

1. kolokvij iz Osnov matematične analize

PeF-Ma-vezave
29. november 2021

1. Zaporedje F_n je podano z rekurzivno formulo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ in začetnima členoma $F_1 = F_2 = 1$ (*Fibonaccijevo zaporedje*). Z indukcijo dokaži:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

2. (a) Zapiši Dedekindov aksiom za realna števila.
(b) Kaj pomeni, da imajo realna števila arhimedsko lastnost? Kako ta lastnost sledi iz Dedekindovega aksioma?
3. Dokaži, da je število $\sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ iracionalno.
4. Poišči vsa kompleksna števila z , ki rešijo enačbo $|z|\bar{z}^2 = \frac{1+i}{4}$. (Nasvet: Polarna oblika kompleksnega števila.)
5. Določi stekališča zaporedja $a_n = \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, ter za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki konvergira k temu stekališču. Poišči tudi infimum in supremum zaporedja a_n , če obstajata.
6. Dano je zaporedje $a_n = \frac{2^{n+2}+1}{2^n-1}$.
- (a) Ugotovi, ali je zaporedje a_n monotono.
(b) Dokaži, da je a_n konvergentno in izračunaj limito.
(c) Določi najmanjši indeks n_0 , da bodo členi zaporedja a_n z indeksom $n \geq n_0$ ležali v ε -okolici limite za $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Odgovore natančno utemelji.