

# Osnove matematične analize

2. pisni izpit  
4. februar 2022

PRIIMEK IN IME:

---

VPISNA ŠTEVILKA:

---

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!

1. Dokažite:

(5+5=10 točk)

- (a) Izraz  $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$  je deljiv s 6 za vsako naravno število  $n$ .
- (b) Število  $\log_7 5$  je iracionalno število.

2. Izračunajte vse četrte korene kompleksnega števila  $z = -1 + i\sqrt{3}$ . Zapišite jih v polarni obliki ter določite njihov realni oziroma imaginarni del. (6 točk)

3. Dano je zaporedje

(5+3=8 točk)

$$a_n = \frac{n+1}{n} \cos\left(\frac{n^2\pi}{2}\right).$$

- (a) Določite vsa stekališča zaporedja ter za vsako stekališče poiščite kakšno podzaporedje, ki konvergira k temu stekališču.
- (b) Poiščite infimum in supremum zaporedja  $a_n$ , če obstajata.

4. Dana je funkcija

(6+2=8 točk)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(8x^3) \cos(3x)}{5x^2 \sin(2x)}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0; \\ a, & x = 0; \\ b \arctan\left(\frac{2}{x^2}\right), & 0 < x. \end{cases}$$

- (a) Določite realna parametra  $a$  in  $b$  tako, da bo funkcija zvezna v 0.
- (b) Določite limito  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , če obstaja.

5. Limita zaporedja.

(2+3+5=10 točk)

- (a) Zapišite definicijo limite zaporedja.
- (b) Za zaporedje  $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$  in  $\varepsilon = 0,001$  določite najmanjši indeks  $n_0$ , za katerega vsi nadaljnji členi zaporedja ležijo v  $\varepsilon$ -okolici limite.
- (c) Navedite dva izreka o zadostnih pogojih za obstoj limite zaporedja in enega dokažite.

6. Konvergenca vrste.

(5+3=8 točk)

- (a) Kdaj je geometrijska vrsta konvergentna in koliko je tedaj njena vsota? Zapišite ustrezní izrek in ga dokažite.
- (b) Z ustreznim primerom pojasnite razliko med absolutno in pogojno konvergenco vrste.