

Limita zaporedja in princip sendviča

Pri določanju limit zaporedja si pogosto pomagamo s principom sendviča.

Izrek (Princip sendviča). *Naj bosta $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni zaporedji z enako limito,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Če za zaporedje $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ velja, da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem je zaporedje $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno z enako limito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

Trditev velja tudi v primeru, ko je neenakost $a_n \leq c_n \leq b_n$ izpolnjena za vse n od nekega n_0 dalje (torej, ko obstaja le končno n , za katere neenakost ni izpolnjena).

Dokaz. Definirajmo novo zaporedje $d_n = c_n - a_n$ in dokažimo, da konvergira proti 0. Označimo z $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja n'_0 , da je $|L - a_n| < \varepsilon/2$ za $n \geq n'_0$, in obstaja n''_0 , da je $|L - b_n| < \varepsilon/2$ za $n \geq n''_0$. Ker je $0 \leq d_n \leq b_n - a_n$, za vse $n \geq \max\{n'_0, n''_0\}$ sledi

$$|d_n - 0| \leq |b_n - a_n| \leq |b_n - L| + |L - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

torej je $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$. Zdaj lahko sklepamo, da tudi zaporedje $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira, saj je $c_n = d_n + a_n$ vsota dveh konvergentnih zaporedij. Njegova limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

kot smo želeli dokazati. □

Zgled. *Naj bo $a_n = \frac{\sin n}{n}$. Potem je $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, po principu sendviča sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.*

Z uporabo različnih lastnosti limite in principa sendviča lahko seznam že znanih osnovnih limit še nekoliko dopolnimo.

Izrek (Osnovne limite). *Ob danih pogojih so naslednja zaporedja konvergentna in za njihove limite velja:*

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ za poljubno konstanto $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$ za vse $a > 0$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ za vsa realna števila $|a| < 1$.

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za vse $a > 0$.

(vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$ za vse $a \in \mathbb{R}$ in $q > 1$.

(vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ za vse $q \in \mathbb{R}$.

(viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Dokaz.

- (i) To sledi neposredno iz definicije limite. Če je $\varepsilon > 0$, potem je $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ za vse $n \geq 1$.
- (ii) Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem je tudi $\varepsilon^{1/a} > 0$ in po arhimedski lastnosti realnih števil obstaja tako naravno število n_0 , da je $n_0 \varepsilon^{1/a} > 1$. Zato za $n \geq n_0$ velja $n \varepsilon^{1/a} > 1$, kar lahko prepišemo v $|\frac{1}{n^a} - 0| < \varepsilon$. Zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

- (iii) Najprej dokažemo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ za $0 \leq a < 1$. Zaporedje $a_n = a^n$ je padajoče (saj je $a^{n+1} = a \cdot a^n < a^n$) in navzdol omejeno z 0, torej je konvergentno. Če je L njegova limita, velja

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot a^n = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = aL$$

po pravilu za produkt limit. Sledi $L(1 - a) = 0$, torej $L = 0$.

Če pa je $-1 < a < 0$, potem velja $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$. Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$, po principu sendviča sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

- (iv) Po binomskem izreku za $n \geq 2$ dobimo oceno

$$\begin{aligned} n &= ((\sqrt[n]{n} - 1) + 1)^n \\ &= 1 + \binom{n}{1}(\sqrt[n]{n} - 1) + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \dots \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2. \end{aligned}$$

Od tod po preureditvi sledi $0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{2/n}$ oziroma $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt{2/n} + 1$. Ker robni zaporedji konvergirata proti 1, po principu sendviča sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

- (v) Za $a > 1$ velja $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ in po principu sendviča sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Za $0 < a < 1$ pa pišemo $b = 1/a$. Potem je $b > 1$ in po že dokazanem je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$. Po pravilu za kvocient sledi še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Ostale dokaze izpustimo. □

Opomba. Zadnje tri limite pomenijo, da funkcija n^a za velike n narašča počasneje kot funkcija q^n , ta počasneje kot $n!$, ta pa počasneje kot n^n . Tovrstni razmisleki so zelo pomembni v računalništvu pri ocenjevanju hitrosti algoritmov. Če neki algoritem porabi n^3 operacij (polinomska zahtevnost), je to za velike n bistveno hitreje kot 2^n operacij (eksponentna zahtevnost), to pa je še vedno bistveno hitreje kot $n!$ operacij (faktorialna zahtevnost).

