ali ima enačba $x2^x = 1$ kakšno rešitev na intervalu $[0, 1]$? Če je tvoj odgovor pritrdilen, potem poišči kakšen približek rešitve.
 (c) Razloži, zakaj se grafa funkcij $f(x) = x^2$ in $g(x) = e^{-x}$ sekata nad intervalom $[0, 1]$. Z metodo bisekcije poišči približek presečne točke. (Napravi vsaj pet korakov.) Kako natančen približek dobiš?
 (d) Utemelji, da funkcija $g(x) = -x^3 + 3x + 2$ v neki točki na intervalu $[-1, 0]$ zavzame vrednost 1. Z metodo bisekcije nato poišči približek take točke.

10. Dana je zvezna funkcija $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Dokaži, da ima funkcija f fiksno točko, t.j. obstaja točka $x_0 \in [0, 1]$, da je $f(x_0) = x_0$.

11. Pokaži, da na ekvatorju obstajata diametralno nasprotni točki, ki imata enako temperaturo. (Nasvet: Naj bo $T(\varphi)$ funkcija temperature v odvisnosti od geografske dolžine $\varphi \in [0, 2\pi]$, $T(0) = T(2\pi)$. Razloži, da je dovolj pokazati, da ima $g(\varphi) = T(\varphi) - T(\varphi + \pi)$ ničlo na intervalu $[0, \pi]$ in obstoj ničle tudi utemelji.)

12. Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-2x}{x^3-1}, & x > 1 \\ axe^{x-1} + b, & 1 \geq x \geq 0 \\ \frac{\tan(2x)\sin(ax)}{x^2}, & x < 0 \end{cases},$$

kjer sta a in b realna parametra. Določi a in b , da bo funkcija f zvezna povsod, kjer je definirana. Ali je pri teh parametrih funkcija f enakomerno zvezna na intervalu $[0, 100]$? Kaj pa na intervalu $[0, \infty)$?

13. Ugotovi, katere izmed naslednjih funkcij so enakomerne zvezne na danih intervalih:

- (a) $f(x) = x^3$ na intervalu $[0, 1]$.
 (b) $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalih $[1, \infty)$ oziroma $[0, \infty)$.

- (c) $f(x) = \frac{1}{x}$ na \mathbb{R} ,
(Nasvet: Opazuj $|f(x) - f(x')|$ za x, x' blizu 0.)

Ugotovi tudi, ali je katera od funkcij Lipschitzova na ustreznem intervalu, t.j. ali obstaja konstanta C , da velja $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ za vse x, y na intervalu.

9 Rešitve

9.1 Matematična indukcija

1. Vse enakosti se dokažejo na enak način. Enakost najprej pokažemo za $n = 1$. Indukcijski korak pa ob privzetku veljavnosti enakosti za nek n (indukcijska predpostavka) napravimo tako, da vzamemo prvih $n + 1$ členov 'vsote' (leve strani enakosti za $n + 1$), ter prvih n -členov zamenjamo s 'formulo' za n (desna stran enakosti za n), po krajšem računu končno dobimo 'formulo' za $n + 1$ (desno stran enakosti za $n + 1$).

Pokažimo zato le primer (a). Za $n = 1$ enakost jasno drži, saj je $1 = \frac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2}$. Vzemimo naprej $n + 1$ členov vsote, jih po indukcijski predpostavki zamenjajmo s 'formulo' $\frac{n(3n-1)}{3}$, ter dobljeno še malo preuredimo:

$$1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} + (3(n+1)-2) = \frac{(3(n+1)-1)(n+1)}{2}.$$

2. Naloga se loti na enak način kot naloga 1., pri čemer v indukcijskem koraku v produktu prvih $n + 1$ faktorjev prvih n zamenjaj s 'formulo'. Pomagaj si tudi z adicijskim izrekom za dvojne kote.
3. Naloga se loti na enak način kot naloga 1., pri čemer v indukcijskem koraku v vsoti $n + 1$ členov prvih n oceni s 'formulo', nato pa pokaži, da dobljeno lahko oceniš z desno stranjo neenakosti za $n + 1$.
4. Indukcijski korak gre takole. Če privzamemo, da za nek n velja neenakost $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, potem lahko izpeljemo:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

5. V indukcijskem koraku s pomočjo indukcijske predpostavke $x_n < 4$ izpelji

$$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n} < \sqrt{12 + 4} = 4.$$

6. Vse enakosti se dokažejo na tak način. Trditve so za $n = 1$ enostavne, v indukcijskem koraku pa indukcijsko predpostavko opišemo z enačbo, iz katere izrazimo nek izraz, ki se pojavi v izrazu za $n + 1$, ter poračunamo.

