

# Osnove matematične analize

Pisni izpit  
29. januar 2022

PRIIMEK IN IME:

---

VPISNA ŠTEVILKA:

---

*Izpit sestavljajo naloge 1–6, drugi kolokvij pa naloge 1–5.  
Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.*

*Veliko uspeha!*

1. Izračunajte vsoto vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ . (7 točk)

Namig:  $n$ -to delno vsoto določite s pomočjo parcialnih ulomkov, ali pa jo uganete in dokažete z indukcijo.

2. Obravnavajte konvergenco vrste  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)\beta^n}{2^{n+1}n^2}$  glede na vrednost  $\beta \in \mathbb{R}^+$ . (10 točk)

3. Dana je realna funkcija  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[3]{2x-1}}$ .

(1+3+3+3=10 točk)

- (a) Določite definicijsko območje funkcije  $f$ .
- (b) Določite limiti  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  in  $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$ , če obstajata.
- (c) Dokažite injektivnost funkcije  $f$ .
- (d) Določite inverz funkcije  $f$ .

4. Dana je realna funkcija  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

(5+2=7 točk)

(a) Določite dvomestni približek realne ničle za  $f$  na intervalu  $[0, 1]$ .

(b) Ali graf funkcije  $f(x)$  seka graf funkcije  $g(x) = -x^3 + 2x + 2$  na intervalu  $[-2, 2]$ ?

5. Zveznost funkcije.

(2+5+5+4=16 točk)

- (a) Zapišite definicijo zveznosti funkcije  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $a \in D$ , kjer je  $D$  odprt interval.
- (b) Zapišite primer funkcije  $f$  z definicijskim območjem  $\mathbb{R}$ , ki je zvezna povsod razen v točki  $a = 2022$ . Nezveznost utemeljite z uporabo definicije ob ustrezni skici.
- (c) Če sta realni funkciji  $f(x)$  in  $g(x)$  zvezni v okolici točke  $a \in \mathbb{R}$ , je tam zvezna tudi njuna vsota  $(f + g)(x)$ . Dokažite.
- (d) Zapišite 4 pomembnejše lastnosti funkcije  $f$ , ki je zvezna na zaprtem intervalu  $[a, b]$ .

6. Zaporedje je podano z rekurzivno formulo

(SAMO IZPIT: 3+3+1+3=10 točk)

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \quad n \geq 2$$

in začetnim členom  $a_1 = \sqrt{6}$ .

- (a) Pokažite, da so vsi členi zaporedja iracionalna števila.
- (b) Dokažite, da je zaporedje navzgor omejeno s 3.
- (c) Ugotovite, ali je zaporedje monotono.
- (d) Določite vsa stekališča in limite zaporedja, če obstajajo.