Zgled uporabe limit: Eulerjevo število

Jacob Bernoulli je v 18. stoletju pri študiju obrestnega računa opazil, da je zaporedje s členi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

naraščajoče, a kljub temu navzgor omejeno, torej konvergentno. Leonhard Euler je nato dokazal, da je limita tega zaporedja enaka neskončni vsoti (oz. vrsti) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, ki je približno enaka 2.7182. To vsoto je označil s črko e .

Število e je ena najpomembnejših matematičnih konstant, saj predstavlja osnovo naravne rasti, naravnih logaritmov, nastopa v normalni porazdelitvi in v številnih enačbah v fiziki in statistiki. Naslednji izreki povzemajo osnovne ugotovitve Eulerja in Bernoullija o številu e , a v nekoliko drugačnem vrstnem redu.

Izrek. Zaporedje s členi $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ je konvergentno.

Dokaz. Zaporedje je naraščajoče, saj je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0,$$

in navzgor omejeno, saj iz neenakosti

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

sledi neenakost

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \\ &= 3 - (1/2)^n \\ &< 3 \end{aligned}$$

po formuli za vsoto geometrijskega zaporedja. Vsako navzgor omejeno naraščajoče zaporedje pa je konvergentno. \square

Ker torej vemo, da limita obstaja, lahko postavimo definicijo.

Definicija. Eulerjevo število e je limita zaporedja

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \doteq 2.7181\dots$$

Kot smo omenili na začetku, je Eulerjevo število tudi limita nekoliko drugačnega zaporedja.

Izrek. Velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Dokaz. Označimo $b_n = (1 + 1/n)^n$. Po binomskem izreku dobimo oceno

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{1}{n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< e, \end{aligned}$$

torej je zaporedje omejeno. Podobno lahko z binomskim izrekom zapišemo b_{n+1} in iz primerjave členov v vsoti za b_n in b_{n+1} razberemo, da je $b_{n+1} > b_n$, torej je zaporedje naraščajoče. Zato je konvergentno in njegova limita je manjša ali enaka e .

Dokažimo, da za vsak m velja $a_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, kjer je $a_m = 1 + \dots + \frac{1}{m!}$. Če je $n > m$, lahko kot prej z binomskim izrekom zapišemo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\geq 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

saj smo zadnji izraz dobili tako, da smo v prejšnjem izpustili člene od $(m+1)$ dalje. Če na obeh straneh pošljemo n proti neskončno, sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{m!} = a_m.$$

Zato velja

$$e \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{m \rightarrow \infty} a_m = e$$

in posledično $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$. □

Posledica. Velja tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$.

Dokaz. Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$, velja

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

□

Dokažimo še, da števila e ne moremo predstaviti z ulomkom. Tudi to je prvi dokazal Euler, naš dokaz pa je nekoliko drugačen in sledi ideji Josepha Fourierja.

Izrek. Število e je iracionalno.

Dokaz. Recimo, da lahko zapišemo $e = p/q$, kjer sta p, q tuji naravni števili in je $q \geq 2$. Potem velja

$$\begin{aligned} q!e &= q! \left(2 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) \\ &= q! \left(2 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{q!}\right) + q! \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots\right) \\ &= \left(2q! + \frac{q!}{3!} + \frac{q!}{4!} + \dots + \frac{q!}{q!}\right) + \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots\right). \end{aligned}$$