Oglejmo si indukcijski korak na primeru (e). Po indukcijski predpostavki za nek n velja $3 \cdot 5^n + 2 \cdot 7^n - 5 = 8k$ oziroma $3 \cdot 5^n = -2 \cdot 7^n + 5 + 8k$,

kjer je celo število k . Potem kmalu sledi, da je z 8 deljiv tudi izraz:

$$3 \cdot 5^{n+1} + 2 \cdot 7^{n+1} - 5 = 5(-2 \cdot 7^n + 5 + 8k) + 2 \cdot 7 \cdot 7^n - 5 = 4 \cdot 7^n + 20 - 40k.$$

7. Upoštevaj, da je $2^{2^{n+1}} = (2^n)^2$. Opazi tudi, da se kvadrat števila, ki se konča s 6, tudi konča s 6.
8. Računaj: $\frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{n+1}{6} = \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + \frac{n}{6} + 2n^3 + 4n^2 + 3n + 1$.
9. Bazni korak pomeni trditev, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka π , kar velja. V indukcijskem koraku pa $(n+1)$ -kotnik razreži na n -kotnik in trikotnik in uporabi indukcijsko predpostavko na dobljenem n -kotniku.
10. Jasno je $24 = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$. Če pa je $n = 7x_n + 5y_n$, potem je $n+1 = 7(x_n - 2) + 5(y_n + 3)$.
11. Ni težko uganiti, da je $48 = 4 \cdot 12$ in $49 = 2 \cdot 12 + 5 \cdot 5$. Denimo sedaj, da znamo plačati znesek n in $n-1$. Če lahko to storimo tudi tako, da med drugim plačamo z dvema kovancema za 12, potem prav njiju nadomestimo s petimi kovanci po 5 in dobimo znesek $n+1 = n - 2 \cdot 12 + 5 \cdot 5$. Sicer si oglejmo znesek za $n-1$. Če ga lahko plačamo med drugim z vsaj dvema kovancema za 5, potem ju zamenjamo s kovancem za 12, pa dobimo $n-1 + 12 - 2 \cdot 5 = n+1$, drugače pa znamo $n-1$ plačati z vsaj štirimi kovanci za 12, tako $n-1 + 10 \cdot 5 - 4 \cdot 12 = n+1$.
12. Šahovnico dimenzije $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ razreži na štiri šahovnice dimenzije $2^n \times 2^n$, nato pa za tri od manjših po predpostavki izberi tako pokritje z dominami, da je nepokriti vogal na sredini velike šahovnice.
13. V indukcijskem koraku premisli, da se število območij ravnine poveča za $n+1$, ko n premicam dodaš še eno, skupaj torej na $(\frac{n(n+1)}{2} + 1) + (n+1)$ delov.

9.2 Realna števila

$$1 \quad \frac{2}{7} = 0, \overline{285714}, \quad \frac{5}{3} = 1, \overline{6}$$

2. Najprej poskusi zapisati ulomek $\frac{13}{7}$ kot decimalno število, nato pa se loti splošnega primera. Pri algoritmu deljenja dveh števil opazuj ostanke. Ker je možnih ostankov končno mnogo, se začnejo ponavljati.

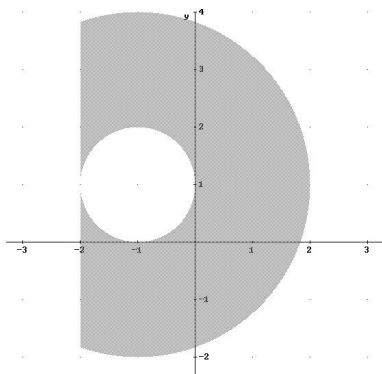
3. $\frac{11153}{990}$
4. $\frac{10x+y}{99}$
5. Razmisli, ali se lahko vse številke pojavijo končnokrat.
6. Vseh primerov s koreni se lotimo na enak način. Predpostavimo, da je število racionalno, ter poskusimo priti do protislovja.
- Oglejmo, kako postopamo pri $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. Denimo nasprotno, da je $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$. Kvadriramo in preuredimo, da dobimo $\sqrt{6} = \frac{r^2-30}{12} \in \mathbb{Q}$, pa smo v protislovju, saj je $\sqrt{6}$ iracionalno.
- Podobno privzamemo, da je $\log_5(7) = \frac{a}{b}$ za $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, kar pomeni $5^{\frac{a}{b}} = 7$ oziroma $5^a = 7^b$, pa smo v protislovju.
7. Poišči še kakšen poreben pogoj, ki bi moral veljati, da bi se število dalo zapisati kot ulomek.
8. Ker je $(\frac{p+2q}{p+q})^2 - 2 = \frac{q^2(2-\frac{p^2}{q^2})}{(p+q)^2}$, pomeni, da sta približka na 'različnih' straneh števila $\sqrt{2}$, zato ustrezno primerjaj izraza $\sqrt{2} - \frac{p+2q}{p+q}$ in $\sqrt{2} - \frac{p}{q}$ glede na to, kje ležita približka.
9. (a) Dokazujemo podobno kot v 6. nalogi, s protislovjem.
 (b) Število \sqrt{z} je vedno iracionalno, o številih $y + z$ in yz in z^2 pa v splošnem ne moremo sklepati ničesar. Poišči enostavne primere, ko so ta števila iracionalna oziroma racionalna.
10. Upoštevaj, da ima x obratno vrednost x^{-1} , ter z njo pomnoži enakosti $xy = 1$ oziroma $xy = xz = 1$.
11. (a) $x \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (0, \infty)$,
 (b) $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [2, \infty)$,
 (c) $x \in (-\infty, 0] \cup (\frac{3}{4}, \infty)$
 (d) $x \in [-1, 0]$,
 (e) $x = 4 \vee x = -2$,
 (f) $x \in [-3, -\frac{1}{3}]$,
 (g) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.
12. Pri (a) loči primera $x \geq y$ in $x < y$.
13. (a) $\inf \mathcal{A} = \min \mathcal{A} - 4$, $\sup \mathcal{A} = 1$, $\sup \mathcal{A}$ pa ne obstaja.

