

Osnove matematične analize

Pisni izpit

2. september 2022

PRIMEK IN IME:

VPISNA ŠTEVILKA:

Vsi odgovori morajo biti primerno utemeljeni. Oddajte urejen izdelek.

Veliko uspeha!

1. Z indukcijo dokažite, da je izraz

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

naravno število za vsako naravno število n .

(8 točk)

2. Dano je realno število $r = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

(5+5=10 točk)

(a) Pokažite, da je število r iracionalno.

(b) Z metodo bisekcije poiščite racionalni približek števila r . Napravite štiri korake.

(Nasvet: Utemeljite, da je število $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ ničla polinoma $p(x) = x^4 + 4x^2 - 1$.)

3. Dano je zaporedje

(6+6=10 točk)

$$a_n = \frac{3^n + 2n}{3^n - 1}.$$

- (a) Dokažite, da je zaporedje a_n padajoče. Ali je tudi konvergentno?
- (b) Iz zaporedja sestavite vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} a_n$ ter dokažite, da ta vrsta konvergira. Ali konvergira absolutno?

4. Določite realne parametre a , b in c tako, da bo naslednja funkcija zvezna povsod, kjer je definirana: (10 točk)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x^2) \cos(x)}{x \sin(2x)}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ a, & x = 0 \\ (1 + 2x)^{\frac{b}{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x - 4} + c, & 1 < x \end{cases} .$$

5. Supremum množice.

(2+1+1+2=6 točk)

- (a) Definirajte *supremum* za neprazno navzgor omejeno podmnožico realnih števil.
- (b) Navedite primer neprazne navzgor omejene množice racionalnih števil, katere supremum ni racionalno število.
- (c) Zapišite Dedekindov aksiom za realna števila.
- (d) Navedite 2 posledici tega aksioma.

6. Limita zaporedja.

(2+2+2=6 točk)

- (a) Zapišite definicijo limite zaporedja.
- (b) Za zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$ in pozitivno število $\varepsilon = 0,001$ določite najmanjši indeks n_0 , za katerega vsi nadaljni členi zaporedja ležijo v ε -okolici limite.
- (c) Navedite dva izreka o zadostnih pogojih za obstoj limite zaporedja.