Število $q!e$ je celo, saj je enako $\frac{q!p}{q} = (q-1)!p$, kar je produkt celih števil. Prav tako je celo število v prvem oklepaju

$$\left(2q! + \frac{q!}{3!} + \frac{q!}{4!} + \dots + \frac{q!}{q!}\right).$$

Zato mora biti celo tudi število v drugem oklepaju, ki je strogo večje od 0 in manjše od

$$\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots\right) < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1.$$

Ta izraz je torej celo število, ki je strogo večje od 0 in manjše od 1, protislovje. \square

Zgled uporabe limit: Babilonska metoda za računanje korena

Arheološke najdbe kažejo, da so mezopotamska ljudstva (Babilonci, Sumerci) med 1800 in 1600 PNŠ verjetno poznala postopke za reševanje preprostih kvadratnih enačb.



Slika 1: Glinena tablica št. 7289 iz zbirke Yale Babylonian Collection (foto B. Caselmann) s klinopisom, ki prikazuje izračun približka $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ v šestdesetiških ulomkih.

Domnevajo, da so Babilonci približke za kvadratni koren iz danega števila poiskali s postopkom, ki ga je prvi eksplicitno opisal grški matematik **Heron** okoli leta 60 NŠ, v današnjem jeziku pa ga opišemo z rekurzivnimi zaporedji na naslednji način.

Izrek (Babilonska / Heronova metoda). *Naj bo $N \geq 1$ dano število. Zaporedje, podano z začetnim členom $a_1 = N$ in rekurzivno zvezo*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right)$$

je konvergentno z limito $a = \sqrt{N}$.

Dokaz. Najprej z indukcijo preverimo, da je zaporedje $\{a_n\}$ navzdol omejeno s \sqrt{N} . Trditev velja za $n = 1$, saj je $N \geq \sqrt{N}$ za $N \geq 1$. Če za neki n velja $a_n \geq \sqrt{N}$, potem za $n + 1$ dobimo

$$a_{n+1} - \sqrt{N} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) - \sqrt{N} = \frac{a_n^2 + N - 2a_n\sqrt{N}}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{N})^2}{2a_n} \geq 0,$$

torej je $a_{n+1} \geq \sqrt{N}$. Zaporedje je tudi padajoče, saj velja

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) = \frac{a_n^2 - N}{2a_n} \geq \frac{N - N}{2a_n} = 0.$$

Zaporedje $\{a_n\}$ je torej konvergentno z limito $a \geq \sqrt{N}$. Začetek in konec enakosti

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{N}{a} \right),$$

lahko preuredimo v kvadratno enačbo $a^2 = N$ in sklepamo, da je $a = \sqrt{N}$. □

Zgled. Za ilustracijo določimo $\sqrt{2}$ po opisanem postopku.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2; \\ a_2 &= \frac{1}{2}(2 + 2/2) = 3/2 = 1,500; \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = 17/12 \doteq 1,4166; \\ a_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12} \right) = 577/408 \doteq 1,4142159. \end{aligned}$$

Že pri četrtem členu zaporedja smo dobili približek, ki se na 5 decimalnih mest ujema s točno vrednostjo

$$\sqrt{2} = 1,41421568\dots$$

Opomba. Ni težko dokazati, da se število točnih mest za decimalno vejico pri vsakem koraku metode najmanj podvoji. Če je namreč $|a_n - \sqrt{N}| < \varepsilon$ in $a_n > 1$, potem je

$$|a_{n+1} - \sqrt{N}| = \left| \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n} \right) - \sqrt{N} \right| = \frac{|a_n - \sqrt{N}|^2}{2|a_n|} < \varepsilon^2.$$

Torej, če se a_n od dejanske vrednosti \sqrt{N} razlikuje za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{10^d}$, potem se a_{n+1} razlikuje za manj kot $\varepsilon^2 = \frac{1}{10^{2d}}$ (rečemo, da je konvergenca kvadratična).

Oceno natančnosti in hitrost postopka pa je mogoče na različne načine še izboljšati. Že v prvem koraku lahko recimo namesto $a_1 = N$ izberemo boljši približek, če vstavimo katerokoli število, ki ima polovico mest števila N (za $N = 3000$ recimo $a_1 = 50$ namesto $a_1 = 3000$). Več o tem si lahko preberete na Wikipediji (*Methods of computing Square roots, Heron method*).