- (b) $\inf \mathcal{B} = -3$, $\sup \mathcal{B}$, $\max \mathcal{B}$ in $\min \mathcal{B}$ ne obstajajo.
- (c) $\inf \mathcal{C} = \min \mathcal{C} - \frac{1}{2}$, $\sup \mathcal{C} = \max \mathcal{C} = \frac{1}{2}$.
- (d) $\inf \mathcal{D} = -1$, $\sup \mathcal{D} = \max \mathcal{D} = -\frac{3}{2}$, $\min \mathcal{D}$ ne obstaja.
14. (a) Pokaži, da je $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots \in \mathcal{B}$.
- (b) Supremum in maksimum ne obstajata.
15. (a) Reši neenačbo $\frac{2m}{1+2m} > \frac{2}{3}$.
- (b) Poišči število $a \in \mathcal{A}$, da bo $a > 0.9$, t.j. poišči vsaj en $m \geq 1$, ki reši enačbo $\frac{2m}{1+2m} > 0.9$. Poišči še število $b \in \mathcal{A}$, da bo $b > 0.99$.
- (c) Pokaži, da nobeno število $M < 1$ ni zgornja meja množice \mathcal{A} , t.j. poišči število $a \in \mathcal{A}$, da bo $a > M$, oziroma reši neenačbo $\frac{2m}{1+2m} > M$.
16. (a) Če je število Z zgornja meja množice A , potem je $-Z$ spodnja meja množice $-A$. Če pa je število s spodnja meja množice A , potem je $-s$ zgornja meja množice $-A$.
- (b) Označi $S = \sup(A)$ in izberi poljubni $m > -S$. Velja tudi $-m < S$, zato iz definicije supremuma za A sklepaj, da obstaja tak $a \in A$, da je $-m < a \leq S$. Odtod naprej izpelji $m > -a \geq -S$, kar pa pomeni, da m ni spodnja meja za $-A$.
- (c) Označi $I = \inf(A)$ in izberi poljubni $M < -I$. Velja tudi $-M > I$ in po definiciji infimuma za A obstaja tak $a \in A$, da je $-m > a \geq I$. Odtod naprej sledi $m < -a \leq -I$, kar pa pomeni, da M ni zgornja meja za $-A$.

9.3 Kompleksna števila

- $7 - 5i, -i, -\frac{1}{6}$.
- (a) Vzemi $z = a + ib$, kjer $a^2 + b^2 = 1$, ter poenostavi izraze.
(b) $\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$, rešitev ima absolutno vrednost 1 za vse realne c .
- Upoštevaj, da $|z - \alpha|$ predstavlja razdaljo med kompleksnima številoma z in α . Pri točki (d) ugotovi, kakšen je geometrijski pomen točk z , ki ustrezajo enakosti $|z + i| = |z + 1|$.

- (a) polovica polravnine,
- (b) krožni lok,
- (c) krožni odsek,
- (d)



- (e) simetrala daljice od -1 do $-i$,
- (f) elipsa z goriščema -3 in 3 , ter glavno polosjo 5 ,
- (g) premica,
- (h) krožnica.

5. (a) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \leq 0, \quad |z| \leq 3\}$,
 (b) $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - 1 - i| < 3\}$.

6. (a) drži, (b) ne drži, (c) drži, (d) drži.

4. Krožnica s središčem v $2i$ in radijem 2 .

7. $z_1 = 2 - i$ in $z_2 = -2 + i$, $w_1 = -1 + 3i$ in $w_1 = 1 - 3i$.

8. Opazi, da se kot v polarnem zapisu oglišč razlikuje le za večkratnike $\frac{2\pi}{7}$:

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{7}\right)\right), \quad k \in \{0, 1, \dots, 6\}.$$

9. (a) Opazi, da je $z_2 = z_1 \cdot \omega$ in $z_3 = z_1 \cdot \omega^2$, kjer je

$$\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- (b) $z_2 = (z_1 - 1) \cdot \omega + 1$, $z_3 = (z_1 - 1) \cdot \omega^2 + 1$, kjer je $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. (a) $2^{1007}(1 + i)$,

- (b) 1,
- (c) $2^{2015} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
- (d) $4^{2015} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

11. Spomni se, da množenje z i predstavlja vrtež za kot $\frac{\pi}{2}$.

12. $\cos(7\alpha) = \cos^7 \alpha - 21 \cos^5 \alpha \sin^2 \alpha + 35 \cos^3 \alpha \sin^4 \alpha - 7 \cos \alpha \sin^6 \alpha$
 $\sin(7\alpha) = 7 \cos^6 \alpha \sin \alpha - 35 \cos^4 \alpha \sin^3 \alpha + 21 \cos^2 \alpha \sin^5 \alpha - \sin^7 \alpha$

13. Polarni zapisi:

- (a) $-i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$
- (b) $-2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$
- (c) $-4 + 4i\sqrt{3} = 8(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$
- (d) $\sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$

Korene vseh števil sedaj zapišemo na enak način. Spomni se, da n -te korene kompleksnega števila $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ zapišemo po 'formuli' $w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos \frac{\varphi+2\pi k}{n} + i \sin(\frac{\varphi+2\pi k}{n}))$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Podajmo zato le kubične korene števila -1 :

$$w_0 = \cos \frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i \sin(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2},$$

$$w_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i \sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2},$$

$$w_2 = \cos \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i \sin(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}) = -i.$$

14. (a) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$,
- (b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3 = -1$,
- (c) $z = a + ia$, $a \in \mathbb{R}$,
- (d) $z = \frac{3}{4} - i$,
- (e) $z_1 = 3$, $z_2 = -1$, $z_3 = -1 + i$,
- (f) krožnica z enačbo $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, kjer je $z = x + iy$,
- (g) krožnica z enačbo $x^2 + (y+2)^2 = 4$, kjer je $z = x + iy$,
- (h) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_4 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$,
- (i) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$,
- (j) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$.

9.4 Zaporedja

1. Označimo $r = 1 + \frac{1}{1000 \cdot 12}$
 - (a) $r^n \cdot 100$
 - (b) $100r + 100r^2 + \dots + 100r^n = \frac{100r(r^n - 1)}{(r - 1)}$ (v n -tem mesecu nismo ničesar položili)
2. $a_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, $o_n = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, $S_n = \frac{8}{2^n}$
3. Ploščine grejo proti 0, obsegi pa proti ∞ . (Razmisli, za kolikokrat se na vsakem koraku poveča obseg oziroma zmanjša ploščina.)
4.
 - (a) naraščajoče, navzdol omejeno, $\inf a_n = \frac{2}{3}$
 - (b) ni monotono, je omejeno, $\sup a_n = 2$, $\inf a_n = -3$
 - (c) naraščajoče, omejeno, $\inf a_n = \frac{1}{2}$, $\sup a_n = 1$, $a_n = \frac{2n-1}{2n}$
 - (d) $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$, padajoče, omejeno, $\inf a_n = 1$, $\sup a_n = 2$
 - (e) padajoče, omejeno $a_n > \frac{1}{2}$ za vse $n \in \mathbb{N}$
5. Razmisli, da velja $O_{n+1} = F_n$, $M_{n+1} = O_n = F_{n-1}$ in izpelji zvezo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. (Glej tudi nalogo 6.)
6. Pri vseh nalogah je ključno upoštevati rekurzivno formulo zaporedja. Pri primeru (c) jo naprimer v indukcijskem koraku upoštvamo dvakrat, da dobimo $F_{3n+3} = F_{3n+2} + F_{3n+1} = F_{3n+1} + F_{3n} + F_{3n+1} = 2F_{3n+1} + F_{3n}$.
7.
 - (a) Poišči N , da bo veljalo $|a_n - 1| < \frac{1}{100}$ za $n > N$.
 - (b) Reši neenakost $|a_n - 1| < \varepsilon$.
8.