Na podoben način bi lahko opisali tudi postopek za računanje kubičnega korena. Poskusite sami dokazati naslednji izrek.

Izrek. Naj bo $N \geq 1$ dano število. Zaporedje, podano z začetnim členom $a_1 = N$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{N}{a_n^2} \right)$$

je konvergentno z limito $a = \sqrt[3]{N}$.

Oba izreka pa sta v resnici samo posebna primera tako imenovane Newtonove metode za iskanje približkov ničel funkcije $f(x)$. O tem več kdaj drugič.

Zgled uporabe limit: Arhimedov približek za število π

Sloviti **Arhimed iz Sirakuze** (okoli 287-212 PNŠ) je bil grški matematik, fizik, astronom, inženir in izumitelj. Velja za enega najpomembnejših znanstvenikov vseh časov. Med številnimi njegovimi dosežki v matematiki je tudi metoda, s katero je določil približno vrednost krožne konstante π , ki jo definiramo kot razmerje med obsegom in premerom kroga. Ugotovil je, da je

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71},$$

kar v decimalnem zapisu pomeni približno $3,1429 > \pi > 3,1410$.

Arhimed je spodnjo mejo dobil tako, da je krogu z radijem 1 včrtal pravilni 6-kotnik s stranico $s_1 = 1$ in sklepal, da je njegov obseg manjši od obsega kroga, torej $6s_1 < 2\pi r$, zato je $\pi > 3$. Nato je na vsakem koraku podvojil število stranic, izračunal njihovo dolžino z geometrijskimi argumenti in izboljšal prejšnji približek. Po štirih korakih je ocenil dolžino stranice vrčtanega $2^4 \cdot 6 = 96$ -kotnika in od tod dobil ustrezno spodnjo mejo za π . Na podoben način je iz obsegov očrtanih likov dobil tudi zgornjo mejo.

V sodobnem jeziku bi rekli, da je Arhimed z uporabo Pitagorovega izreka izrazil dolžino stranice krogu včrtanega $3 \cdot 2^{n+1}$ -kotnika s stranicami $3 \cdot 2^n$ -kotnika in dobil rekurzivno zvezo

$$s_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - s_n^2/4}}$$

pri začetnem pogoju $s_1 = 1$. Obseg pravilnega $3 \cdot 2^n$ -kotnika je seveda enak $o_n = 3 \cdot 2^n s_n$. Bralec oziroma bralka lahko sama preverita, da je zaporedje o_n res naraščajoče in omejeno. Vrednost $o_n/2$ torej narašča in konvergira proti iskanemu številu

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o_n}{2}.$$

Če računamo vrednosti za s_n in o_n s pomočjo kalkulatorja v decimalnem zapisu, dobimo denimo

$$s_2 = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - 1/4}} \doteq 0,5176$$

in $o_2/2 = 6s_2 \doteq 3,1058$. Po nekaj korakih lahko zapišemo rezultate v ustrezno tabelo.

n	s_n	$o_n/2$
1	1,0000	3,0000
2	0,5176	3,1058
3	0,2611	3,1326
4	0,1308	3,1394
5	0,0654	3,1410
\vdots	\vdots	\vdots
∞	0,0000	π

S sodobnimi računalniškimi orodji približek brez težav še izboljšamo, a milijonov decimalk števila π na ta način ne bomo uspeli izračunati - potrebne so drugačne, učinkovitejše metode. Pri vrednotenju Arhimedovega dela pa se je treba zavedati, da Arhimed ni poznal decimalnega zapisa realnih števil in je vse ocene izražal s pomočjo razmerij med celimi števili. Pri tem pa je neverjetno spretno uporabljal tudi nenavadne ocene za korene, ki jih je poznal, denimo $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$. To naredi njegove dosežke še bolj osupljive.