(a) 2	(i) $e^{-\frac{4}{5}}$
(b) $1 + \sqrt{2}$	(j) e^{-3}
(c) 0	(k) e^3
(d) 0	(l) 0
(e) 1	(m) 0
(f) 0	(n) $\frac{1}{2}$
(g) e^2	(o) 1
(h) $e^{\frac{15}{4}}$	(p) 0

9. Stekališča a_n so $1, -1, 0$, stekališči b_n pa ± 1 .
10. (a) $1, 2, 1, 2, \dots$
 (b) $-1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
 (c) $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$
 (d) Racionalna števila \mathbb{Q} , zapisana kot zaporedje.
11. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, padajoče, omejeno
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$, ni monotono, omejeno
 (c) stekališči $\pm 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ni monotono, omejeno
 (d) stekališči $\pm \frac{\sqrt{2+5}}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{\sqrt{2+5}}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\frac{\sqrt{2+5}}{3}$, ni monotono, je omejeno
 (e) stekališča $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{6n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{6n+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = 0$, ni monotono, je omejeno
 (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+2} = -1$, ni monotono, je omejeno
 (g) stekališče je 0 s pripadajočim konvergentnim podzaporedjem a_{4n+1} , ni monotono, ni omejeno
 (h) stekališča $1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{8n+2} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{8n-2} = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{8n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{8n-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ni monotono, je omejeno
 (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, padajoče, omejeno
 (j) stekališči 1 in -1 , omejeno
 (k) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, naraščajoče, omejeno
 (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, padajoče
 (m) brez stekališč, naraščajoče, ni omejeno
 (n) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{3}{2}}$, naraščajoče, omejeno
 (o) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, padajoče, omejeno
12. (a) Pokaži, da za $n \leq 99$ veljata neenakosti $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 1$ in $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Za dovolj velike n pa veljata obratni neenakosti.
 (b) Izpeljži rekurzivni formuli $a_{n+1} = \frac{100}{n+1}a_n$ in $b_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n^2 \cdot 1,01}b_n$, kjer pošlji $n \rightarrow \infty$.
13. (a) padajoče, omejeno (Opazi $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot (n+1)$),

- (b) naraščajoče, omejeno (Opazi $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} \cdot n$),
- (c) naraščajoče, neomejeno ($a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{2n}}$).
14. Pri zaporedju a_n glej poljubno razliko $a_m - a_n$, pri zaporedju b_n pa opazi $a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n+1}{2n}$ kot v nalogi 13.
15. (a) stekališča $i, -1, -i, 1$,
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3+3i}{2}$,
 (c) stekališča $2, 2i, -2, -2i$,
 (d) stekališče (ne limita) $\frac{3}{2}i$.
16. Zaporedje je torej omejeno in konvergentno z limito 3. (Poskusi izpeljati, da je splošni člen zaporedja $a_n = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$. Če ne gre direktno, to utemelji z indukcijo.)
17. Izpelji $b_{n+2} = \frac{1+b_n}{2+b_n}$. Pri (b) dokaži, da je $b_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, kjer je F_n Fibonaccijevo zaporedje.
18. (a) Upoštevaj rekurzivno formulo.
 (b) Najprej razmisli, da limita obstaja, potem pa si pri izračunu pomagaj z rekurzivno formulo. Dobiš $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.
19. (a) Pomagaj si z rekurzivno formulo zaporedja.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

9.5 Vrste

1. (a) Z indukcijo ali kako drugače dokaži, da je n -ta delna vsota enaka $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
 (b) Z indukcijo ali s pomočjo dejstva $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ dokaži, da je n -ta delna vsota te vrste enaka $S_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$.
 (c) Z indukcijo ali kako drugače dokaži, da je n -ta delna vsota vrste enaka $S_n = \frac{n}{4n+1}$.
 (d) $3^4, \frac{3 \cdot 5^4}{14}, \frac{3 \cdot 5^4}{14} + \frac{27}{10}$.
2. $\frac{1}{3}$

3. V smeri x približuje vsoti vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{4^{2n-1}} = \frac{48}{25}$, v smeri y pa se približuje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{2n-2}} = \frac{9}{25}$.
4. (a) Opazi, da se število stranic na vsakem koraku pomnoži s 4, t.j. $N_n = 4 \cdot N_{n-1}$.
 (b) Opazi, da se dolžina stranice na vsakem koraku pomnoži z $\frac{1}{3}$, t.j. $d_n = \frac{1}{3} \cdot d_{n-1}$.
 (c) Limita ne obstaja, $o(\mathcal{K}_n) \rightarrow \infty$, ko $n \rightarrow \infty$.
 (d) Utemelji, zakaj se ploščina nastalega lika \mathcal{K}_n v primerjavi s ploščino \mathcal{K}_{n-1} poveča za $N_{n-1} \cdot \frac{(\frac{d_{n-1}}{3})^2 \sqrt{3}}{4}$. Seštej vse prispevke, pa dobiš $p(\mathcal{K}) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.
5. V dokazu si pomagaj z dejstvom, da je zaporedje $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ naraščajoče in konvergira k e .
6. Opazi, da je prva vrsta 'polovica' harmonične, drugo pa nato primerjaj s prvo.
7. (a) konvergira, (d) divergira,
 (b) divergira, (e) konvergira,
 (c) konvergira, (f) divergira.
8. (a) konvergira, (e) konvergira,
 (b) konvergira, (f) konvergira,
 (c) konvergira, (g) konvergira,
 (d) divergira, (h) konvergira
9. (a) Zaradi konvergence vrste morajo biti členi zaporedja a_n od nekod naprej po absolutni vrednosti manjši od 1, zato $a_n^3 < a_n$ za dovolj velike n .
 (b) $a_n = \frac{1}{n}$.
10. (a) konvergira absolutno,
 (b) konvergira pogojno,
 (c) konvergira pogojno,
 (d) konvergira pogojno,
 (e) Vrsta ne konvergira. Opazi, da podzaporedje sodih delnih vsot divergentno: $S_{2n} = (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^n}) \rightarrow \infty$.

- (f) konvergira pogojno.
11. V smeri x približuje vsoti vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2n-1}}$, v smeri y pa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-1} \frac{1}{2n}$, obe pa konvergirata.
12. (a) Povesod konvergira absolutno.
 (b) Konvergira absolutno za $a < 2$, sicer ne konvergira.
 (c) Konvergira absolutno za $a \geq 2$, sicer ne konvergira.
 (d) Konvergira absolutno za $a < 2$.
13. (a) Opazi $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0$.
 (b) Opazi $\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{8n-3}{2n(4n-3)(4n-1)} > 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
14. (a) ne konvergira,
 (b) konvergira,
 (c) konvergira,
 (d) ne konvergira,
 (e) konvergira,
 (f) konvergira za $|z| < 1$, sicer ne konvergira

9.6 Realne funkcije

1. (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničle $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, neomejena.
 (b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ničli $x_{N,1} = -2$, $x_{N,2} = 0$, pola $x_{P,1} = -1$, $x_{P,2} = 1$, asimptota $y = 1$, neomejena.
 (c) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničla $x = 0$, asimptota $y = -1$, navzdol omejena, padajoča.
 (d) $\mathcal{D}_f = (-2, \infty)$, ničla $x = -\frac{3}{2}$, pol $x_P = -2$, neomejena, naraščajoča.
 (e) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ničle $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, omejena.
 (f) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, asimptoti $y = 0$, $y = \pi$, omejena, padajoča.
2. (a) $\mathcal{D}_f = [-1\frac{1}{3}, \infty)$
 (b) $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$

(c) $\mathcal{D}_f = [-2, 0] \setminus \{-\frac{7}{12}, -\frac{\pi}{4}\}$

(d) $\mathcal{D}_f = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

(e) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

(f) $\mathcal{D}_f = (1, \infty)$

(g) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

(h) $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty) \setminus \{2\}$

(i) $\mathcal{D}_f = (e - 2, \infty)$

3. Predpis, ki temperaturo Celzija pretvori v temperaturo Fahrenheita $F(c) = \frac{9}{5}c + 32$, ter obratni predpis $C(f) = \frac{5}{9}(f - 32)$.

4. (a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \ln(x + 1) + 3$.

(b) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [-1, 1]$, $f(\frac{\pi}{3}) = f(\pi)$.

(c) $\mathcal{D}_f = (-1, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}((e^x - 1)^3 - 2)$.

(d) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{3 \cdot 10^x + 1}{10^x - 2}$.

(e) $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{6}\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - 2 \sin x}$.

(f) $\mathcal{D}_f = [0, \infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus (-1, \sqrt{\frac{3}{2}}]$, $f^{-1}(x) = (\frac{1+x}{\sqrt{3x-\sqrt{2}}})^2$.

(g) $\mathcal{D}_f = (-\infty - \frac{7}{2}) \cup (-\frac{7}{2}, -2] \cup [1, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, 0)$, $f(\frac{1+2\sqrt{7}}{2}) = f(\frac{1-2\sqrt{7}}{2})$.

(h) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\ln 2}{3}\}$, $\mathcal{Z}_f = [-\frac{1}{2}, 2]$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln(\frac{1+2x}{x-2})$.

5. (a) $\mathcal{Z}_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup [2, \infty)$.

(b) Funkcija f je injektivna, saj sta oba predpisa injektivna.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sin(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 10^{\frac{x-2}{2}}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

6. (a) $f(g(x)) = 1 - \cos(x^3)$
 $g(f(x)) = (1 - \cos(x))^3$
 $f(f(x)) = 1 - \cos(1 - \cos x)$
 $g(g(g(x))) = x^{27}$

(b) Sode funkcije so f , $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, lihe pa g , $g \circ g \circ g$.

7. Vse trditve se dokažejo na podoben način, zgolj z upoštevanjem definicij lastnosti funkcij.

Pokažimo le prvi del trditve (a). Če sta torej f in g naraščajoči funkciji, potem za $x > y$ najprej dobimo $g(x) > g(y)$, nato pa takoj še $f(g(x)) > f(g(y))$.

8. (a) Drži.
 (b) Ne drži. (Pravilno je: Če sta f in g obe lihi funkciji, potem je njuna vsota $f + g$ liha, njun produkt $f \cdot g$ pa soda funkcija.)

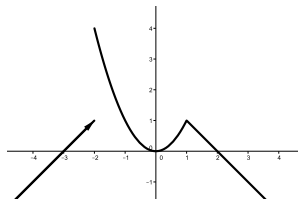
9.7 Limite funkcij

1. (a) Reši neenačbo $|f(x) - 4| < \frac{1}{100}$. Poišči še kakšen dovolj majhen δ , da bo vsak $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ (t.j. $|x - 1| < \delta$), $x \neq 1$, med rešitvami neenačbe $|f(x) - 4| < \frac{1}{100}$. Odtod sklepaj, da je $f(x)$ v $\frac{1}{100}$ -okolici točke 4, če je le x v δ -okolici točke 1.
 (b) Za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, da bo $|f(x) - 4| < \varepsilon$, če bo le $|x - 1| < \delta$, $x \neq 1$. Reši neenačbo $|(3x + 1) - 4| < \varepsilon$.
2. (a) Lahko vzameš $M > 15$. (Reši $|f(x) - 1| < \frac{1}{100}$.)
 (b) Za poljuben $\varepsilon > 0$ poišči M , da bo $|f(x) - 1| < \varepsilon$ za vse $x > M$.
3. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \frac{3}{2}$ je neodvisna od izbire zaporedja a_n z limito 1 in je enaka limiti $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$.
4. $A_f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$,
 $A_g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$,
 $A_{h_1}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\frac{\pi}{2}$, $A_{h_2}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$,
 $A_i(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 0$.
5. (a) $\frac{3}{2}$ (g) -2 (n) $\frac{2}{\pi}$ (t) e^{-6}
 (b) $-\frac{5}{4}$ (h) 1 (o) $\frac{1}{2}$ (u) 1
 (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (i) 2 (p) $e^{-\frac{1}{2}}$ (v) e
 (č) $\sqrt{3} + 1$ (j) 9 (q) $e^{\frac{1}{4}}$ (w) e^6
 (d) -1 (k) $\frac{25}{3}$ (r) $e^{-\frac{3}{4}}$ (x) $-\infty$
 (e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (l) $\frac{3}{4}$ (s) e^8 (y) $\frac{\pi}{2}$
 (f) 0 (m) $\frac{1}{2}$ (š) $e^{-\frac{3}{8}}$ (z) $-\frac{\pi}{2}$
6. (a) Upoštevaj $-1 \leq \sin x \leq 1$ in uporabi 'princip sendviča'.
 (b) Poišči dve ustrezni konvergentni zaporedji z limito 0, katerih funkcijske vrednosti konvergirajo k različnima limitama. Lahko pa vpelješ novo spremenljivko $y = \frac{1}{x}$.

7. i. Reši enačbo $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ oziroma $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ter ugotovi, da lahko rešitve zložimo v zaporedje x_n , ki konvergira k 0. Nato reši še enačbo $\sin\left(\frac{1}{y}\right) = -1$ in ugotovi, da lahko rešitve zložimo v zaporedje y_n , ki tudi konvergira k 0.
- ii. Funkcija v poljubni okolici zavzame tako vrednosti 1 kot tudi -1 , zato limita $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne obstaja.
8. Primerjaj definiciji limite zaporedja in limite funkcije f , ko gre $x \rightarrow \infty$.

9.8 Zveznost

1. (a) Za δ lahko vzamemo katerokoli število, ki je manjše od $\frac{\sqrt{401}-20}{10}$ (Reši neenačbo $|x^2 - 4| < \frac{1}{100}$.)
2. (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{2}{3}$,
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ pa ne obstaja.



- (b) Funkcija f je zvezna na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Za $a = \frac{2}{3}$ je g zvezna povsod, sicer pa ni zvezna v 0.
3. $a = \frac{5}{8}$, $b = \frac{13}{8}$ ($\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-x-2}{x^3+1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x-2}{x^3+1} = \frac{3}{8}$).
4. $a = -\frac{4}{2\pi+5}$, $b = -\frac{5}{2\pi+5}$,
 $(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(5x)\sin(ax)}{4x^2} = \frac{5a}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} a \arctan \frac{2}{(1-x)^3} = -\frac{a\pi}{2}$).
5. $a = e^{-\frac{6}{5}}$, $b = \pm \frac{e^{-\frac{3}{5}}}{\sqrt{3}}$.
6. $a = \sqrt[3]{3} - \frac{\pi}{2}$, $b = e^{\frac{2}{3}}$, $c = \pm e^{\frac{1}{3}}$.
7. (a) Pokaži, da se poljubno zaporedje c_n , ki konvergira k 1, z g preslika v zaporedje $g(c_n)$, ki konvergira k 2.

- (b) Opazi, da se zaporedji racionalnih števil a_n in iracionalnih števil b_n z limito $a \neq 4$ se z g preslikata v zaporedji z različnima limitama, ki ju določi.
- (c) Nezveznost v ostalih točkah pokaži na enak način kot za točko 3.
8. Bisekcija na vseh primerih poteka na podoben način. Intervale razpolavljamo, ter iščemo take podintervale, da funkcija v krajiščih zavzame vrednosti različnega predznaka. Oglejmo si primer (a). Interval $[1, 2]$ je že tak, zato ga razdeli na manjša podintervala $[1, \frac{3}{2}]$ in $[\frac{3}{2}, 2]$, ter izberi tistega, ki zagotovo vsebuje ničlo. To je $[\frac{3}{2}, 2]$, saj $f(\frac{3}{2}) < 0$ in $f(2) > 0$. Tega nato razdeli na podintervala $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ in $[\frac{7}{4}, 2]$, ter spet izberi tistega, ki zagotovo vsebuje ničlo. Postopek tako nadaljuj dokler ne dobiš ustreznega približka oziroma dovolj majhnega podintervala. Približki ničel danih funkcij so:
- (a) $x = 1,53$
 (b) $x = -0,62$
 (c) $x = 1,90$
9. (a) Opazi, da je reševanje dane enačbe enakovredno iskanju ničle funkcije $y = x 2^x - 1$ na intervalu $[0, 1]$. Približek ršitve je $x = -1,18$.
- (b) Funkcija $y = x^3 + 2x + 4$ na intervalu $[-2, -1]$ zavzame v krajiščih intervala nasprotno predznačeni vrednosti, zato ima ničlo na tem intervalu. Približek je $x = 0,64$.
- (c) Grafa funkcij se sekata natanko tedaj, ko ima enačba $x^2 = e^{-x}$ rešitev. (Glej še (a) in (b).) Približek je $x = 0,70$.
- (d) Ker je funkcija zvezna in v krajiščih intervala zavzame vrednosti 0 in 2, potem nekje vmes zavzame tudi 1. Približek je $x = -0,35$.
10. Vpelji funkcijo $g(x) = f(x) - x$, ter z opazovanjem predznaka vrednosti $g(0)$ in $g(1)$ pokaži, da ima g ničlo oziroma f fiksno točko.
11. Naj bo $T(\varphi)$ funkcija temperature v odvisnosti od geografske dolžine $\varphi \in [0, 2\pi]$, $T(0) = T(2\pi)$. Razloži, da je dovolj pokazati, da ima $g(\varphi) = T(\varphi) - T(\varphi + \pi)$ ničlo na intervalu $[0, \pi]$, nato pa utemelji obstoj ničle.
12. $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{8}{9}$ ($\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{x^3 - 1} = \frac{4}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x) \sin(ax)}{x^2} = 2a$). V tem primeru bo f enakomerno zvezna na $[0, 100]$, ker je na tem intervalu zvezna. Na $[0, \infty)$ pa enakomerno zvezna, ker obstaja limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$.

13. (a) Velja $|x^3 - y^3| = |(x - y)(x^2 + xy + y^2)| \leq 3|x - y|$, $x, y \in [0, 1]$.
- (b) V dokazu si pomagaj z oceno $\sqrt{x} - \sqrt{y} \geq \sqrt{x - y}$ za $x > y$. Dovolj je tudi utemeljiti enakomerno zveznost posebej na intervalih $[0, 2]$ in $[1, \infty)$.
- (c) Ni enakomerno zvezna.

Literatura

- [1] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, Rešene naloge iz analize I, DMFA, Ljubljana 1996.
- [2] P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja 1. del, FS UL, Ljubljana 1994.
- [3] I. Vidav, Višja matematika 1, DZS, Ljubljana 1976.